第七章 实数的完备性

- 7.1 关于实数集完备性的基本定理
- 7.2 闭区间上连续函数性质的证明

7.1 实数完备性的基本定理

- 一、区间套定理与柯西收敛准则
- 二、聚点定理与有限覆盖定理

一、闭区间套定理

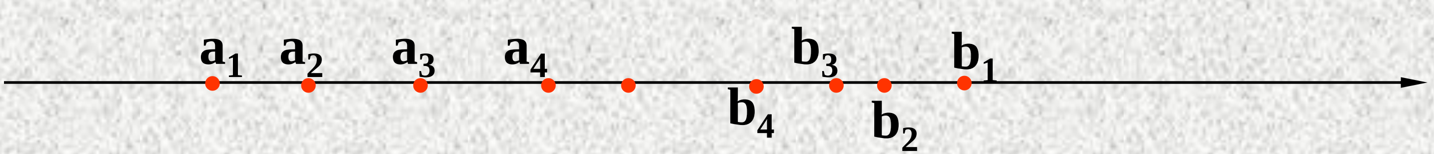
1.闭区间套

定义 1 如一列闭区间$\{[a_n,b_n]\}$ **满足**

（1） $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],\quad n=1,2,3,\quad \ldots$

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0,$

则称$\{[a_n,b_n]\}$形成一个闭区间套。简称区间套.



注 1　设$\{[a_n,b_n]\}$是一个区间套，则由条件(1)可知，

$$a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \left(n = 1,2,\cdots \right).$$

从而可以知道数列$\{a_n\}$单调递增，数列$\{b_n\}$单调递减．且由

$$a_n \le b_n \le \cdots \le b_1,\ \left(n = 1,2,\cdots \right),$$

可知$\{a_n\}$有上界，$\{b_n\}$有上界．

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b_n \le \cdots \le b_2 \le b_1.$$

注2 由注1可知, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在,因此由条件(2)可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2.闭区间套定理

定理 1 如果$\{[a_n,b_n]\}$ 形成一个闭区间套，则存在唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间，即

$$\xi \in [a_n,b_n] n=1,2,\cdots$$

且 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

推论 若 $\xi \in [a_n,b_n], n=1,2,\cdots$是闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$所确定的点，则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \ni \forall n > N, [a_n,b_n] \subset U(\xi;\varepsilon).$$

注1 区间套定理也可以为

定理 若 $\{[a_n,b_n]\}$ 为一个区间套, 则存在唯一的实数ξ, 使 $\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$.

注2 区间套定理要求区间列中的每个区间为闭区间, 对开区列 $\{(a_n,b_n)\}$ 即使

(1) $(a_{n+1},b_{n+1})\subset(a_n,b_n),\quad n=1,2,\cdots$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

区间套定理的结论不成立.

例 对开区间列 $\{(0,\frac{1}{n})\}$ 条件(1)与(2)满足,但

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,\frac{1}{n})=\varphi$$

但有定理 若 $\{(a_n,b_n)\}$ 满足(1)与(2),且有

$$(3)\quad a_n<a_{n+1},b_n<b_{n+1},n=1,2,\cdots$$

则存在唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间，即

$$\xi\in(a_n,b_n),n=1,2,\cdots$$

用区间套定理证明柯西收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是:对任意ε>0,存在正整数N,对一切 m,n>N ,有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

二、聚点定理

定义 设S为数轴上的点集, ξ为定点(它可以属于S也,可以不属于S)若ξ的任何邻域内都含有S的无穷多个点,则称ξ为S的聚点.

聚点的等价定义:

ξ为点集S的聚点的充要条件是, 是对点ξ的任何邻域 $U(\xi,\delta)$ 都含有S中异于ξ的点,即

$$U(\xi,\delta)\cap(S-\{\xi\})\neq\varphi\ .$$

ξ为点集S的聚点的充要条件是,存在各项互异的收敛数列$\{x_n\}$满足:

(1)$\{x_n\}\subset S$;

(2)其极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

定理1 (Weierstrass聚点定理)

实轴上任一有界无限点集 S至少有一个聚点.

证明

因S为有界点集，故$\exists M>0$，使得$S\subset[-M,M]$，记$[a_1,b_1]=[-M,M]$

现将$[a_1,b_1]$等分为两个区间，因S为无限点集，故两个区间中至少有一个含有S中无穷多个点，记此子区间为 $[a_2,b_2]$，则

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2], \text{且 } b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=M.$$

将$[a_2,b_2]$等分成两个子区间，则其中至少有一个子区间含有S中无穷多个点，记其为$[a_3,b_3]$，则

$$[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3], \text{且 } b_3-a_3=\frac{1}{2}(b_2-a_2)=\frac{M}{2}.$$

无限进行，则得区间列$\{[a_n,b_n]\}$，满足

$$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],\ \ n=1,2,\cdots,$$

$$b_n-a_n=\frac{M}{2^{n-1}}\to 0,\ \ (n\to\infty),$$

即$\{[a_n,b_n]\}$是区间套，且其中每个闭区间都含有S中无穷多外点.

由区间套定理及推论，

$$\exists|\xi\in[a_n,b_n],n=1,2,\cdots,\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N\text{有}[a_n,b_n]\subset U(\xi;\varepsilon).$$

即$U(\xi;\varepsilon)$内含有S中无穷多个点，

从而ξ为S的一个聚点. 证毕.

• **推论(致密性定理)**　**有界数列必含有收敛子列.**

三、有限覆盖定理

定理2 (Heine-Borele 有限覆盖定理)

设**H**为闭区间 **[a,b]**的一个**(**无限**)**开覆盖**,**则从**H**中可选出有限个开区间来覆盖**[a,b].**

7.2 闭区上连续函数性质的证明

- 一、有界性定理
- 二、最大最小值定理
- 三、介值定理
- 四、一致连续性定理

一、有界性定理

定理 若函数f(x)在闭区间[a,b]上连续,则f(x)在[a,b]上有界.

证明:(1)(应用有限覆盖定理)由连续函数的局部有界性,对任意$x'\in[a,b]$,存在偏邻域 $U(x',\delta_{x'})$ 及正数$M_{x'}$ 使得

$$|f(x)|\le M_{x'},\ x\in U(x',\delta_{x'})\cap[a,b]$$

考虑开区间集合

$$H=\{U(x',\delta_{x'})\mid x'\in[a,b]\}$$

显然H是[a,b]的一个无限开覆盖,由有限覆盖定理,存在H

的有限子覆盖:

$$H^{*}=\{U(x_i,\delta_{x_i})\mid x_i\in[a,b],i=1,2,\cdots,n\}$$

也覆盖了[a,b],且存在正数 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 使对一切

$x\in U(x_i,\delta_{x_i})\cap[a,b]$ 有 $|f(x)|\le M_i,i=1,2,\cdots,n$

令 $M=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_n\}$,则对任意x∈[a,b],有

$|f(x)|\le M$ 即f(x)在[a,b]上有界.

证明(2) (应用致密性定理)若f(x)在[a,b]上无界,则对任意正整数n,存在$x_n \in [a,b]$,使f(x)>n.从而存在数列$\{x_n\} \subset [a,b]$由致密性定理,存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$

则$x_0 \in [a,b]$,由f(x)在[a,b]上连续可知$f(x_0)$有限,另一方面

由于$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \geq \lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$. 矛盾.

二、最大最小值定理

定理 若函数f(x)在闭区间[a,b]上连续,则f(x)在[a,b]上有最大值与最小值.

证明: (应用确界原理)由于已证明f(x)在[a,b]上有界,由确界原理, f([a,b])有上确界.记上确界为M,下面证明存在ξ∈[a,b],使f(ξ)=M.若不然,不妨设对一切x∈[a,b],有f(x)<M,

令

$$g(x)=\frac{1}{M-f(x)}, x\in[a,b]$$

则g(x)在[a,b]上连续,从而g(x)在[a,b]上有上界,设G是g(x)在[a,b]上的一个上界,即

$$0 < g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \le G, x \in [a, b]$$

从而有

$$f(x) \le M - \frac{1}{G}, x \in [a, b]$$

这与M是f(x)在[a,b]上的上确界矛盾,故存在ξ∈[a,b],使

f(ξ)=M.

三、介值定理

定理 若函数f(x)在闭区间[a,b]上连续,且 $f(a)\neq f(b)$ 若μ为介于f(a)与f(b)之间的任意值,则存在 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)=\mu.$

证明: (1) (应用确界原理)不妨设f(a)< μ <f(b),令

$$g(x)=f(x)-\mu$$

则g(x)也在闭区间[a,b]上连续,且g(a)<0,g(b)>0,从而所证结论转化为证明存在 $x_0\in(a,b)$ 使 $g(x_0)=0.$ 记

$$E=\{x\mid g(x)>0,x\in[a,b]\}$$

显然E为非空有界数集,($E\subset[a,b]$且$b\in E$),由确界原理,E有下确界,记$x_0=\inf E$,由$g(a)<0$,$g(b)>0$,根据连续函数的局部保号性定理,存在$\delta>0$,在$[a,a+\delta)$上,$g(x)<0$,在$(b-\delta,b]$上$g(x)>0$,所以

$x_0\in(a,b)$

下证$g(x_0)=0$,若不然,不妨设$g(x_0)>0$,再由局部保号性定理,

存在 $U(x_0,\eta)\subset(a,b)$ 对任意 $x\in U(x_0,\eta), g(x)>0$

特别地由 $g(x_0-\frac{\eta}{2})>0\Rightarrow x_0-\frac{\eta}{2}\in E$ 这与$x_0=\inf E$矛盾.

所以必有$g(x_0)=0$.

证明(2)(应用区间套定理)前一部分证明同(1),即证明:若g(x)在闭区间[a,b]上连续,且g(a)<0,g(b)>0,则存在$x_0 \in (a,b)$使 $g(x_0)=0$.

将[a,b]等分为两个小区间[a,c]和[c,b],若g(c)=0,则c为所求,若g(c)≠0,则当g(c)>0时,记$[a_1,b_1]=[a,c]$,当g(c)<0时,记$[a_1,b_1]=[c,b]$,于是有$g(a_1)<0$,$g(b_1)>0$,且$[a_1,b_1]\subset[a,b]$,和

$$b_1-a_1=\frac{b-a}{2}.$$

再从区间$[a_1,b_1]$出发,重复以上过程,得到:或者在$[a_1,b_1]$的中

点c_1上有$g(c_1)=0$,或者有区间$[a_2,b_2]$,满足:$g(a_2)<0$,$g(b_2)>0$,且

$$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1],b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{b-a}{2^2}.$$

将以上过程重复下去,可能出现两种情形:

(1) 存在某一区间的中点c_i,有$g(c_i)=0$,则c_i为所求;

(2) 在任一区间的中点c_i,有$g(c_i)\neq 0$,则得到一个闭区间列

$\{[a_n,b_n]\}$满足:$g(a_n)<0$,$g(b_n)>0$以及

$$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n},n=1,2,\cdots$$

由区间套定理,存在 $x_0 \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$ 下证$g(x_0)=0$.

若$g(x_0)\neq 0$,不妨设$g(x_0)>0$,由连续函数的局部保号性,存在 $U(x_0, \delta)$, 在其内有$g(x)>0$,由区间套定理的推论,当n充分大时有 $[a_n, b_n] \subset U(x_0, \delta)$ 因而有$g(a_n)>0$,这与$g(a_n)<0$矛盾,

故必有$g(x_0)=0$.

四、一致连续性定理

定理 若函数f(x)在闭区间[a,b]上连续,则f(x)在闭区间[a,b]上一致连续.

证明 (应用有限覆盖定理)由于f(x)在闭区间[a,b]上连续,对任意ε>0,对任意x∈[a,b],都存在δ_x>0,使得对任意$x' \in U(x,\delta_x)$ 有

$$|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

考虑开区间集合

$$H = \{U(x,\frac{\delta_x}{2}) \mid x \in [a,b]\}$$

显然H是[a,b]的一个开覆盖,因此存在H的有限子集

$$H^* = \{U(x_i, \frac{\delta_i}{2}) \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$$

覆盖了[a,b],记 $\delta = \min\limits_{1 \le i \le n}\{\frac{\delta_i}{2}\}$ 对任意 $x', x'' \in [a,b]$ 只要

$|x' - x''| < \delta$ 必存在i,使 $x' \in U(x_i, \frac{\delta_i}{2})$ 即 $|x' - x_i| < \frac{\delta_i}{2}$

此时 $|x' - x''| \le |x' - x_i| + |x_i - x'| < \delta + \frac{\delta_i}{2} < \frac{\delta_i}{2} + \frac{\delta_i}{2} = \delta_i$

故有 $|f(x') - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x'') - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$

由此有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$ 即f(x)在闭区间[a,b]上一致

连续.