第五章 导数与微分

- 5.1 导数的概念
- 5.2 求导法则
- 5.3 参变量函数的导数
- 5.4 高阶导数
- 5.5 微分

5.1 导数的概念

- 一、 导数的定义
- 二、 导函数
- 三、导数的几何意义

一、 问题的提出

(1) 瞬时速度问题

设一质点作直线运动,其运动规律为$s=s(t)$,若t_0为某一确定时刻,t为邻近于t_0的时刻,则质点在时间段$[t_0,t]$(或$[t,t_0]$)上的平均速度为

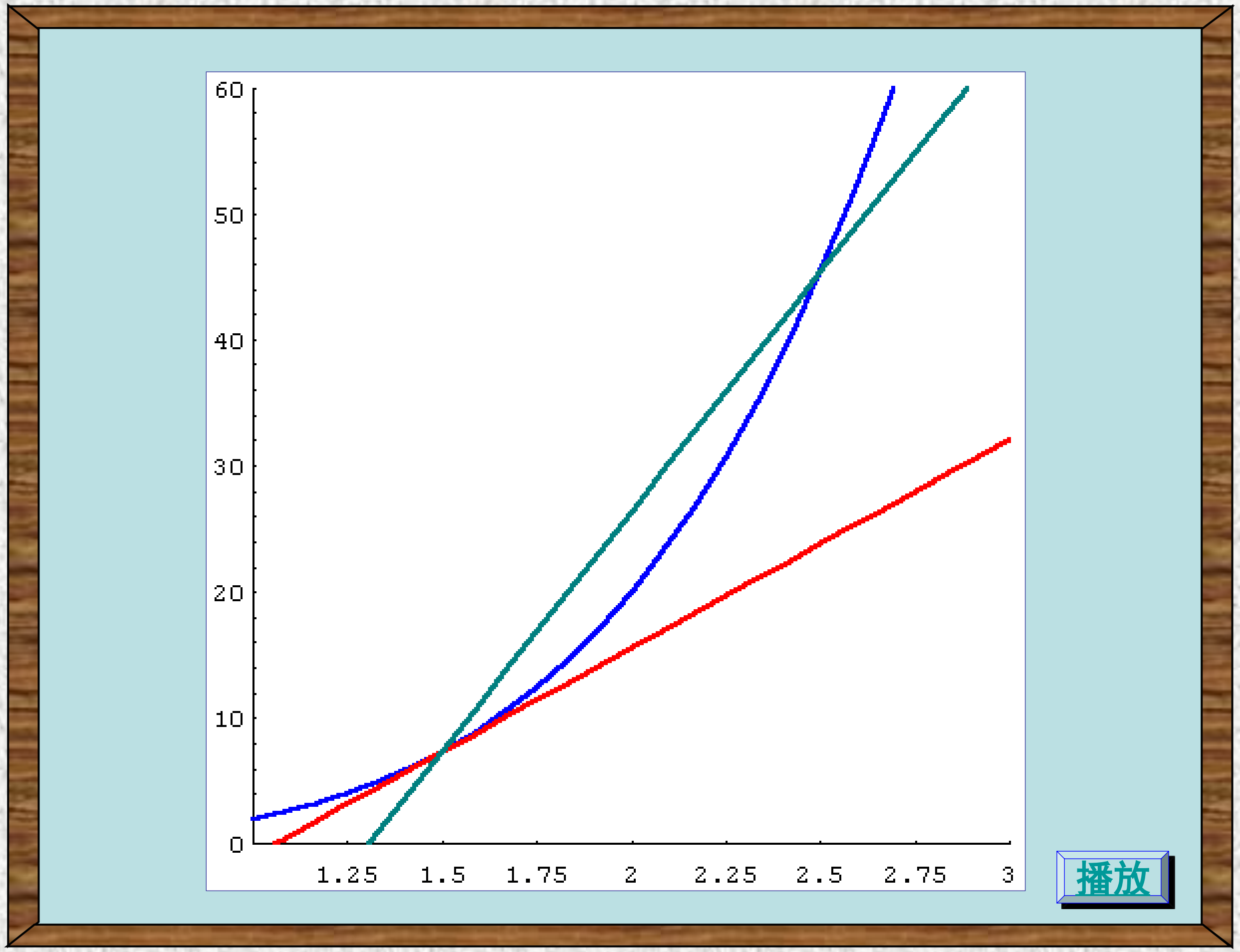
$$\bar{v}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.$$

若$t\to t_0$时平均速度的极限存在,则称此极限

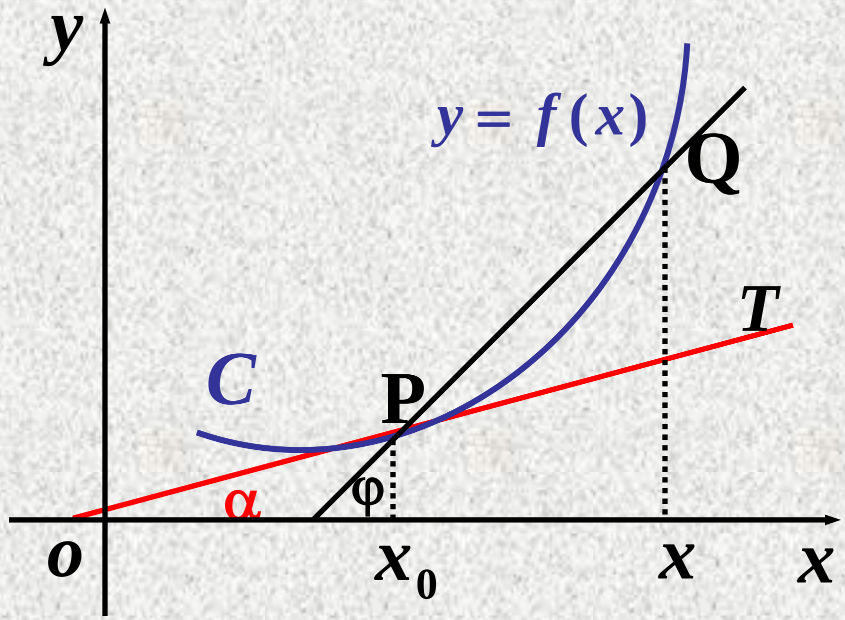
$$v=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

为质点在t_0时刻的瞬时速度.

（2）切线的斜率　割线的极限位置——切线位置



如图,曲线$y=f(x)$在其上边一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线是割线PQ当动点Q沿曲线无限接近于点P时的极限位置.由于割线PQ的斜率为



$$\bar{k}=\tan\varphi=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

因此当 $x\to x_0$ 时如果 $\bar{k}$ 的极限存在,则极限

$$k=\tan\alpha=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

为切线PT的斜率.

二、 导数的定义

定义 设函数$y=f(x)$在点x_0的邻域内有定义,若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

存在,则称函数f在点x_0可导,并称该极限为函数f在点x_0的

导数,记作 $f'(x_0)$, 即

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

若以上极限不存在,则称f在点x_0不可导.

如果令 $x = x_0 + \Delta x, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$

则导数定义可为

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

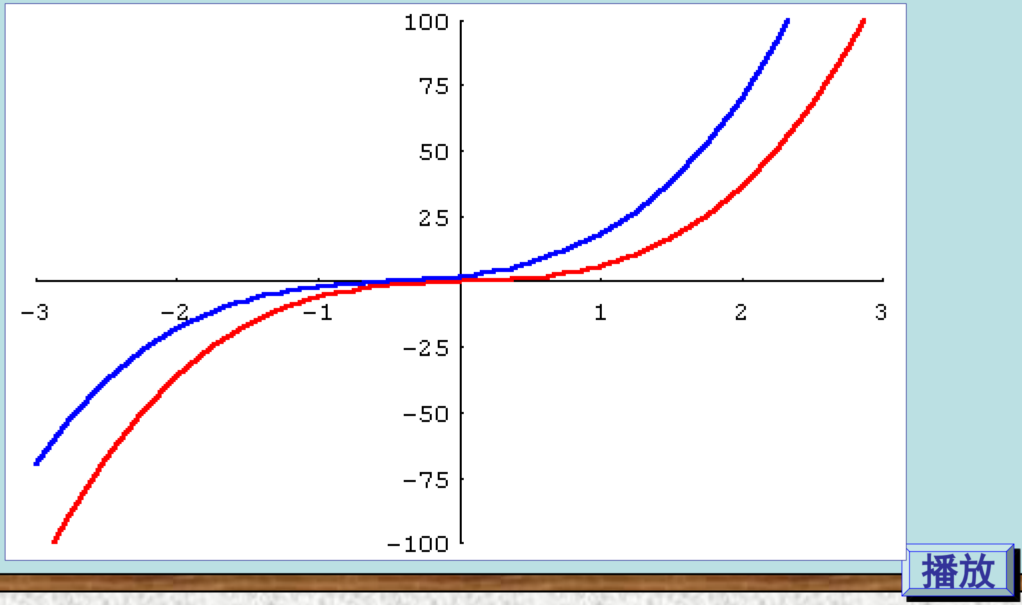
所以函数的导数是函数增量Δy与自变量的增量Δx之比

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的极限, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$称为函数关于自变量的平均变化率,而

$f'(x_0)$称为f在点x_0处关于x的变化率.

三、导函数的几何意义

瞬时变化率是函数平均变化率的逼近函数.



四、 单侧导数

（1）左导数:

定义 设函数$f(x)$在x_0的左邻域$(x_0-\delta, x_0]$上有定义,若左极限

$$\lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为$f(x)$在x_0的左导数,记作 $f'_-(x_0)$.

（2）右导数:

定义 设函数$f(x)$在x_0的右邻域$[x_0,x_0+\delta)$上有定义,若右极限

$$\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为$f(x)$在x_0的右导数,记作 $f'_+(x_0)$.

定理 函数$f(x)$在点x_0处可导$\Leftrightarrow$左导数和右导数都存在且相等.即 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 存在且 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

此时 $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

五、 导函数

若函数f在区间I上每个点处可导 (对区间的端点,只考虑单侧导数),则称f为I上的可导函数.这时对每个$x\in I$都有一个导数 $f'(x)$(或单侧导数)与之对应,从而就定义了一个I上的新函数,称为f在I上的导函数,也称为导数.记作

$$f', y' \text{ 或 } \frac{dy}{dx}, \text{ 即}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, x\in I.$$

注1 如果$f(x)$在开区间(a,b)内可导, 且 $f'_+(a)$ 及$f'_-(b)$都存在, 就说$f(x)$在闭区间[a,b]上可导.

注2 分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq x_0\\ \psi(x), & x<x_0\end{cases}$$

在分点x_0处的可导性只能用单侧导数进行讨论.

即

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\psi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0).$$

都存在,且 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=a$ 时,$f(x)$在x_0可导,且 $f'(x_0)=a.$

注3 导数定义通常可以写成

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ x\in I.$$

六、由定义求导数

步骤: (1) 求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例1 求函数 $f(x) = C$(C为常数)的导数.

解 $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0.$$

即 $(C)' = 0.$

例2 设函数 $f(x)=\sin x$，求 $(\sin x)'$ 及 $(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解 $$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

即 $(\sin x)'=\cos x.$

$$\therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例3 求函数 $y = x^n$ (n为正整数)的导数.

解 $$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} [nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1}] = nx^{n-1}$$

即 $$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

更一般地 $$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}. \qquad (\mu \in R)$$

例如, $$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(x^{-1})' = (-1) x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}.$$

例4 求函数 $f(x)=a^x(a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解 $$(a^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$= a^x \ln a.$$

即 $(a^x)' = a^x \ln a.$ $(e^x)' = e^x.$

例5 求函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 $y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$

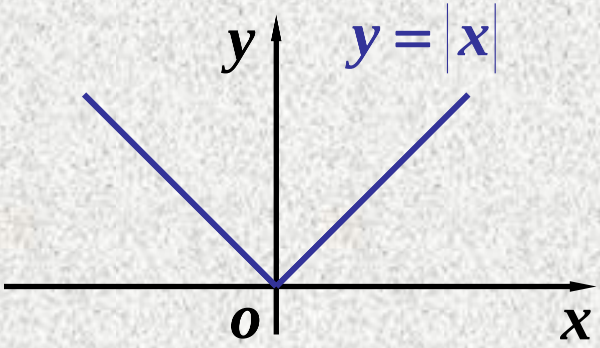
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

即 $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a e.$ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}.$

例6　讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.

解　$\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h},$



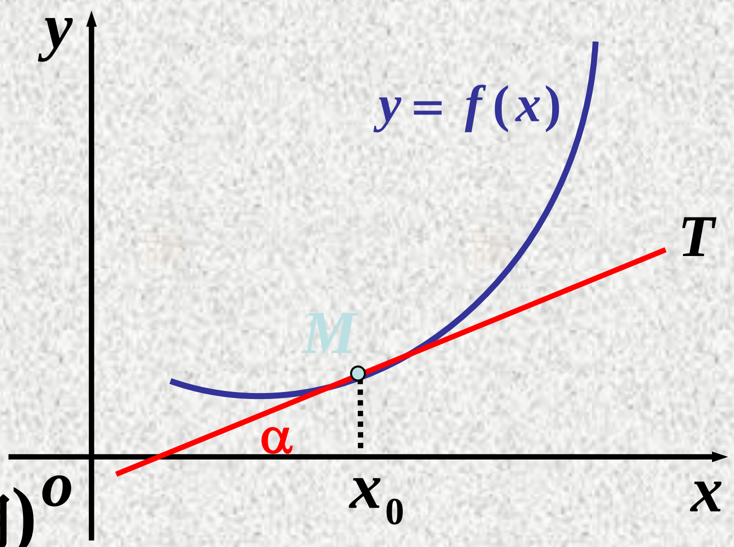
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0),$　$\therefore$ 函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

七、导数的几何意义与物理意义

1.几何意义



$f'(x_0)$表示曲线$y = f(x)$在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率,即

$f'(x_0) = \tan\alpha$,　(α为倾角)

切线方程为　$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

法线方程为　$y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

例7 求函数 $f(x)=x^3$在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程与法线方程.

解 由于 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2$, 所以

$$f'(x_0)=3x_0^2.$$

由导数的几何意义, 得切线方程为

$$y=y_0+3x_0^2(x-x_0)=3x_0^2\cdot x-2x_0^3.$$

法线方程为

$$y=y_0-\frac{1}{3x_0^2}(x-x_0)=x_0^3-\frac{1}{3x_0^2}(x-x_0).$$

2.物理意义 非均匀变化量的瞬时变化率.

变速直线运动: 路程对时间的导数为物体的瞬时速度.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

交流电路: 电量对时间的导数为电流强度.

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}.$$

非均匀的物体: 质量对长度(面积,体积)的导数为物体的线(面,体)密度.

八、可导与连续的关系

定理　凡可导函数都是连续函数.

证　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$ **其中** $\alpha \to 0 \quad (\Delta x \to 0)$ **从而**

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x$$

故 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x] = 0$ $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续 .

注1：$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x$　称为有限增量公式.

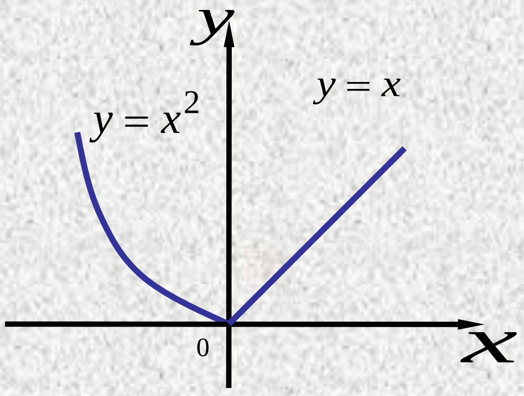
注2：该定理的逆命题不真.即连续函数不一定可导.

连续函数不存在导数举例

1. 函数 $f(x)$连续，若 $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的角点，函数在角点不可导.

例如，

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases},$$



在 $x=0$处不可导，$x=0$为 $f(x)$的角点.

2. 设函数 $f(x)$在点 x_0连续，但

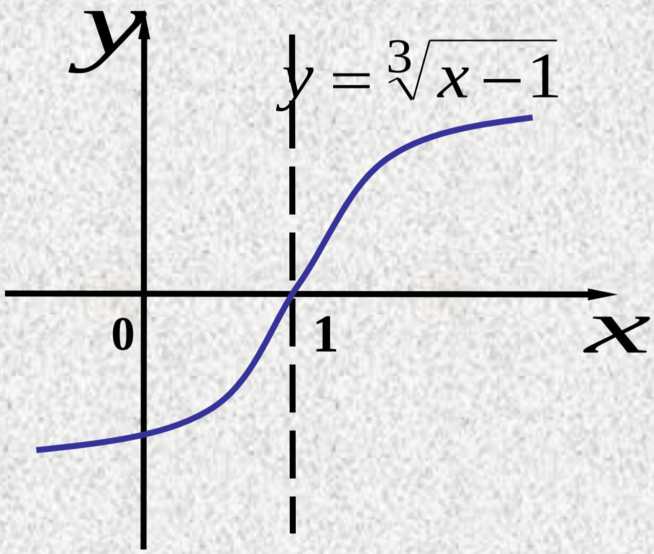
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty,$$

称函数 $f(x)$在点 x_0有无穷导数.(不可导)

例如,

$$f(x)=\sqrt[3]{x-1},$$

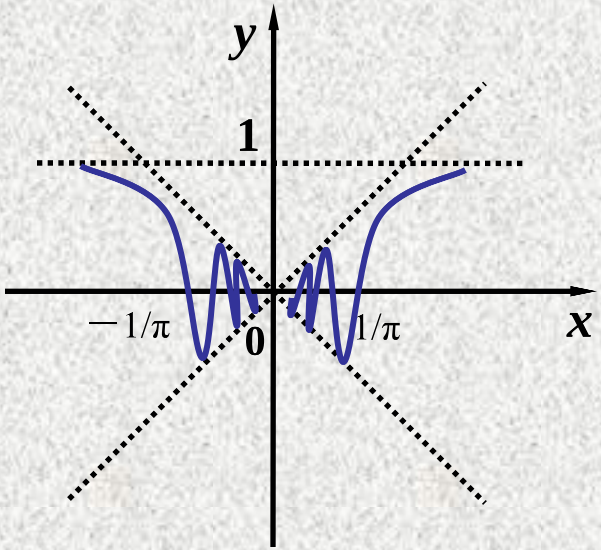
在 $x=1$处不可导.



3. 函数 $f(x)$在连续点的左右导数都不存在(指摆动不定)，则 x_0点不可导 .

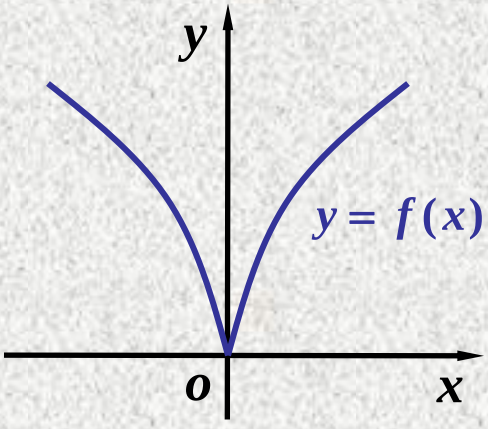
例如,

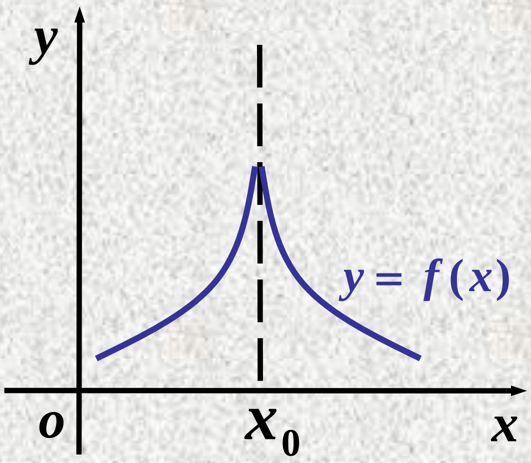
$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases},$$



在$x=0$处不可导.

4. 若$f'(x_0)=\infty$，且在点x_0的两个单侧导数符号相反， 则称点x_0为函数$f(x)$的尖点(不可导点).





例8 **讨论函数**

$$f(x)=\begin{cases} x^k\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在x=**0**处的连续性与可微性.

解 因 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界函数, 所以 $\lim\limits_{x\to 0} x^k \sin\frac{1}{x} = 0(k>0)$

从而k>0时, $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ 即$f(x)$在x=0连续.

又在x=0处,有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(0+\Delta x)^k\sin\frac{1}{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^k\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=(\Delta x)^{k-1}\sin\frac{1}{\Delta x}$$

所以k>1时, $f(x)$在x=0可导,且 $f'(0)=0.$

八、函数的极值与达布定理

定义 设函数$f(x)$在区间I上有定义,x_0是I的内点,若存在x_0的某邻域$U(x_0)$,对任意$x \in U(x_0)$,有

$$f(x_0) \geq f(x)(f(x) \leq f(x_0)),$$

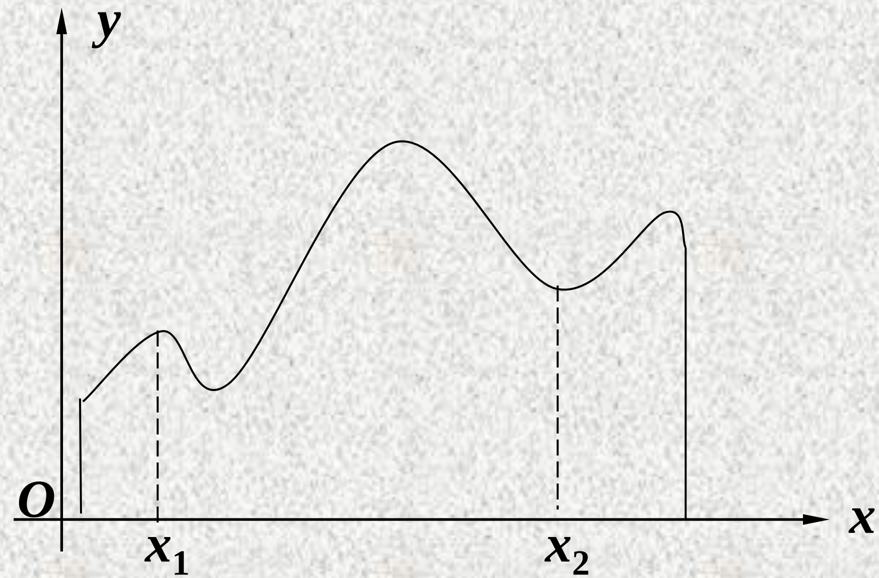
则称函数f在点x_0取得极大(小)值,点x_0称为极大(小)值点,极大值与极小值统称为极值,极大值点与极小值点统称为极值点.

注1 函数的极大值与极小值是局部概念,满足不等式

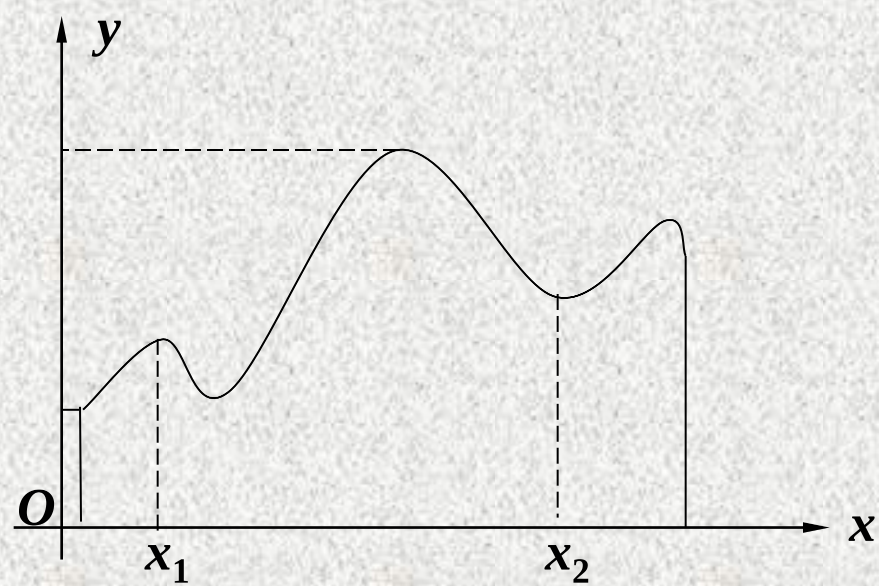
$$f(x_0) \geq f(x)(f(x) \leq f(x_0)),$$

的邻域可以充分小.函数的最大值与最小值是整体概念.

注2 函数在区间I上的极大值点与极小值点可能有很多个,极大值不一定大于与极小值.如图:



注3 函数在区间I上的最大值与最小值不一定存在如果存在,一定是唯一的.当函数的最大值或最小值不在区间的端点取得时,最大值点一定极大值点,最小值点一定是极小小值点.



例　证明:若$f'_+(x_0)>0$,则存在$\delta>0$,对任何$x\in(x_0,x_0+\delta)$,有$f(x_0)<f(x)$.

证 因为 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$

由极限的局部保号性知,存在 $\delta>0$,对任何 $x\in(x_0,x_0+\delta)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

故对任何 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 有 $f(x_0)<f(x)$.

注1: 若 $f'_{+}(x_0) < 0$ 则存在 $\delta > 0$对任何 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

有 $f(x_0) > f(x)$.

若 $f'_{-}(x_0) > 0$ 则存在 $\delta > 0$对任何 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

有 $f(x_0) > f(x)$.

若 $f'_{-}(x_0) < 0$ 则存在 $\delta > 0$对任何 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

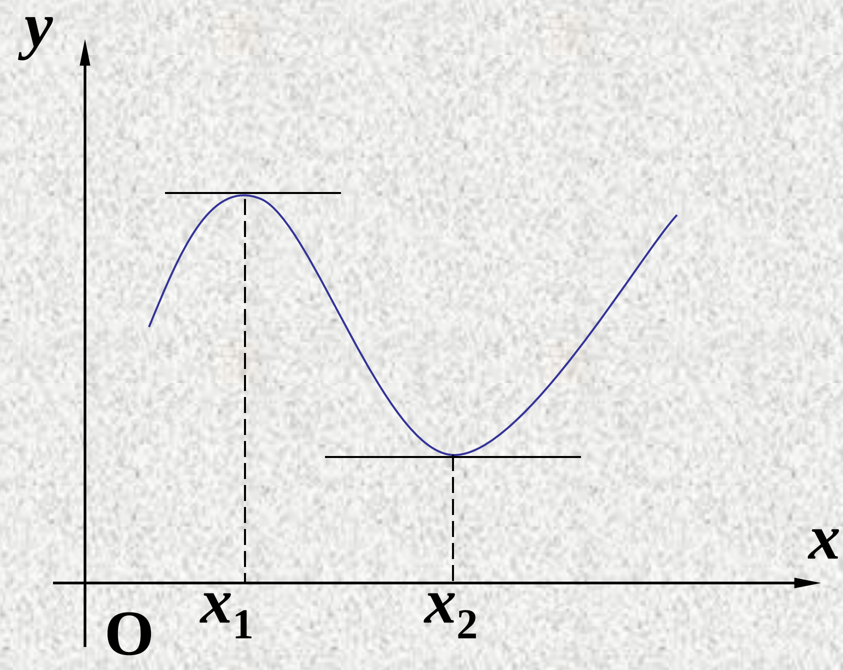
有 $f(x_0) < f(x)$.

注2:定理的结论表明, $f'_{+}(x_0) \neq 0$ 时, x_0 不可能是极值点.

定理 (费马定理)设函数$y=f(x)$在点x_0的邻域U(x_0)内有定义,且在x_0可导,若点x_0为f的极值点,则 $f'(x_0)=0$.

注1 费马定理的几何意义是:函数在可导的极值点处有水平切线.如图x_2 ,x_2处有水平切线.

注2 满足方程 $f'(x)=0$ 的点,称为函数的稳定点.或驻点.



定理 (达布定理)设$f(x)$在$[a,b]$上可导,且 $f'_+(a) \neq f'_-(b)$ k为介于 $f'_+(a)$与 $f'_-(b)$ 之间的任意实数,则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = k$.

证明 设$F(x)=f(x)-kx$,则可证$F(x)$在$[a,b]$上可导且

$$F'(x) = f'(x) - k,$$

因此 $F'_+(a) \cdot F'_-(b) = (f'_+(a) - k)(f'_-(a) - k) < 0$, 不妨设

$F'_+(a) > 0$, $F'_-(b) < 0$, 从而存在

$$x_1 \in U^o_+(a), x_2 \in U^o_-(b), x_1 < x_2,$$

使得 $F(x_1) > F(a), F(x_2) > F(b)$, 又F($x$)可导,从而连续,

因此F(x)在(a,b)内取极大值,设极大值点为ξ ,则 $F'(\xi) = 0$,

即 $f'(\xi) = k$.

这一定理也称为导数的介值定理.

九、小结

1. 导数的实质：增量比的极限;

2. $f'(x_0)=a \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a$;

3. 导数的几何意义：切线的斜率;

4. 函数可导一定连续，但连续不一定可导;

5. 求导数最基本的方法：由定义求导数.

6. 判断可导性 $\begin{cases} \text{不连续,一定不可导.} \\ \text{连续} \begin{cases} \text{直接用定义;} \\ \text{看左右导数是否存在且相等.} \end{cases} \end{cases}$

思考题

函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系？

思考题解答

由导数的定义知，$f'(x_0)$是一个具体的数值，$f'(x)$是由于$f(x)$在某区间I上每一点都可导而定义在I上的一个新函数，即$\forall x \in I$，有唯一值$f'(x)$与之对应，所以两者的区别是：一个是数值，另一个是函数．两者的联系是：在某点x_0处的导数$f'(x_0)$即是导函数$f'(x)$在x_0处的函数值．

5.2 求导法则

- 一、导数的四则运算
- 二、反函数的导数
- 三、复合函数的导数
- 四、基本求导法则与公式

一、 导数的四则运算

定理 若函数$u(x),v(x)$在点x_0可导,则函数

$$f(x)=u(x)\pm v(x)$$

在点x_0也可导,且 $f'(x_0)=u'(x_0)\pm v'(x_0)$.

证: $$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)\pm v(x_0+\Delta x)]-[u(x_0)\pm v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}$$

$$= u'(x_0) \pm v'(x_0).$$

注1　当$u(x),v(x)$在区间I上可导时,有

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x), \ x \in I.$$

特别地,当$v(x)=c$为常数时,有

$$(u(x) \pm c)' = u'(x), \ x \in I.$$

定理 若函数$u(x)$,$v(x)$在点x_0可导,则函数$f(x)=u(x)v(x)$在点x_0也可导,且

$$f'(x_0)=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0).$$

证

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0+\Delta x)]-[u(x_0)\cdot v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0+\Delta x)-u(x_0)\cdot v(x_0+\Delta x)]+[u(x_0)\cdot v(x_0+\Delta x)-u(x_0)\cdot v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]v(x_0 + \Delta x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0)[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$= u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0).$$

注2　当 $u(x), v(x)$ 在区间I上可导时,有

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x), x \in I.$$

特别地,当 $v(x) = c$ 为常数时，有

$$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x), x \in I.$$

定理 若函数$u(x),v(x)$在点x_0可导, $v(x_0)\neq 0$,则函数

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

在点x_0也可导,且

$$f'(x_0)=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{(v(x_0))^2}.$$

特别地

$$g(x)=\frac{1}{v(x)}$$

在点x_0也可导,且

$$g'(x_0)=\frac{-v'(x_0)}{(v(x_0))^2}.$$

证 由于

$$g'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{v(x_0+\Delta x)}-\dfrac{1}{v(x_0)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-[v(x_0+\Delta x)-v(x_0)]}{\Delta x\cdot v(x_0+\Delta x)v(x_0)}=\frac{-v'(x_0)}{(v(x_0))^2}.$$

所以

$$f'(x_0)=u'(x_0)\cdot\frac{1}{v(x_0)}+u(x_0)\cdot\frac{-v'(x_0)}{(v(x_0))^2}$$

$$=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{(v(x_0))^2}.$$

注3 若函数 $u_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 在区间I上可导，$c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数,则

(1) $$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i'(x).$$

(2) $$\left(\prod_{i=1}^{n} u_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} u_1(x)\cdots u_{i-1}(x) u_i'(x) u_{i+1}(x)\cdots u_n(x).$$

例1 设 $y=\cos x\ln x$ 求 y' 及 $y'|_{x=\pi}$.

解　根据积的导数运算法则

$$y'=(\cos x\ln x)'$$

$$=(\cos x)'\ln x+\cos x(\ln x)'$$

$$=\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x.$$

从而

$$y'|_{x=\pi}=\frac{\cos\pi}{\pi}-\sin\pi\cdot\ln\pi=-\frac{1}{\pi}.$$

例2 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$ 求 $f'(0)$.

解:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x+1)(x+2)\cdots(x+100)=100!.$$

例3 设 $y = x^{-n}$ 求 y'.

解 $$y' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = (-n)x^{-n-1}.$$

例4 设 $y = tgx, (ctgx)$ 求 y'.

解

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

同理可得

$$(ctgx)' = -\csc^2 x.$$

例5设 $y=\sec x, (\csc x)$ 求 y'.

解

$$y'=(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x\cdot\cos x}=tgx\cdot\sec x.$$

同理可以求得

$$(\csc x)'=-ctgx\cdot\csc x.$$

二、 反函数的导数

定理 设 $y=f(x)$ 为 $x=\varphi(y)$ 的反函数,若 $\varphi(y)$ 在点 y_0 的某邻域内可导，严格单调且 $\varphi'(y_0)\neq 0$,则 $f(x)$ 在点 $x_0\,(x_0=\varphi(y_0))$ 可导,且

$$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

证 设 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, $\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)$

因为 $\varphi(y)$ 在 y_0 的某邻域内连续且严格单调,所以 $f=\varphi^{-1}$

在 x_0 的某邻域内连续且严格单调，从而当且仅当 $\Delta y = 0$ 时 $\Delta x = 0$, 且当且仅当 $\Delta y \to 0$ 时 $\Delta x \to 0$. 由于 $\varphi'(y_0) \neq 0$

因此

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

例6 求指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的导数.

解 由于 $y = a^x$ 的反函数是

$$x = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a},$$

因此 $$y' = (a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = y \ln a = a^x \ln a.$$

例7 对反三角函数有如下公式:

(1) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. (2) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

(3) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.　(4) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

证明　(1)设 $y = \arcsin x$, 则其反函数为

$$x = \sin y$$

因此

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可证其它各式.

三、复合函数的导数

引理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导的充分必要条件是在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内，存在一个在点 x_0 连续的函数 $H(x)$，使得

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0).$$

从而 $f'(x_0)=H(x_0)$.

证 必要性 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,令

$$H(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\in U^0(x_0)\\ f'(x_0), & x=x_0\end{cases}$$

则由 $f(x)$ 的可导性知 $H(x)$ 在 $U(x_0)$ 内连续，并且有

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0).$$

充分性　如果存在一个在点x_0连续的函数H(x)在x_0的某邻域$U(x_0)$内连续,且

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0).$$

则由导数定义

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}H(x)=H(x_0)=f'(x_0).$$

所以 $f(x)$ 在点 x_0 可导.

注: 引理说明了点 x_0 是函数

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

的可去间断点的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 可导.

定理 若 $u=g(x)$ 在 x_0 可导，$y=f(u)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 可导，则复合函数 $y=f(g(x))$ 在 x_0 可导，且

$$y'|_{x=x_0}=f'(u_0)g'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0).$$

求函数 $y=f(u),\ u=g(x)$ 的复合函数的导函数时，通常写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

证明　由引理及 $y=f(u)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 可导，存在一个在 u_0 连续的函数 $F(u)$, 使得 $f'(u_0)=F(u_0)$, 且 $f(u)-f(u_0)=F(u)(u-u_0), u\in U(u_0)$. 又由 $u=g(x)$ 在 x_0 可导，从而存在一个在点 x_0 连续的函数 $G(x)$,使得 $g'(x_0)=G(x_0)$, 且 $g(x)-g(x_0)=G(x)(x-x_0), x\in U(x_0)$

因此有

$$f(g(x))-f(g(x_0))=F(g(x))(g(x)-g(x_0))$$

$$=F(g(x))G(x)(x-x_0).$$

由引理即得定理的结论.

例9 设α为实数,求幂函数 $y = x^{\alpha}$的导函数.

解 因为 $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ 可以看作 $y = e^{u}$ 与

$u = \alpha \ln x$ 的复合函数,因此

$$y' = (x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

例10 求

$$y = \frac{(x+5)^{2}(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^{5}(x+4)^{\frac{1}{2}}} \quad (x > 4)$$

的导函数.

解

$$\ln y = \ln \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2\ln(x+5) + \frac{1}{3}\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x+4).$$

对上式两边分别求导,得

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)}.$$

故 $$y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)}\right).$$

例11 设$u(x)>0, u(x), v(x)$ 都是可导函数,求

$$y=u(x)^{v(x)}$$

的导数.

解 $$y'=(u(x)^{v(x)})'=(e^{v(x)\ln u(x)})'$$

$$=e^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))'$$

$$=e^{v(x)\ln u(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right)$$

$$=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right).$$

注:例8与例9的求导方法称为对数求导法.

四、 基本求导法则

(1) $(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x);$

(2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$

$(cf(x))' = cf'(x);$

(3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2};$

$\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{g'(x)}{(g(x))^2};$

(4) $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x).$

五、基本求导公式

(1) $(c)' = 0;$

(2) $(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1};$

(3) $(\sin x)' = \cos x,\qquad (\cos x)' = -\sin x,$

$(tgx)' = \sec^2 x,\qquad (ctgx)' = -\csc^2 x,$

$(\sec x)' = \sec x \cdot tgx,\qquad (ctgx)' = -ctgx \cdot \csc x;$

(4) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

,

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

(5) $$(a^x)' = a^x \ln x, \quad (e^x)' = e^x;$$

(6) $$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

,

.

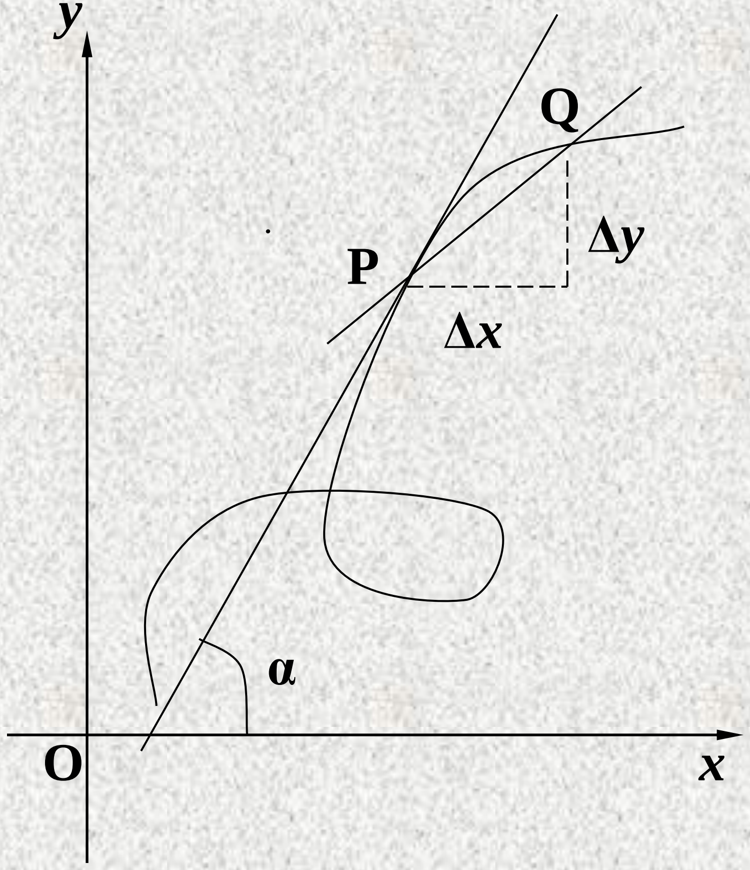
5.3 参变量的导数

- 一、参变量函数的导数
- 二、极坐标函数的导数

一、参变量函数的导数

设平面曲线C：参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha\le t\le\beta)$$



$\varphi(t),\psi(t)$ 是可导函数.

设 $P(x_0,y_0)$ 为曲线上的定点，它所对应的参数为t_0，$Q(x,y)$为曲线上的动点，对应的参数为$t_0+\Delta t$，则割线 P_0P 的斜率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)},$$

分子分母同时除以Δt，并取极限可得到切线的斜率为

$$\tan\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

这里 $\varphi'(t_0)\neq 0$, 如果$\varphi'(t_0)=0$, 但$\psi'(t_0)\neq 0$，则同样可以得到

$$\cot\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

其中α为切线与x轴正向的夹角.

若 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 存在连续导数,且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$,称C为光滑曲线.此时在C上每点处有切线,且切线与x轴称正向的夹角是t的连续函数.

若 $x=\varphi(t)$ 存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, 则 $x=\varphi(t)$ 与 $y=\psi(t)$ 构成复合函数 $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$.

只要 $\varphi(t),\psi(t)$ 可导,且 $\varphi'(t)\neq 0$, 就可由 $\Delta x\to 0$ 推出 $\Delta t\to 0,\Delta y\to 0$. 因此由复合函数和反函数的求导法则得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

例1 试求由上半椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad 0 < t < \pi$$

所确定的函数的导数.

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t.$$

二、极坐标函数的导数

设平面曲线C由极坐标 $\rho=\rho(\theta)$ 表示,则由极坐标与

则由极坐标与直角坐标的关系，有

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

因此C的参数方程为

$$\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

故在相应的条件下有

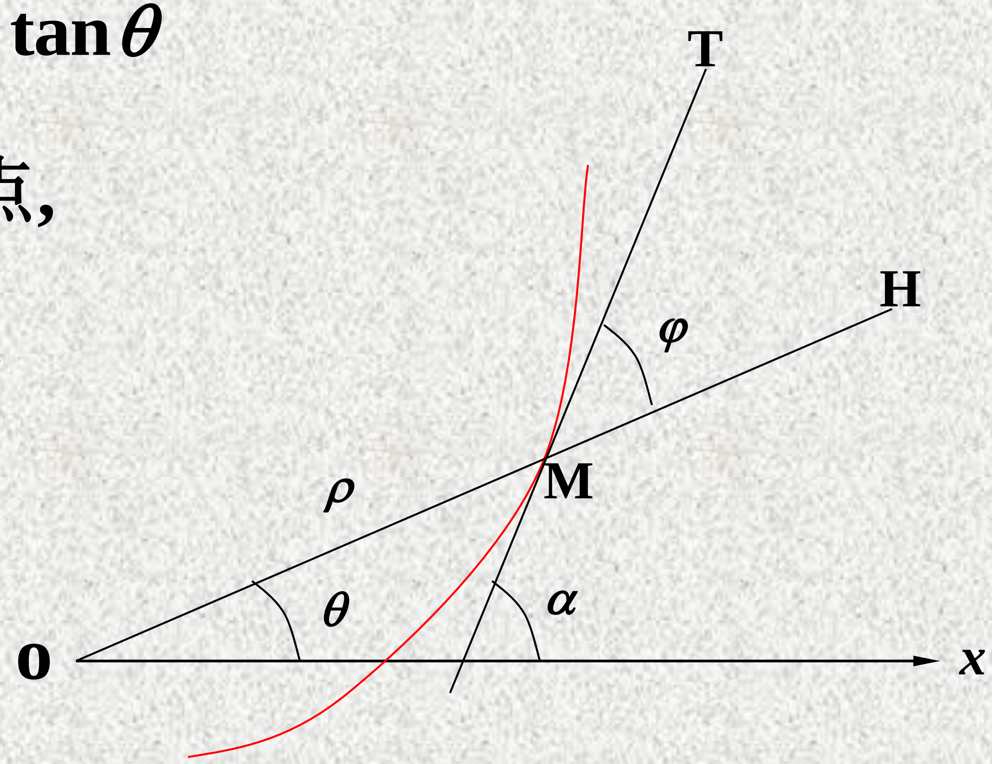
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\rho(\theta)\sin\theta)'}{(\rho(\theta)\cos\theta)'}=\frac{\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta}{\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{\rho'(\theta)\tan\theta+\rho(\theta)}{\rho'(\theta)-\rho(\theta)\tan\theta}.$$

设M是曲线上的一点,

MT为切线,OH是过M的

向径.(如图)



α 是切线MT与极轴*ox*的夹角, θ 是向径OH与极轴*ox*的夹角, φ 是切线MT与向径OH的夹角.则

$$\tan\varphi = \tan(\alpha-\theta) = \frac{\tan\alpha - \tan\theta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\theta}.$$

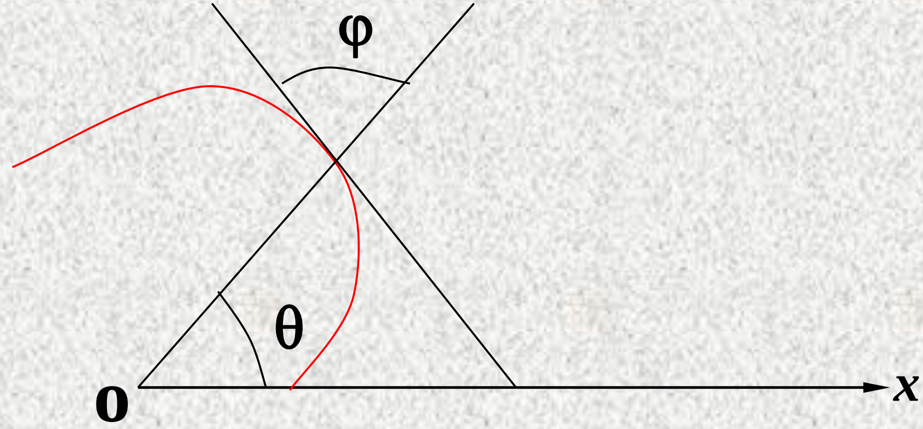
将 $\tan\alpha = \dfrac{\rho'(\theta)\tan\theta + \rho(\theta)}{\rho'(\theta) - \rho(\theta)\tan\theta}$ 代入得

$$\tan\varphi = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}.$$

例2 证明:对数螺线 $\rho = e^{\frac{\theta}{2}}$ (如图)上所有点的切线与向径的夹角 φ 为常数.

证明:对一切 θ

$$\tan\varphi = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{\frac{1}{2}e^{\frac{\theta}{2}}} = 2.$$



即在对数螺线上的每一点的切线与向径的夹角为 $\arctan 2$.

5.4 高阶导数

- 一、高阶导数的概念
- 二、高阶导数的运算法则
- 三、参变量函数的高阶导数

问题:变速直线运动的加速度.

设物体的运动方程为 $s = s(t)$, 则物体的运动速度为

$v(t) = s'(t)$, 而速度在时刻t_0的变化率

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

就是运动物体在时刻t_0的加速度.因此加速度是速度函数

的导数,也就是$s = s(t)$, 的导数的导数,这就是二阶导数

的问题.

一、高阶导数的概念

定义 若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 的邻域内可导,则称 $f'(x)$ 在点x_0的导数为$f(x)$在点x_0的二阶导数,记作 $f''(x_0)$, 即

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

同时称f(x)在点x_0二阶可导.

如果$f(x)$在区间I上的每一点都二阶可导,则得到$f(x)$在区间I上的二阶导函数,记作

$$f''(x)\ x\in I \text{ 或 } f''.$$

依此方法，可由二阶导函 $f''(x)$ 的导数 得到三阶导数 $f'''(x)$，一般地说，由 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导函数可得到 $f(x)$ 的 n 阶导函数(简称为 n 阶导数)，记作 $f^{(n)}(x)$.

二阶或二阶以上的导数称为高阶导数．函数 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶导数记作

$$f^{(n)}(x_0), y^{(n)}|_{x=x_0} \quad 或 \quad \frac{d^n y}{dx^n}|_{x=x_0}.$$

相应地 n 阶导函数就记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)} \quad 或 \quad \frac{d^n y}{dx^n}.$$

二、高阶导数的运算法则

设 $u(x), v(x)$ 有n阶导数，则

$$(1)\ (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

$$(2)\ (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$$

一般地，设 $u_k(x)(k = 1, 2, \cdots, m)$ 有n阶导数，

$c_k(k = 1, 2, \cdots, m)$ 为常数，则

$$\left(\sum_{k=1}^{m} c_k u_k(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} c_k u_k^{(n)}(x).$$

（3）设 $u(x),v(x)$ 有n阶导数，则

$$(u\cdot v)'=u'v+uv',$$

$$(u\cdot v)''=u''v+2u'v'+uv'',$$

$$(u\cdot v)'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv''',$$

一般地用数学归纳法可以证明：

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}.$$

这一公式称为莱布尼兹公式.

三、高阶导数求法举例

1. 直接法: 由高阶导数的定义逐步求高阶导数.

例1 设 $y=\arctan x$, 求 $f''(0)$, $f'''(0)$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad y''=\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$y'''=\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)'=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$\therefore\ f''(0)=\left.\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0}=0;\quad f'''(0)=\left.\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\right|_{x=0}=-2.$$

例2 设 $y = x^{\alpha}\ (\alpha \in R)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$y'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y''' = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \qquad (n \geq 1)$$

若α为自然数n,则

$$y^{(n)} = (x^n)^{(n)} = n!, \qquad y^{(n+1)} = (n!)' = 0.$$

例3 $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 求$y^{(n)}$

解 $y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$

$$y'' = n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \cdots + 2a_{n-2}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$y^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)a_0x^{n-k} + (n-1)(n-2)\cdots(n-k)a_1x^{n-k-1} + \cdots + k!a_{n-k}$$

$$\Rightarrow \quad y^{(n)} = n!a_0$$

例4 设 $y=\sin x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\cos x \;=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})\;=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y'''=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

……

$$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

同理可得 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

注1: 求函数n阶导数时,先求出1~3或4阶导数后,不能急于合并化简,应认真分析其结果,找出规律,用归纳思想写出n阶导数.必要时可用数学归纳法予以证明.即

逐阶求导，寻求规律，写出通式

例5 设 $f(x)=\dfrac{1}{ax+b}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

解 $f'(x)=\dfrac{-a}{(ax+b)^2}$, $f''(x)=\dfrac{2a^2}{(ax+b)^3}$,

$$f'''(x)=\frac{-2\times 3a^3}{(ax+b)^4},\ f^{(4)}(x)=\frac{2\times 3\times 4a^4}{(ax+b)^5},$$

由此可得

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

例6 设 $y=\ln(1+x)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x}$ $\qquad y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$y'''=\dfrac{2!}{(1+x)^3}$ $\qquad y^{(4)}=-\dfrac{3!}{(1+x)^4}$

……

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

四、常用的高阶导数公式

(1) $$(x^n)^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, & 1 \le k < n \\ n!, & k = n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

(2) $$(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)x^{\alpha-n};$$

(3) $$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}, (e^x)^{(n)} = e^{ax};$$

(4) $$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2});$$

(5) $$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}};$$

(6) $$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

2. 间接法 利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换,部分分式等方法, 求出n阶导数.

例7 求 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 的n阶导数.

解 因为 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$,

所以

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

例8 设$f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$

解 由 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 得 $(1+x^2)f'(x)=1$

由Lebniz公式，两边求 n 阶导数，有

$$[(1+x^2)f'(x)]^{(n)}=0$$

$$\Rightarrow\quad [f'(x)]^{(n)}(1+x^2)+n[f'(x)]^{(n-1)}(1+x^2)'$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}[f'(x)]^{(n-2)}(1+x^2)''=0$$

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)$$

$$+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0$$

令 $x=0$ 得 $\quad f^{(n+1)}(0)+n(n-1)f^{(n-1)}(0)=0$

注意到 $\quad f(0)=0,\ f'(0)=1$

$$\Rightarrow \quad f^{(2n)}(0)=0$$

$$f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(2n)!$$

注： 这一解法的特点：找到了 $y=\arctan x$ 的连续三阶导数之间的关系，利用 $x=0$ 得到两相隔导数之间的关系，解决问题

例10设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$\therefore y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}).$$

五、参变量函数的高阶导数

设参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

如果 $\varphi(t),\psi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上都二阶可导，可以求得

由参数方程所确定的函数的二阶导数

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

例11 试求由摆线参数方程

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases},$$

所确定的函数的二阶导数.

解 由于 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(a(1-\cos t))'}{(a(t-\sin t))'} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t} = \cot\dfrac{t}{2}.$

由于

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\cot\frac{t}{2})'}{(a(t-\sin t))'} = \frac{-\frac{1}{2}\csc^2\frac{t}{2}}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a}\csc^4\frac{t}{2}.$$

六、小结

高阶导数的定义及物理意义;

高阶导数的运算法则(莱布尼兹公式);

n阶导数的求法;

1.直接法;　　　　2.间接法.

5.5 微分

- 一、微分的概念
- 二、微分的运算法则
- 三、高阶微分
- 四、微分在近似计算中的应用

一、问题的提出

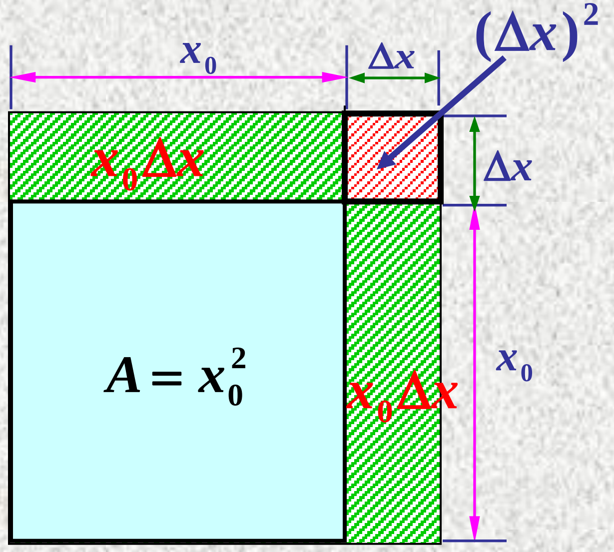
实例: 正方形金属薄片受热后面积的改变量.

设边长由x_0变到$x_0+\Delta x$,

因为正方形的面积 $A = x_0^2$,

所以 $\Delta A = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2$

$$= \underbrace{2x_0\cdot\Delta x}_{(1)} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$



(1): Δx的线性函数,且为ΔA的主要部分;

(2): Δx的高阶无穷小,当$|\Delta x|$很小时可忽略.

再例如，设函数 $y = x^3$ 在点 x_0 处的改变量

为Δx时，求函数的改变量Δy.

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3$$

$$= \underbrace{3x_0^2 \cdot \Delta x}_{(1)} + \underbrace{3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}_{(2)}.$$

当$|\Delta x|$很小时，(2)是Δx的高阶无穷小$o(\Delta x)$,

$$\therefore \Delta y \approx 3x_0^2 \cdot \Delta x.$$

既容易计算又是较好的近似值

问题:这个线性函数(改变量的主要部分)是否所有函数的改变量都有?它是什么?如何求?

二、可微与微分的定义

定义 如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域$U(x_0)$ 内有定义，当给 x_0 一个增量Δx 且 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$时，相应地得到函数的增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, 如果存在常数 A 使

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x).$$

其中 A与Δx 无关. 则称 $y=f(x)$ 在 x_0 可微, $A\Delta x$ 称为函数f 在 x_0 的微分.记作

$$dy\big|_{x=x_0}=A\Delta x \text{ 或 } df(x)\big|_{x=x_0}=A\Delta x.$$

注1: 由定义可知，函数的微分与函数的增量只相差一个关于Δx 的高阶无穷小量.所以当 $|\Delta x|$ 充分小时,有

$$\Delta y \approx A\Delta x.$$

从而为近似计算提供了方便.

注2: 由于

$$dy|_{x=x_0} = A\ \Delta x$$

是Δx的线性函数，所以当$A \neq 0$ 时，也称微分 dy 是函数的增量 Δy 的线性主部.

注3: $\Delta y - dy = o(\Delta x)(\Delta x \to 0).$

注4: 当 $A \neq 0$ 时，$dy \sim \Delta y(\Delta x \to 0).$

注5: 微分 $dy|_{x=x_0} = A\,\Delta x$ 中，A 与 Δx 但与 x_0

有关.

三、可微的条件

定理 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可微的充要条件是函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，且有

$$dy|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$$

即微分定义中的 $A=f'(x_0)$.

证 必要性 若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可微,则由定义 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$. 于是有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A.$$

即 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，且 $f'(x_0)=A.$

充分性　如果 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，则有限增量公式

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

成立，这说明 $y=f(x)$ 在 x_0 可微，且

$$dy|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x.$$

若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的每个点都可微，则称 f 为 I 上的可微函数.函数 $y=f(x)$ 在 I 上的微分记作

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

由于 $y=x$ 时，$dy=dx=1\cdot\Delta x=\Delta x$，所以有

$$dy=f'(x)dx$$

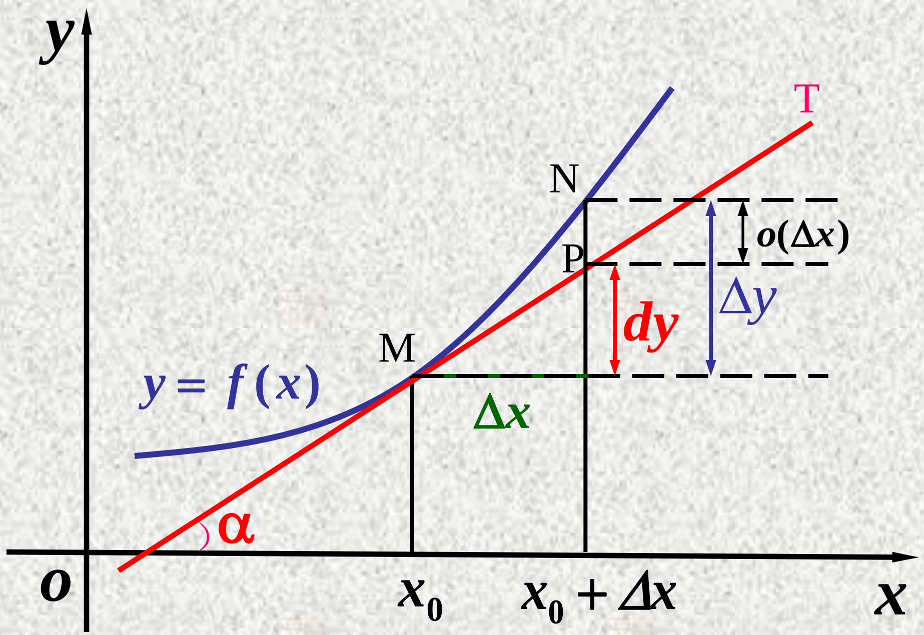
即函数的微分dy与自变量的微分dx之商等于该函数的导数,导数又称为“微商”.

.

四、微分的几何意义

几何意义:(如图)

当Δy是曲线的纵坐标增量时, dy就是切线纵坐标对应的增量.



当$|\Delta x|$很小时, 在点M的附近,

切线段MP可近似代替曲线段MN.

五、微分的运算法则

$$d(u(x)\pm v(x))=du(x)\pm dv(x);$$

$$d(u(x)\cdot v(x))=v(x)du(x)+u(x)dv(x);$$

$$d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{v^{2}(x)};$$

$$d(f(g(x))=f'(u)g'(x)dx(u=g(x)).$$

六、基本微分公式

$$d(C)=0 \qquad d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(\sin x)=\cos x dx \qquad d(\cos x)=-\sin x dx$$

$$d(\tan x)=\sec^2 x dx \qquad d(\cot x)=-\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x)=\sec x\tan x dx \qquad d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$$

$$d(a^x)=a^x\ln a dx \qquad d(e^x)=e^x dx$$

$$d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx \qquad d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

$$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx \qquad d(arc\cot x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$$

例1　设 $y=\ln(x+e^{x^2})$, 求dy.

解　$\because y'=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}$,　　$\therefore dy=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx.$

例2　设 $y=e^{1-3x}\cos x$, 求dy.

解　$dy=\cos x\cdot d(e^{1-3x})+e^{1-3x}\cdot d(\cos x)$

$\because (e^{1-3x})'=-3e^{1-3x}$,　$(\cos x)'=-\sin x.$

$\therefore dy=\cos x\cdot(-3e^{1-3x})dx+e^{1-3x}\cdot(-\sin x)dx$

$=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx.$

七、微分形式的不变性

设函数 $y=f(x)$有导数 $f'(x)$,

(1) 若x是自变量时, $dy=f'(x)dx$;

(2) 若x是中间变量时, 即另一变量t的可微函数 $x=\varphi(t)$, 则

$\because \varphi'(t)dt=dx,\qquad \therefore dy=f'(x)dx.$

结论: 无论 x是自变量还是中间变量, 函数 $y=f(x)$的微分形式总是 $\boxed{dy=f'(x)dx}$

微分形式的不变性

例3 设 $y=\sin(2x+1)$, 求dy.

解 $\because y=\sin u, u=2x+1.$

$$\therefore dy=\cos u du \quad =\cos(2x+1)d(2x+1)$$

$$=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx.$$

例4 设 $y=e^{-ax}\sin bx$, 求dy.

解 $$dy=e^{-ax}\cdot\cos bx d(bx)+\sin bx\cdot e^{-ax}d(-ax)$$

$$=e^{-ax}\cdot\cos bx\cdot bdx+\sin bx\cdot e^{-ax}\cdot(-a)dx$$

$$=e^{-ax}(b\cos bx-a\sin bx)dx.$$

例5 设$e^{xy}=a^x b^y$,求$dy,\dfrac{dy}{dx}$

解一 两边同时求微分得 $d(e^{xy})=d(a^x b^y)$

$$\Rightarrow \quad e^{xy}d(xy)=b^y d(a^x)+a^x d(b^y)$$

$$\Rightarrow \quad e^{xy}[xdy+ydx]=a^x b^y[\ln a dx+\ln b dy]$$

$$\Rightarrow ydx+xdy=\ln a dx+\ln b dy$$

$$\Rightarrow \quad dy=\frac{\ln a-y}{x-\ln b}\cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\ln a-y}{x-\ln b}$$

解二 两边取对数得

$xy = x\ln a + y\ln b$　　两边对 x 求导，有

$$y + xy' = \ln a + y'\ln b$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\ln a - y}{x - \ln b} \qquad \Rightarrow \quad dy = \frac{\ln a - y}{x - \ln b} \cdot dx$$

由上面的例子还可以看出，求导数与求微分的方法在本质上并没有区别，因此把两者统称为**微分法**

八、 高阶微分

我们知道函数 $y=f(x)$ 的微分是 $dy=f'(x)dx.$

其中 $dx=\Delta x$ 相对于 x 来说是常数，因此如果函数

$y=f(x)$ 是二阶可导的，则有

$$d(dy)=d(f'(x)dx)=dxd(f'(x))+f'(x)d(dx)$$

$$=f''(x)(dx)^2=f''(x)dx^2.$$

或记作 $d^2y=f''(x)dx^2$

称为 $y=f(x)$ 的二阶微分.

一般地 $y=f(x)$ 的 n 阶微分是 $n-1$ 阶微分的微分．记作 $d^n y$ 即有

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n$$

注:高阶微分的记号中 $dx^n=(dx)^n$ 而 $d^n x$ 表示

x的n阶微分,$n>1$时,$d^n x=0$. $d(x^n)=nx^{n-1}dx$ 表示

x^n 的n阶微分.

九、微分在近似计算中的应用

1.计算函数的近似值

(1).求$f(x)$在点$x = x_0$附近的近似值;

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (|\Delta x|\text{很小时})$$

(2).求$f(x)$在点$x = 0$附近的近似值;

令 $x_0 = 0, \Delta x = x.$

$$\because f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

$$\therefore f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x.$$

2.常用近似公式 ($|x|$很小时)

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$; (2) $\sin x \approx x$ (x为弧度);

(3) $\tan x \approx x$ (x为弧度); (4) $e^x \approx 1+x$;

(5) $\ln(1+x) \approx x$.

证明 (1) 设 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$, $f'(x)=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}$,

$$f(0)=1,\ f'(0)=\frac{1}{n}.$$

$$\therefore f(x) \approx f(0)+f'(0)x = 1+\frac{x}{n}.$$