

一元函数导数与微分（数三）考研真题

一、选择题（将最佳答案的序号填写在括号内）

1. (03, 4分) 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数, 且 $f'(0)$ 存在, 则函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$
- (A) 在 $x=0$ 处左极限不存在. (B) 有跳跃间断点 $x=0$.
 (C) 在 $x=0$ 处右极限不存在. (D) 有可去间断点 $x=0$. []
2. (05, 4分) 以下四个命题中, 正确的是
- (A) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.
 (B) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.
 (C) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.
 (D) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界. []
3. (05, 4分) 当 a 取下列哪个值时, 函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$ 恰好有两个不同的零点.
- (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8. []
4. (06, 4分) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0, f''(x) > 0, \Delta x$ 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则 []
- (A) $0 < dy < \Delta y$ (B) $0 < \Delta y < dy$
 (C) $\Delta y < dy < 0$ (D) $dy < \Delta y < 0$
5. (06, 4分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(n^2)}{n^2} = 1$, 则

- (A) $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0)$ 存在 (B) $f(0) = 1$ 且 $f'_-(0)$ 存在
 (C) $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0)$ 存在 (D) $f(0) = 1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

6. (07, 4分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是 []

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
 (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
 (C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$ 存在
 (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$ 存在.

7. (07, 4分) 设某商品的需求函数 $Q = 160 - 2p$, 其中 Q, p 分别表示需要量和价格, 如果该商品需求弹性的绝对值等于 1, 则商品的价格是

(A) 10. (B) 20. (C) 30. (D) 40.

8. (10, 4分) 设 $f(x) = (\ln x)^{10}, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$, 则当充分大时有 []

(A) $g(x) < h(x) < f(x)$ (B) $h(x) < g(x) < f(x)$
 (C) $f(x) < g(x) < h(x)$ (D) $g(x) < f(x) < h(x)$

9. (11, 4分) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = []$$

(A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0

二、填空题

1. (03, 4分) 已知曲线 $y = x^3 - 3a^2x + b$ 与 x 轴相切, 则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

2、(06, 4分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某领域内可导, 且 $f'(x) = e^{f(x)}$, $f(2) = 1$,

则 $f'''(2) =$ _____

3、(07, 4分) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) =$ _____

4、(09, 4分) 设某产品的需求函数为 $Q=Q(P)$, 其对应价格 P 的弹性 $\zeta = 0.2$, 则

当需求量为 1000 件时, 价格增加 1 元会使产品收益增加 _____ 元。

5、(10, 4分) 设可导函数 $y = f(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-x^2} dx = \int_0^x x \sin^2 x dx$ 确定, 则

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____

6、(10, 4分) 设某商品的收益函数为 $R(p)$, 收益弹性为 $1+p^3$, 其中 p 为价格, 且 $R(1) = 1$,

则 $R(p) =$ _____

三、计算

1、(04, 9分) 设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$, 其中价格 $P \in (0, 20)$, Q 为需求量.

(I) 求需求量对价格的弹性 E_d ($E_d > 0$);

(II) 推导 $\frac{dR}{dP} = Q(1 - E_d)$ (其中 R 为收益), 并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时,

降低价格反而使收益增加.

2、(06, 7分) 在 XOY 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1, 0)$, 其上任意点 $P(x, y)$ ($x \neq 0$)

处的切线低斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$)

(I) 求 L 的方程:

(II) 当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值.

3、(08, 10分) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数,

(1) 证明对任意实数 t , 有 $\int_t^{t+2} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx$;

(2) 证明 $G(x) = \int_0^x \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s) ds \right] dt$ 是周期为 2 的周期函数.