第十四章　幂级数

- 一、基本内容
- 1 、幂级数
- (1) 、幂级数的性质
- (2) 、幂级数的运算
- 2、 函数的幂级数展开
- (1) 、泰勒级数
- (2) 、初等函数的幂级数展开式
- 二、<u>研究幂级数的目的与要求</u>
- 充分理解函数$f(x)$的Taylor级数和Maclaurin级数的概念； 掌握函数$f(x)$的Taylor公式；熟练掌握函数可以幂级数展开的条件；会用直接法和间接法求函数的幂级数展开)； 熟练掌握幂级数的内闭一致收敛性、和函数的性质(连续性、可积性、可微性) ； 会求比较简单的幂级数的和函数。幂级数在级数理论中有着特殊的地位, 在函数逼近和近似计算中有重要应用, 特别是函数的幂级数展开为研究非初等函数提供了有力的工具.
- 三、重点与难点
- 重点：幂级数的收敛区间、展开式；
- 难点：收敛区间端点处敛散性的判别

§14.1　幂级数

- 1、幂级数的收敛区间
- 2、幂级数的性质
- 3、幂级数的运算

1、幂级数的收敛区间

幂级数的一般形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots, \quad (1)$$

为方便起见，下面将重点讨论 $x_0 = 0$，即

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (2)$$

的情形. 因为只要把(2)中的 x 换成 $x-x_0$，就得到(1).

定理14.1（阿贝耳定理） 若幂级数(2)在 $x=\bar{x}\neq 0$ 收敛, 则对满足不等式 $|x|<|\bar{x}|$ 的任何 x , 幂级数(2)收敛而且绝对收敛; 若幂级数(2)在 $x=\bar{x}$ 时发散, 则对满足不等式 $|x|>|\bar{x}|$ 的任何 x , 幂级数(2)发散.

为幂级数(2)的收敛区间. 怎样求得幂级数(2)的收敛半径和收敛区间呢?

定理14.2 对于幂级数(2), 若

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho, \tag{3}$$

则当

(i) $0<\rho<+\infty$ 时, 幂级数(2)的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$;

(ii) $\rho=0$ 时, 幂级数(2)的收敛半径 $R=+\infty$;

(iii) $\rho=+\infty$ 时, 幂级数(2)的收敛半径 $R=0$.

注 由定理14.2可知，一个幂级数的收敛域等于它的收敛区间再加该区间端点中使幂级数收敛的点.

在第十二章 § 2第二段曾经指出：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$,
则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$. 因此也可用比式判别法来得出幂级数(2)的收敛半径. 究竟用比式法还是根式法，可以参考第十二章的相关说明.

前页 后页 返回

例1 级数 $\sum \frac{x^n}{n^2}$, 由于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1 (n \to \infty)$,

所以其收敛半径 $R = 1$, 即收敛区间为 $(-1, 1)$; 而当

$x = \pm 1$时, 有 $\left|\frac{(\pm 1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$, 由于级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所

以级数 $\sum \frac{x^n}{n^2}$ 在 $x = \pm 1$时也收敛. 于是级数 $\sum \frac{x^n}{n^2}$

的收敛域为$[-1, 1]$.

例2 设有级数

$$x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots, \qquad (4)$$

由于 $$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,$$

因此幂级数(4)的收敛区间是$(-1,1)$．但级数 (4) 当 $x=1$时发散，$x=-1$时收敛，从而得到级数(4)的收敛域是半开区间 $[-1,1)$．照此方法，容易验证级数

$$\sum\frac{x^n}{n!} \quad 与 \quad \sum n!\,x^n$$

的收敛半径分别为$R=+\infty$与$R=0$.

前页 后页 返回

*定理14. 3（柯西–阿达玛（Cauchy-Hadamard）定理）

对于幂级数(2)，设

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}, \tag{5}$$

则有

(i) 当 $0 < \rho < +\infty$ 时，收敛半径 $R = \dfrac{1}{\rho}$；

(ii) 当 $\rho = 0$ 时，$R = +\infty$；

(iii) 当 $\rho = +\infty$ 时，$R = 0$.

注 由于上极限(5)总是存在，因而任一幂级数总能由(5)式得到它的收敛半径.

2、幂级数(2)的一致收敛性问题.

定理14. 4 若幂级数(2)的收敛半径为 $R>0$, 则在它 $x=R$ (或 $x=-R$)时收敛, 则级数(2)在 $[0, R]$ (或 $[-R, 0]$)上一致收敛.

定理14. 5 若幂级数 (2) 的收敛半径为 $R>0$, 且在的收敛区间 $(-R, R)$ 内任一闭区间 $[a, b] \subset (-R, R)$ 上, 级数(2)都一致收敛.

例3 级数

$$\sum\frac{(x-1)^n}{2^n n}=\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2\cdot 2}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{2^n n}+\cdots,\quad (6)$$

由于
$$\frac{\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)}}{\dfrac{1}{2^n n}}=\frac{n}{2(n+1)}\to\frac{1}{2}\quad (n\to\infty),$$

所以级数(6)的收敛半径$R=2$，从而级数(6)的收敛区间为$|x-1|<2$即$(-1,3)$.

前页 后页 返回

当 $x=-1$时，级数(6)为收敛级数

$$\sum\frac{(-2)^n}{2^n n}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}+\cdots.$$

当 $x=3$ 时， 级数(6)为发散级数

$$\sum\frac{2^n}{2^n n}=\sum\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$$

于是级数(6)的收敛域为[−1, 3).

3、幂级数的性质

根据一致收敛函数项级数的性质即可以得到幂级数的一系列性质. 由定理14.4、14.5和13.12立刻可得

定理14.6 (i) 幂级数(2)的和函数是$(-R, R)$内的连续函数; (ii)若幂级数(2)在收敛区间的左(右)端点上收敛, 则其和函数也在这一端点上右(左)连续.

在讨论幂级数的逐项求导与逐项求积之前, 先来确定幂级数(2)在收敛区间 $(-R, R)$ 内逐项求导与逐项

求积后得到的幂级数

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \tag{7}$$

与

$$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots \tag{8}$$

的收敛区间.

定理14.7 幂级数(2)与幂级数(7)、(8)具有相同的收敛区间.

根据比式判别法可知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ 收敛. 由级数的比较原则及上述不等式, 就推出幂级数(7)在点 x_0 绝对收敛(当然也是收敛的!). 由于 x_0为$(-R, R)$中任一点, 这就证明了幂级数(7)在$(-R, R)$上收敛.

其次证明幂级数(7)对一切满足不等式$|x|>R$的x都不收敛.

如若不然, 幂级数(7)在点 $x_0(|x_0|>R)$ 收敛, 则存在

定理14. 8 设幂级数(2)在收敛区间$(-R, R)$上的和函数为f，若x为$(-R, R)$内任意一点，则

(i) f在x可导，且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1};$$

(ii) f在区间$[0, x]$上可积，且

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

推论1 设 f 为幂级数(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 上的和函数, 则在 $(-R, R)$ 上 f 具有任意阶导数, 且可任意次逐项求导, 即

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1} x + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

推论2 设 f 为幂级数(2)在 $x=0$ 某邻域内的和函数, 则级数(2)的系数 $a_n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 与 f 在 $x=0$ 处的各阶导数有如下关系:

$$a_0=f(0),\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\quad (n=1,2,\cdots).$$

注 推论2还表明, 若级数(2)在 $(-R,R)$ 上有和函数 f, 则级数(2)由 f 在 $x=0$ 处的各阶导数所惟一确定.

这是一个非常重要的结论, 在后面讨论幂级数展开时要用到.

4、幂级数的运算

定理14.9 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $x=0$ 的某邻域内有相同的和函数, 则它们同次幂项的系数相等, 即

$$a_n = b_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

这个定理的结论可直接由定理14. 8的推论2得到.

根据这个推论还可推得: 若幂级数(2)的和函数为奇(偶)函数, 则(2)式不出现偶(奇)次幂的项.

定理14. 10 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b, 则有

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n, |x| < R_a,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, |x| < R,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, |x| < R,$$

式中 λ 为常数, $R = \min\{R_a, R_b\}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

前页 后页 返回

定理的证明可由数项级数的相应性质推出.

例4 几何级数在收敛域$(-1,1)$内有

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots. \quad (9)$$

对级数(10)在$(-1,1)$内逐项求导得

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots, \quad (10)$$

$$f''(x)=\frac{2!}{(1-x)^3}=2+3\cdot 2x+\cdots+n(n-1)x^{n-2}+\cdots, \quad (11)$$

前页 后页 返回

将级数(10)在$[0, x]$ $(x<1)$上逐项求积得到

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt,$$

所以

$$\ln\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad (|x|<1). \quad (12)$$

上式对$x=-1$也成立(参见本节习题3). 于是有

$$\ln\frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdots + \frac{(-1)^n}{n} + \cdots,$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots.$$

从这个例子可以看到: 由已知级数(10)的和函数, 通过逐项求导或逐项求积可间接地求得级数(10)、(11)或(12)的和函数.

例5 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$的和函数.

- **小结**
- 1、幂级数的性质
- 2 、幂级数的运算

§14.2　函数的幂级数展开

1、泰勒级数
2、初等函数的幂级数展开式

1、泰勒级数

设函数 f 在 $x=x_0$ 处存在任意阶导数，就

可以由函数 f 得到一个幂级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots, \qquad (1)$$

通常称 (1) 式为 f 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数. 对于级数 (1)是否能在点 x_0 附近确切地表达 f，或者说级数(1)

在点 x_0 附近的和函数是否就是 f 本身, 这就是本节所要着重讨论的问题.

定理14.11 设 f 在点 x_0 具有任意阶导数, 那么 f 在区间 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 上等于它的泰勒级数的和函数的充分条件是: 对一切满足不等式 $|x - x_0| < r$ 的 x, 有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

这里 $R_n(x)$ 是 f 在点 x_0 泰勒公式的余项.

2、初等函数的幂级数展开式

例1 求k次多项式函数

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_kx^k$$

的幂级数展开式.

例2 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的幂级数展开式.

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots, x\in(-\infty,+\infty).$$

例3 函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 的各阶导数是

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

所以 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林级数是

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots. \qquad (2)$$

用比式判别法容易求得级数(2)的收敛半径 $R=1$, 且当 $x=1$ 时收敛, $x=-1$ 时发散, 故级数(2)的收敛域是 $(-1,1]$. 下面讨论在 $(-1,1]$ 上它的余项的极限.

当 $0\le x\le 1$ 时, 对拉格朗日型余项, 有

$$|R_n(x)|=\left|\frac{1}{(n+1)!}(-1)^n\frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}\right|$$

$$=\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}\right|\le\frac{1}{n+1}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

前页 后页 返回

当 $-1 < x < 0$ 时, 因拉格朗日型余项不易估计, 故改用柯西型余项. 此时有

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{n!}(-1)^n \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}(1-\theta)^n x^{n+1}\right|$$

$$= \frac{1}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n |x|^{n+1},\ 0 \le \theta \le 1.$$

因 $-1 < x < 0$, 故 $1-\theta \le 1+\theta x$, 即 $0 \le \dfrac{1-\theta}{1+\theta x} \le 1.$

所以 $|R_n(x)| \le \dfrac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0\ (n \to \infty).$

前页 后页 返回

这就证得在 $(-1,1]$ 上 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式就是 (2). 将(2)式中 x 换成 $x-1$, 就得到函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x=1$ 处的泰勒展开式:

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\cdots,$$

其收敛域为 $(0,2]$.

例4 对于正弦函数 $f(x)=\sin x$, 有

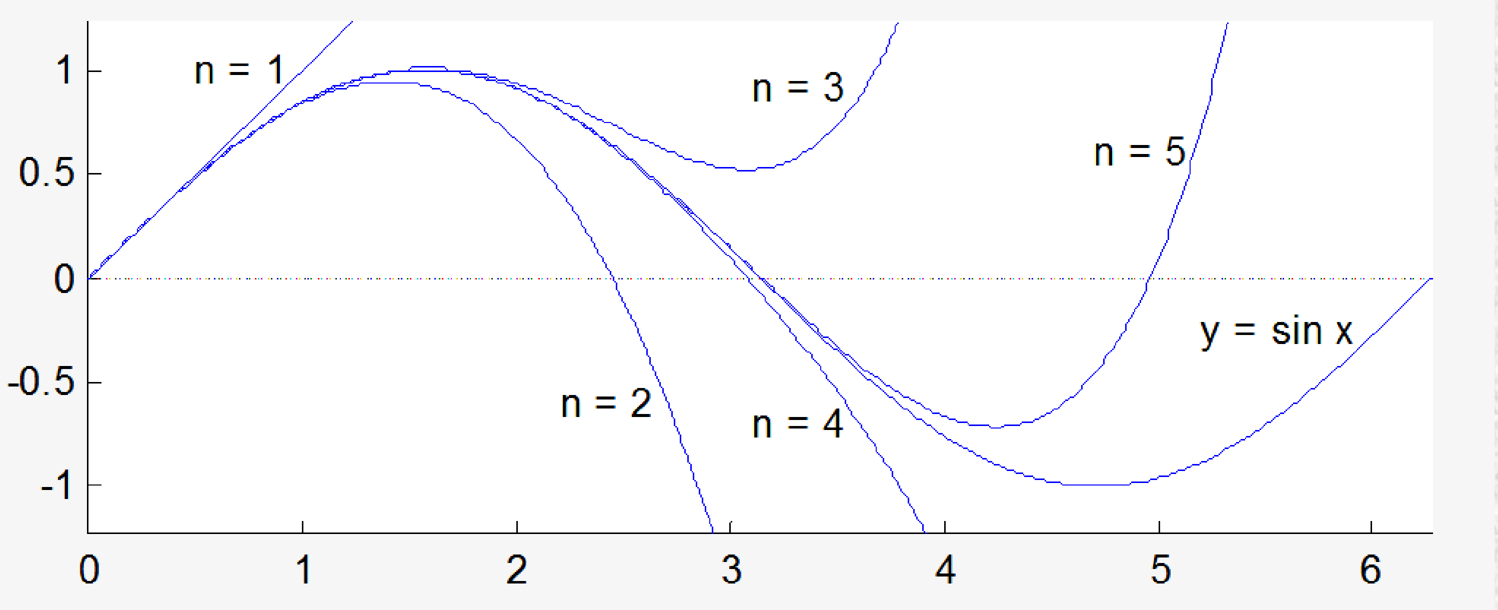
$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).\ n=1,2,\cdots.$$

现在考察 f 的拉格朗日型余项 $R_n(x)$. 因为 $n\to\infty$ 时,

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0,$$

所以 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可以展开为麦克劳林级数:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots.$$



同样可证(或用逐项求导), 在$(-\infty,+\infty)$上有

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

例5讨论二项式函数 $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ 的展开式.

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots \qquad (3)$$

对于收敛区间端点的情形，与α的取值有关，其结论如下：当$\alpha \le -1$时, 收敛域为$(-1,1)$;

当$-1 < \alpha < 0$时, 收敛域为$(-1,1]$;

当$\alpha > 0$时, 收敛域为$[-1,1]$.

当(7)式中$\alpha=-1$时就得到

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,\ x\in(-1,1).\quad (4)$$

当$\alpha=-\frac{1}{2}$时得到

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots,\ x\in(-1,1].\ (5)$$

一般来说, 只有比较简单的函数, 其幂级数展开式能直接从定义出发, 并根据定理14.11求得. 更多的情况是从已知的展开式出发, 通过变量代换、四则运

算或逐项求导、逐项求积等方法，间接地求得函数的幂级数展开式.

注 求一个函数的幂级数展开式就是确定该幂级数各项的系数，根据展开式的惟一性，不管用什么方法得到的系数都是一样的. 这就是间接展开的根据.

例6 以 x^2 与 $-x^2$ 分别代入(8)与(9)式，可得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots,(-1,1), \qquad (6)$$

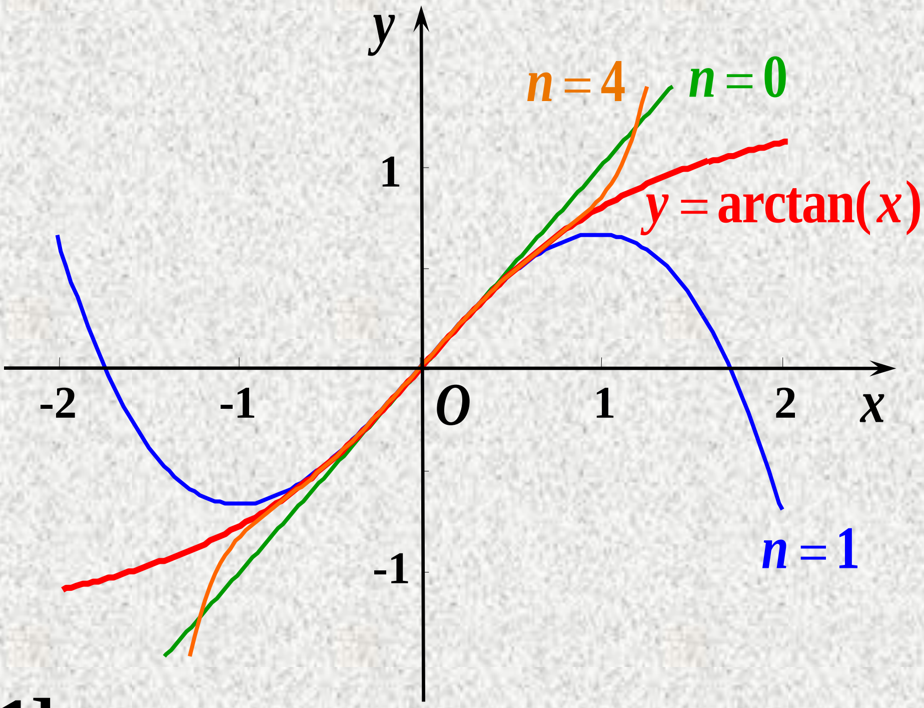
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\cdots,\ (-1,1). \qquad (7)$$

对于(6)、(7)分别逐项求积可得函数 $\arctan x$ 与 $\arcsin x$ 的展开式:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

$$+(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, [-1, 1],$$



前页 后页 返回

$$\arcsin x=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots,[-1,1].$$

由此可见，熟练掌握某些初等函数的展开式，对求其他一些函数的幂级数展开式是非常方便和有用的，特别是例3 ～例7 的结果，对于今后用间接方法求幂级数展开十分方便.

最后举例说明怎样用幂级数形式表示某些非初等函数，这是幂级数特有的功能.

例7 用间接方法求非初等函数

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$$

的幂级数展开式.

解 以 $-x^2$ 代替 e^x 的展开式中的 x，得

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+\cdots, -\infty<x<+\infty.$$

再逐项求积, 就得到 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的展开式:

$$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = x-\frac{1}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^5}{5}+\cdots$$

$$+\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.$$