导数与微分（数一）考研真题

一、选择题（将最佳答案的序号填写在括号内）

1. （02 年，3 分）设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则（　　）

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$.

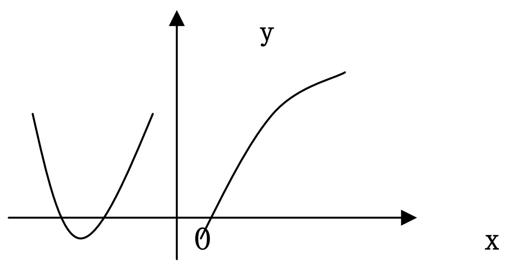
2.（03 年，4 分）设函数 f(x) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 f(x) 有（　　）

(A) 一个极小值点和两个极大值点.

(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.

(D) 三个极小值点和一个极大值点.



3.（05 年，4 分）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（　）

(A) 处处可导　　(B) 恰有一个不可导点

(C) 恰有两个不可导点　　(D) 至少有三个不可导点

4.（95 年，3 分）设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是（　　）

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

5.（95 年，3 分）设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导的（　　）

(A) 充分必要条件　　(B) 充分条件但非必要条件

(C) 必要条件但非充分条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

6.（96 年，3 分）设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则（　　）

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

7.（96 年，3 分）设 $f(x)$ 有连续的导数，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$，

且当 $x\to 0$ 时 $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 k 等于（　　）

$(A)\,1$　　$(B)\,2$　　$(C)\,3$　　$(D)\,4$

8.（98 年，3 分）函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数是（　　）

$(A)\,3$　　$(B)\,2$　　$(C)\,1$　　$(D)\,0$

9.（00 年，3 分）设 $f(x)$，$g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，

则当 $a<x<b$ 时，有（　　）

(A)　$f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　(B)　$f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C)　$f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　(D)　$f(x)g(x)>f(a)g(a)$

10.（01 年，3 分）设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为（　　）

(A)　$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$　存在　　(B)　$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$　存在

(C)　$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$　存在　　(D)　$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$　存在

11.（06 年，3 分）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，

Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的

增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（　　）

(A)　$0<dx<\Delta y$　　(B)　$0<\Delta y<dy$

(C)　$\Delta y<dy<0$　　(D)　$dy<\Delta y<0$

12.（07 年，4 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是

（　　）

(A)　若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则　$f(0)=0$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则　$f'(0)$　存在

(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则　$f'(0)$　存在

二、填空题

1.（02 年，3 分）已知函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$ __________

三、证明与讨论题

1.（2002 年，6 分，数一）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

2.（94 年，5 分）设 $\begin{cases} x=\cos(t^2) \\ y=t\cos(t^2)-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,du \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$ 在 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 的值。

3.（04 年，9 分）设某商品的需求函数为 $Q=100-5P$，其中价格 $P\in(0,20)$，Q 为需求量。（1）求需求量对价格的弹性 E_d（$E_d>0$）；（2）推导 $\frac{dR}{dP}=Q(1-E_d)$（其中 R 为收益），并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加

四、与导数有关的综合题

1.（96 年，7 分）设对任意 $x>0$，曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切

线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$，求 $f(x)$ 的一般表达式。

2.（96 年，8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且满足条件 $|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b$，其中 a,b 都是非负常数，c 是 $(0,1)$ 内任意一点，证明 $|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}$

3.（97 年，6 分）设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A(A\text{为常数})$，求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

4.（98 年，6 分）设 $y=f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.（1）试证存在 $x_0\in(0,1)$，使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积，等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的梯形面积。（2）又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，证明（1）中的 x_0 是唯一的。

5.（99 年，6 分）试证：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$。

6.（00 年，6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$ 试证：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1，ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。

7.（01 年，7 分）设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\ne 0$，试证：

（1）对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x\ne 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$$

成立；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$。

8.（05 年，12 分）已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 f(0)=0, f(1)=1.

证明：（I）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

（II）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

9.（08 年，10 分）函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，证明 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$.

10.（95 年，8 分）假设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，并且 $g''(x)\ne 0, f(a)=f(b)=g(a)=g(b)$，试证：（1）在开区间 (a,b) 内 $g(x)\ne 0$.（2）在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

11.（07 年，11 分）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$。证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$。

12.（95 年，3 分）$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^0 x\cos t^2dt=$ ______________ .