第五章　定积分及其应用

主要内容：

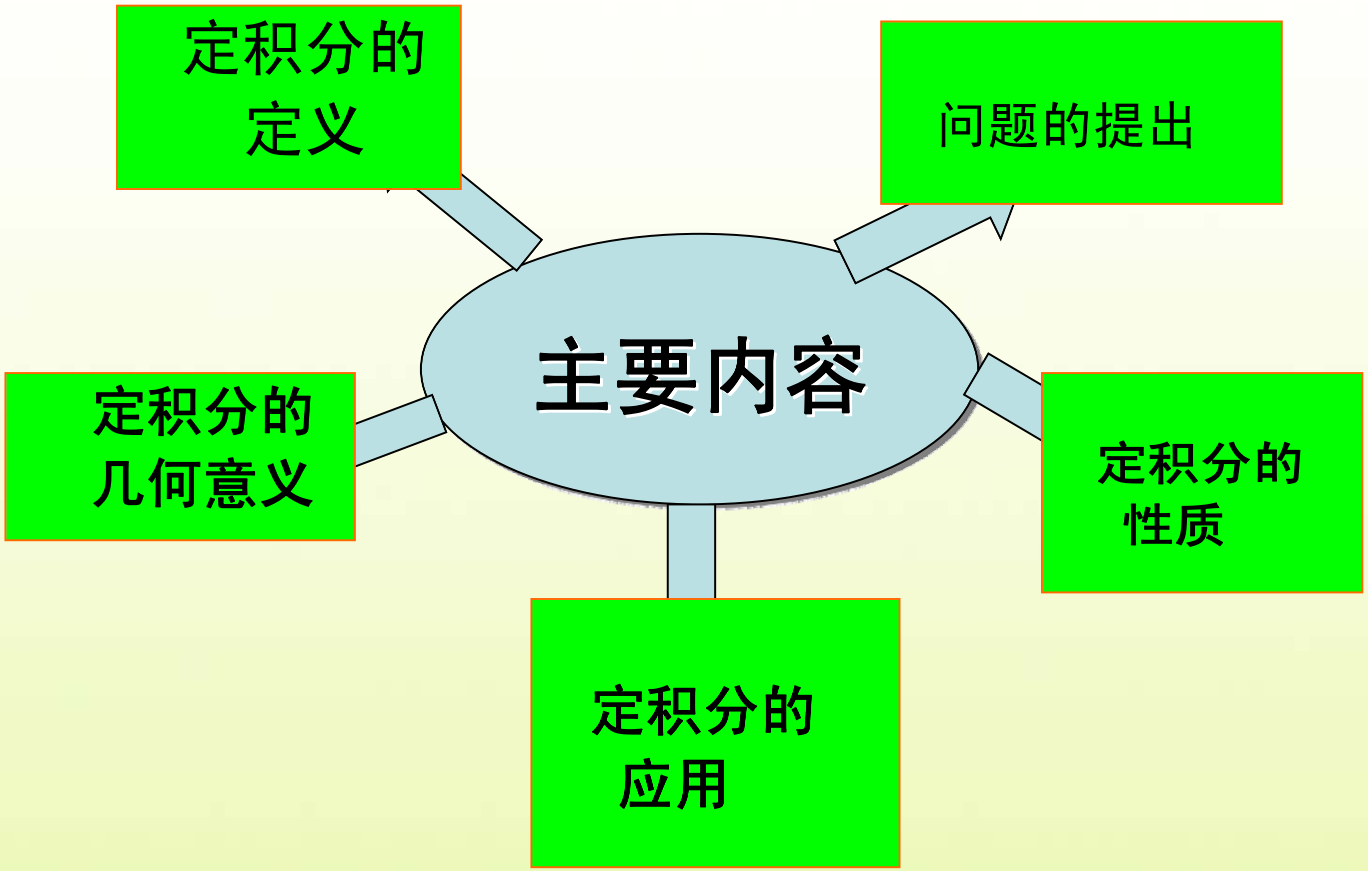
一、定积分的概念与性质

二、微积分基本公式

三、定积分的求法

四、定积分的应用

§5.1　定积分的概念与性质



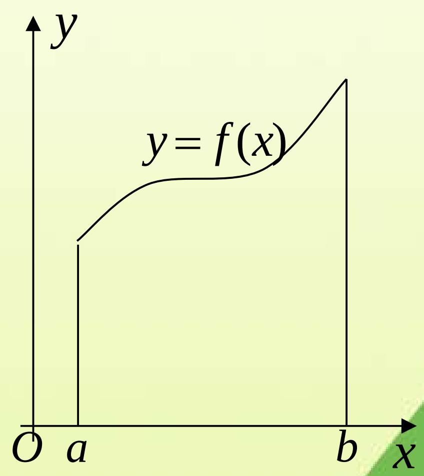
一、问题的提出

1.　曲边梯形

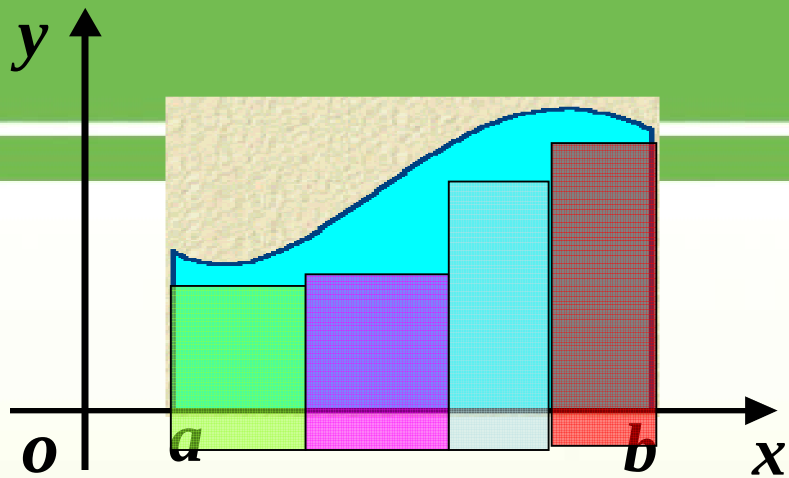
设 $y = f(x)$为区间$[a, b]$上连续函数，且$f(x) > 0$，

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$， $x = b$, $y = 0$

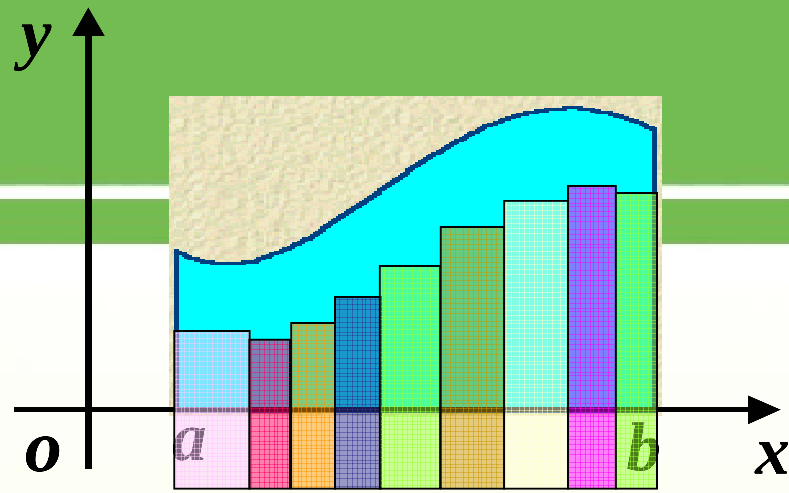
所围成的图形称为曲边梯形



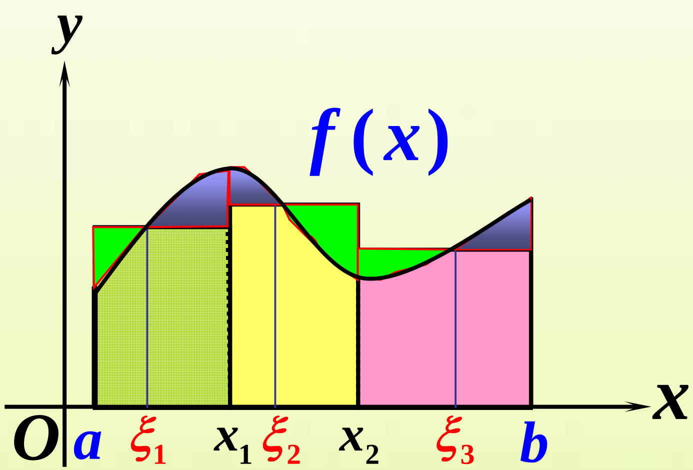
2.　问题：如何求曲边梯形的面积？

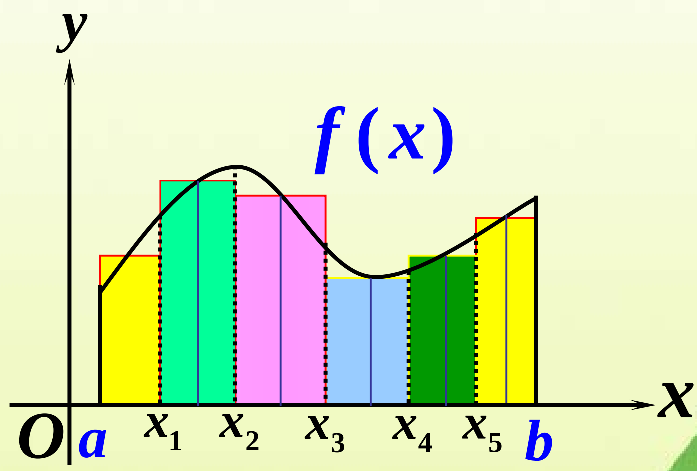


（四个小矩形）

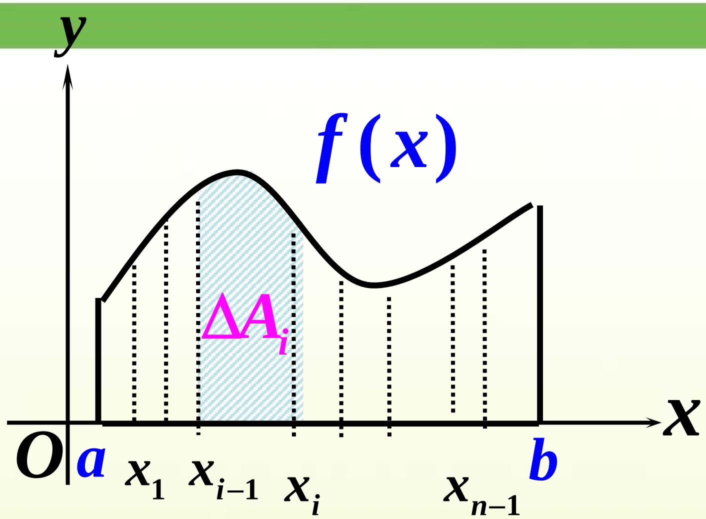


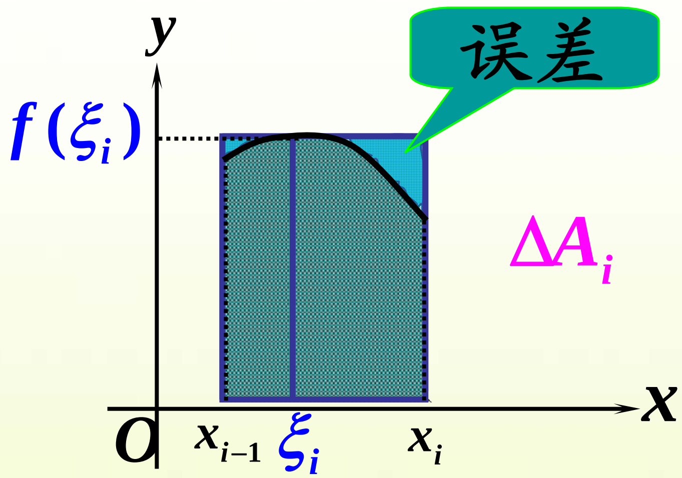
（九个小矩形）





$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$越小，误差越小





$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

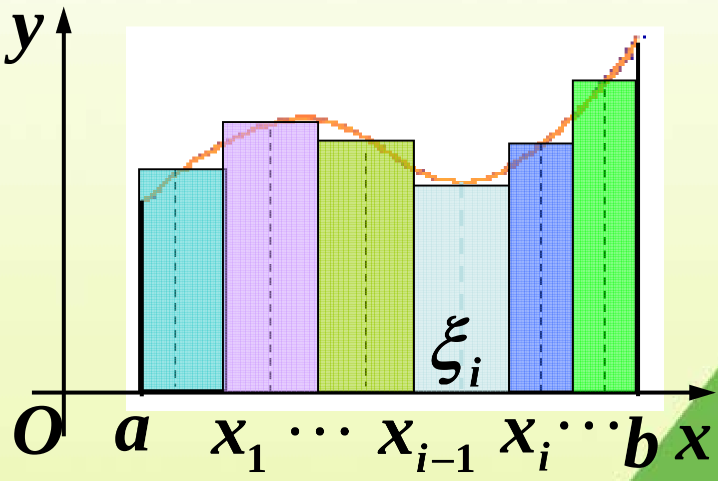
$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\times \Delta x_i$$

令 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \to A \quad (\lambda \to 0)$$

取极限 (由近似到精确)

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



二、定积分的定义

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将区间 $[a,b]$ 划分为 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 各个小区间的长度依次为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$（$i=1,2,\cdots,n$），并求和

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$

如果不论对区间 $[a,b]$ 怎样划分，也不论 $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ 怎样选取，只要 $\lambda \to 0$ 时，

$$\lim_{\lambda\to 0} S_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$ 总存在都为 I

则称 I 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)dx = I = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

积分上限

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分和

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

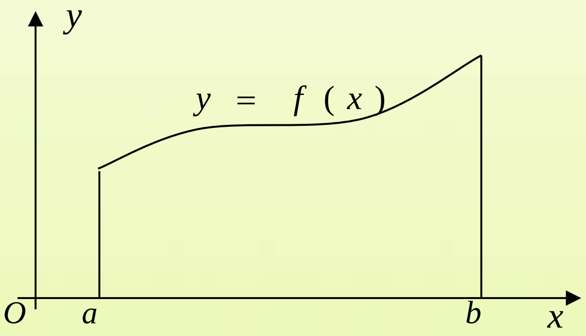
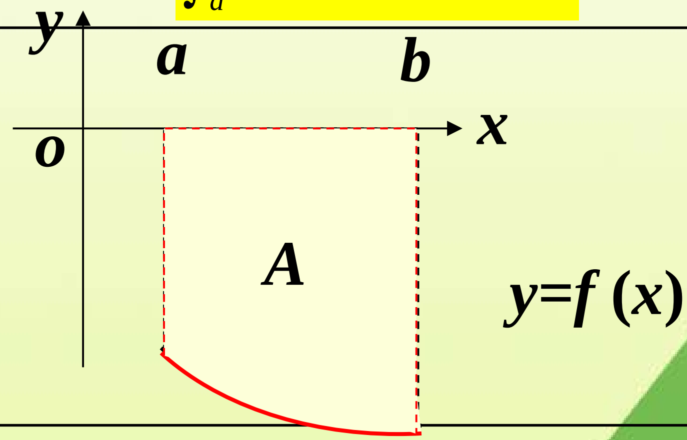
$[a,b]$积分区间

求总量的数学模型，在不同的领域有不同的应用

比　　较

定积分	不定积分
（1） 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数量.	（1）不定积分 $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的所有原函数
(2) 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 只与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a,b]$ 有关, 与积分变量记号无关 即 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$	(2) 不定积分 $\int f(x)dx$ 只与被积函数 $f(x)$ 和积分变量记号有关. 即： 若 $\int f(x)dx = F(x)+C$，则 $\int f(u)du = F(u)+C$

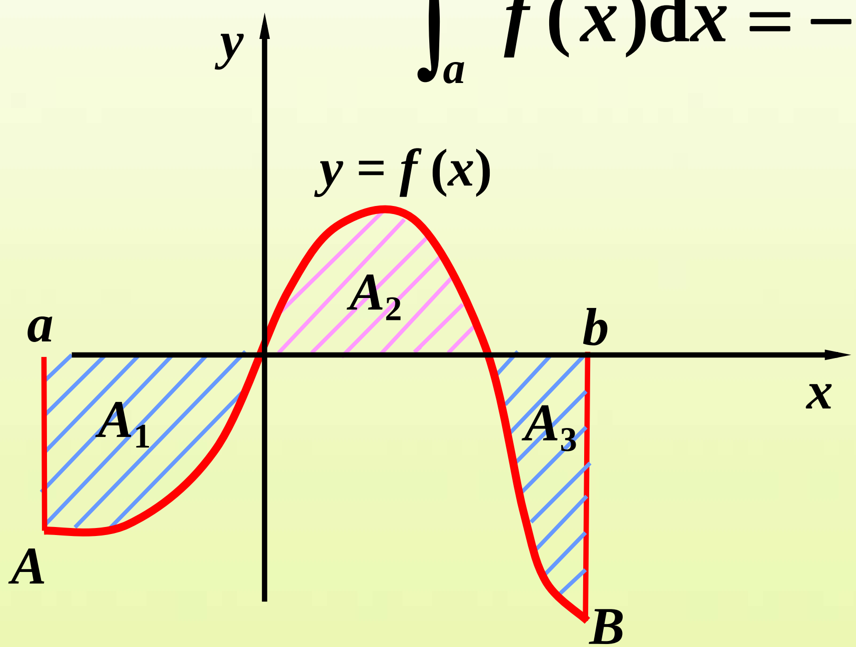
三、定积分的几何意义

（1） 在区间$[a,b]$上 $f(x)\geq 0$时	（2） 在区间$[a,b]$上 $f(x)\leq 0$时
定积分$\int_a^b f(x)dx$在几何上表示 曲线$y=f(x)$、直线$x=a$、 $x=b$与x轴 围成的曲边梯形的面积 $\int_a^b f(x)dx = A > 0$	定积分$\int_a^b f(x)dx$在几何上表示 曲线$y=f(x)$、直线$x=a$、 $x=b$与x轴 围成的曲边梯形的面积的负值 $\int_a^b f(x)dx = -A < 0$
	

三、定积分的几何意义

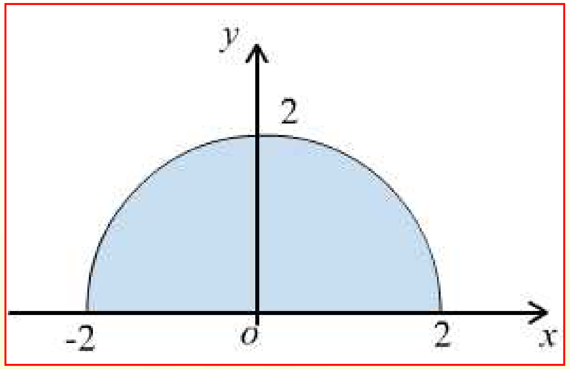
（3）在区间$[a,b]$，$f(x)$既取正值又取负值时，函数$f(x)$的图形既有在x轴上方的又有在x轴下方的，此时$\int_a^b f(x)dx$表示x轴上方的面积减去x轴下方的面积

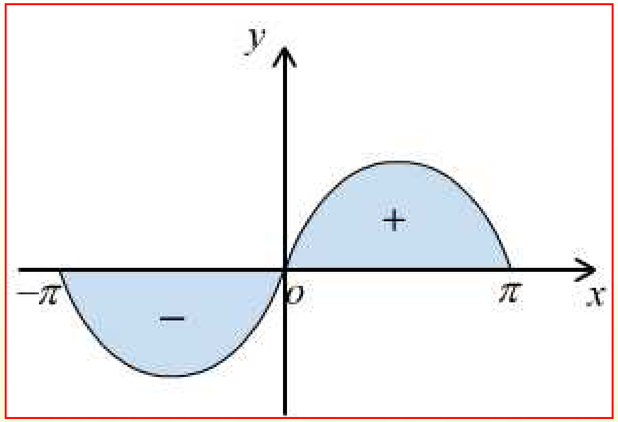
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A_1 + A_2 - A_3.$$



三、定积分的几何意义

例 1 ：求（1）$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$　　　（2）$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx$





解：（1）由几何意义 $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi\times 2^2=2\pi$

（2）由几何意义 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=0$

四、可积的条件

定理 1：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 推论：初等函数在定义区间上可积	定理 2：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界， 且只有有限个间断点， 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

五、定积分的性质

规　定：	$\int_a^a f(x)dx=0$　　$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$
性质 1：	$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
性质 2：	$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ （ k 为常数）
性质 3：	（定积分的区间可加性） $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$
性质 4：	$\int_a^b 1\cdot dx=b-a$

五、定积分的性质

性质 5：（定积分的保号性）

若在闭区间$[a,b]$上 $f(x)\geq 0$，则

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.}$$

推论 1（定积分的单调性）

若在$[a,b]$**上若** $f(x)\leq g(x)$，**则**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

推论 2 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

（$a<b$）

.

证明 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ （$a<b$）

证明： 显然 $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

$\Downarrow$ 由推论 1

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

$\Downarrow$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \quad （a<b）$$

五、定积分的性质

性质 6：设 M,m 分别是函数 $f(x)$

在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，

则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

估计积分值的大致范围

性质 7 （积分中值定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

则在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

积分中值公式

证明： 显然 $m \le f(x) \le M$

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$

$$m\int_a^b 1\cdot dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b 1\cdot dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

证明： $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

由介值定理知：至少存在一个在 $\xi \in [a,b]$ 使得

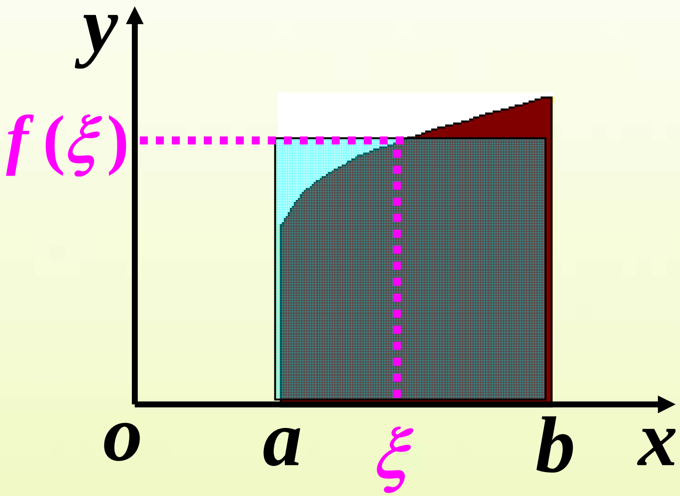
$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

即 $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

积分中值公式的几何解释

如果连续函数 $f(x)\ge 0$，则存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得曲边梯形

的面积等于以 $[a,b]$ 为底，以 $f(\xi)$ 为高的矩形的面积



即 $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值.

五、定积分的性质

例 2 判断正误.

(1) $$\int_0^1 x^2 dx \le \int_0^1 x^3 dx.$$

(2) $$6 \le \int_1^4 \left(x^2 + 1\right) dx \le 51$$

§5.2 微积分基本公式

主要内容

原函数存在定理

Newton-Leibniz 公式

一、原函数存在定理

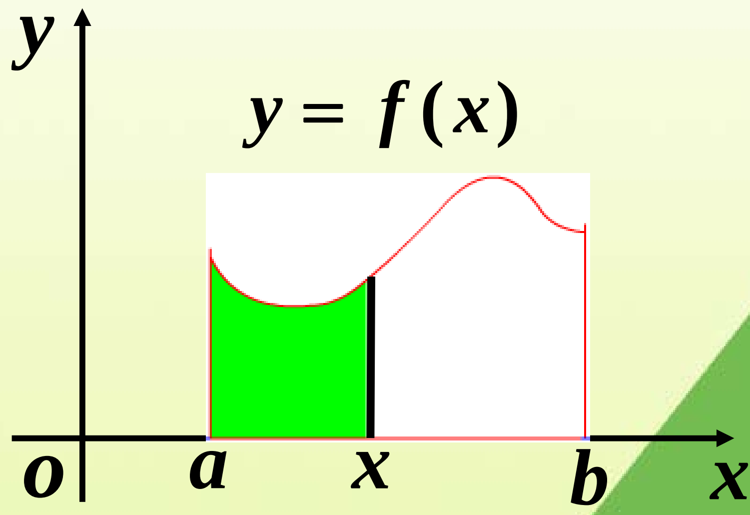
1：**积分上限函数**

定义：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\forall x \in [a,b]$

$$\boxed{\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt}$$

是一个关于以 x 为自变量的函数

我们把这个函数称为**积分上限函数**



探究 1：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，问积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上是否可导？

分析：对任意 $x\in[a,b]$，设 $x+\Delta x\in[a,b]$，则

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} x=x,\ \lim_{\Delta x\to 0}(x+\Delta x)=x$$

积分中值定理

$$\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x$$

（ξ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间）

$$\lim_{\Delta x\to 0}\xi=x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(\lim_{\Delta x\to 0}\xi)=f(x)$$

一、原函数存在定理

2. 积分上限函数的性质

定理 1： 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导，且

$$\boxed{\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)}$$

$(a\le x\le b)$

在端点 $x=a,b$ 处，分别考虑右导数和左导数

$$\boxed{d\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)dx}$$

推论 1： 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$x\in[a,b]$ 则

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_x^b f(t)dt\right)=-f(x)}$$

$$\boxed{d\left(\int_x^b f(t)dt\right)=-f(x)dx}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\right)=f(x)\varphi'(x)}$$

一、原函数存在定理

推广 4：（1）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

（2）$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微， $x\in[\alpha,\beta]$ 时，有 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in[a,b]$，

则 $$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right)=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)}$$

一、原函数存在定理

例 1：判断正误

1. $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x 2^t dt\right)=2^x$

2. $\frac{d}{dx}\left(\int_x^0 \sin dt\right)=\sin x$

3. $\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 x^3 dx\right)=0$

4. $d\left(\int_0^x e^t dt\right)=e^x dx$

5. $\frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^5 \frac{\sin t}{t} dt\right)=-\frac{2\sin x}{x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x) \quad (a\le x\le b)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^b f(t)dt\right)=-f(x) \quad (a\le x\le b)$$

$$d\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)dx \quad (a\le x\le b)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right)=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$$

一、原函数存在定理

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$

分析（1） $\lim\limits_{x\to 0} x^3=0$， $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x \sin t^2 dt=\int_0^0 \sin t^2 dt=0$ 因此，所求极限为 $\frac{0}{0}$ 未定式

（2） $\left(x^3\right)'=3x^2$， $\left(\int_0^x \sin t^2 dt\right)'=\sin x^2$

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=\dfrac{1}{3}$

（4）由罗比达法则可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x \sin t^2 dt\right)'}{\left(x^3\right)'}=\dfrac{1}{3}$

一、原函数存在定理

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$

解： 显然所求极限为$\dfrac{0}{0}$未定式. 由罗比达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \sin t^2 dt\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=\frac{1}{3}$$

一、原函数存在定理

定理 2 （原函数存在定理）：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数.

探究 2：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数如何计算 $\int_a^b f(t)dt$?

原函数存在定理

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数

原函数的性质

$\Phi(x)$ 与 $F(x)$ 之间相差一常数. 即

$F(x)=\Phi(x)+C$

$F(a)=\Phi(a)+C$

$=C$

$F(x)=\Phi(x)+F(a)$

$\Phi(x)=F(x)-F(a)$

$\Phi(b)=\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

二、Newton-Leibniz 公式

定理 3： 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

如果函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，

则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

可以记作

$$\int_a^b f(x)dx = = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

注记1：连续函数的条件必不可少

注记 2： $a > b$ **时，仍有**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

定积分与不定积分的联系

（1）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

（2）$\int f(x)dx = F(x) + C$

则

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

注记 3　求 $\int_a^b f(x)dx$ 的一般步骤

第一步：求出 $f(x)$ 的不定积分

第二步：省去不定积分中的常数 C，

得到 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$

第三步：计算 $F(b) - F(a)$

二、Newton-Leibniz 公式

例 3：求（1）$\int_0^1 x^2 dx$ （2）$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$ （3）$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ （4）$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

解（1）$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right) = \frac{1}{3}$

（2）$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

（3）$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$

（4）$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$

课堂训练---判断正误

(1) $\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$

(2) $\int_0^{\pi} \cos x dx = -1$

(3) $\int_0^1 e^x dx = e - 1$

(4) $\int_0^{\pi} \sin x dx = 0$

(5) $\int_0^1 dx = 1$

(6) $\int_{-1}^1 x^9 dx = 1$

§5.3　定积分的换元法及分部积分法

主要内容

- 换元积分法
- 分部积分法

一、定积分的换元法

定理 1：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $u=\varphi(x)$ 满足条件：

（1） $u=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调且具有连续的导数

（2） $\varphi(a)=\alpha,\varphi(b)=\beta$

定积分的换元公式

则有 $$\boxed{\int_a^b f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dxt=\int_\alpha^\beta f(u)du}$$

证明 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数

不定积分的第一类换元积分法

不定积分的定义

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = F[\varphi(x)] + C$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)]$$

$$\int_\alpha^\beta f(u)\,du = F(\beta) - F(\alpha)$$

$\varphi(a) = \alpha,\ \varphi(b) = \beta$

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u)\,du$$

一、定积分的换元法

定理 2：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件:

（1）$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续单调的导数

定积分的换元公式

（2）$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$

则有 $$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

注记 1：当 $\beta<\alpha$ 时，公式仍成立.

定积分的换元法与不定积分的换元法比较

若$\int f(x)dx = F(x)+C$，则

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dxt \overset{u=\varphi(x)}{=} \int_\alpha^\beta f(u)du$$
$$= F(\beta)-F(\alpha)$$

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx \overset{u=\varphi(x)}{=} \int f(u)du$$
$$= F(u)+C$$
$$= F(\varphi(x))+C$$

（1）求定积分时换元必换(上下)限.

不必再返回到原来的变量

.

（2） 不换元时不换(上下)限

一、定积分的换元积分法

例 1 求$\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

解： 显然 $$\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int_0^1 \frac{1}{1+\left(e^x\right)^2}de^x$$

令$u=e^x$，则当$x=0$时，$u=1$，当$x=1$时，$u=e$

因此 $$\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_1^e \frac{1}{1+u^2}du=\left[\arctan u\right]_1^e=\arctan e-\frac{\pi}{4}$$

换元变积分上下限

一、定积分的换元积分法

例 2 求 $\int_{-2}^{0}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$

解：令 $u=x+1$,，则当 $x=-2$ 时，$u=-1$，当 $x=0$ 时，$u=1$

则 $\int_{-2}^{0}\frac{1}{x^2+2x+2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{u^2+1}du=\left[\arctan u\right]_{-1}^{1}$

换元变积分上下限

$$=\arctan 1-\arctan(-1)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

一、定积分的换元积分法

例 3 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x d\cos x$

没有写出新的积分变量不变积分上下限

从而 $= \left[-\frac{1}{6}\cos^6 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}$

例 4 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ \ (a>0)$.

解 ：设 $x=a\sin t$，则 $dx=a\cos t\,dt$，且当 $x=0$ 时，$t=0$， $x=a$ 时 $t=\frac{\pi}{2}$

于是

换元变积分上下限

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\ a\cos t\,dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$

没有写出新量积分
上下限不变

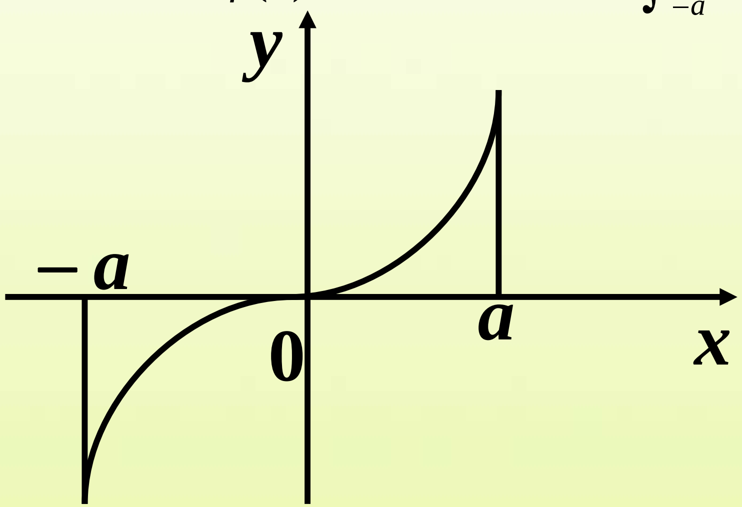
$$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}a^2\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}$$

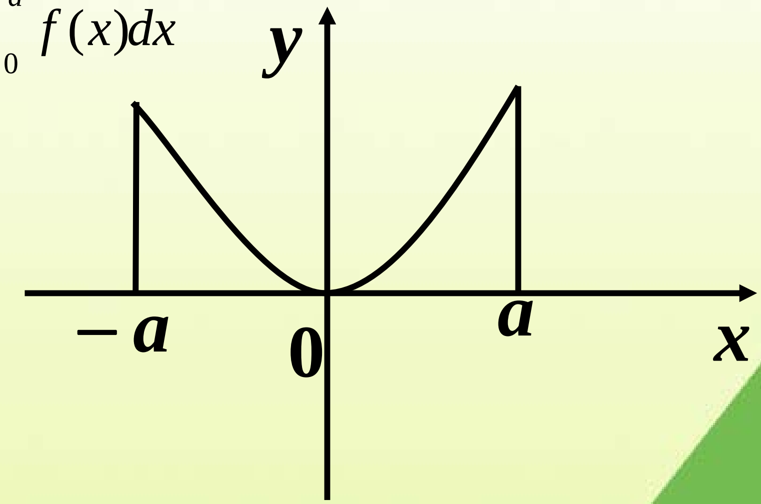
一、定积分的换元积分法

定理 3 函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续

（1）如果 $f(x)$ 是奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$；

（2）如果 $f(x)$ 是偶函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$





证明 由定积分的区间可加性

做变换 $t=-x$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{0}^{a} f(-t)dt$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$$

$f(x)=-f(-x)$

$f(x)=f(-x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

课堂训练----判断正误

（1） $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx = 0$；

（2） $\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \tan x}{1+x^4} dx = 0$

（3） $\int_{-1}^{1} |x| dx = 2\int_{0}^{1} x dx$

（4） $\int_{-1}^{1} x^{99} dx = 0$

（5） $\int_{0}^{1} f(x+1) dx = \int_{1}^{2} f(x) dx$

（6） $\int_{a}^{b} f(\sin x)\cos x dx = \int_{\sin a}^{\sin b} f(x) dx$

二、定积分的分部积分

设$u(x),v(x)$在区间$[a,b]$上连续可导，则

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

定理 4：设$u(x),v(x)$在区间$[a,b]$上连续可导，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

二、定积分的分部积分

例 5：求 $\int_0^{\pi} x\cos x dx$

解：由分步积分法可得

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = \int_0^{\pi} x d\sin x$$

$$= \left[x\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= \left[\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$= -2$$

二、定积分的分部积分

例 6：求 $\int_1^e \ln x dx$

解 ： 由分步积分法可得

$$\int_1^e \ln x dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{x}\cdot x\right)dx$$

$$=(e-0)-\int_1^e dx$$

$$=e-(e-1)$$

$$=1$$

二、定积分的分部积分

例 7：求$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x dx$

解：由分步积分法可得

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x dx=\left[x\arcsin x\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-x^2\right)$$

$$=\frac{\pi}{12}+\left[1-x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$$

二、定积分的分部积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n = 2m \\ \dfrac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}, & n = 2m+1 \end{cases} \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n = 2m \\ \dfrac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}, & n = 2m+1 \end{cases} \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

第四节　定积分在几何中的应用

主要内容

元素法为工具

→ 平面图形的面积

→ 立体图形的体积

→ 平面曲线的弧长

一、定积分的元素法

求曲边梯形面积问题探究过程	求曲边梯形面积问题探究过程
（1）分割：$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$	（1）分割：$A=\sum \Delta A$
（2）近似逼近 $\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$	（2）近似逼近 $\Delta A \approx f(x)dx$ 记 $dA=f(x)dx$
（3）求和 $A\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$	（3）求和 $A\approx\sum dA=\sum f(x)dx$
（4）取极限 $A=\lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right)=\int_a^b f(x)dx$	（4）取极限 $A=\lim\sum f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

将下标省去，

将$[x_{i-1},x_i]$记作$[x,x+dx]$

把 $f(x)dx$ 称为

面积元素

二、平面图形的面积

应用定积分求曲边梯形面积	一般地，　若某实际问题中的所
面积 A 的特点：	求量 U 符合以下条件：
（1）面积 A 是一个与积分区间 $[a,b]$ 有关的量	（1）U 是一个与积分区间 $[a,b]$ 有关的量
（2）面积 A 具有可加性 $A=\sum dA$	（2）U 具有可加性 $U=\sum dU$
（3）部分量 dA 的近似值形如性 $f(x)dx$	（3）部分量 dU 的近似值形如性 $f(x)dx$
	则　$U=\int_a^b dU=\int_a^b f(x)dx$

二、平面图形的面积

注记 1：利用微元法的解题步骤

（1） 确定所求量 U 和自变量 x 及其变化区间 $[a,b]$；

(2) 在区间 $[x,x+dx]$ 上找出 $f(x)$，求出元素 dU 表达式

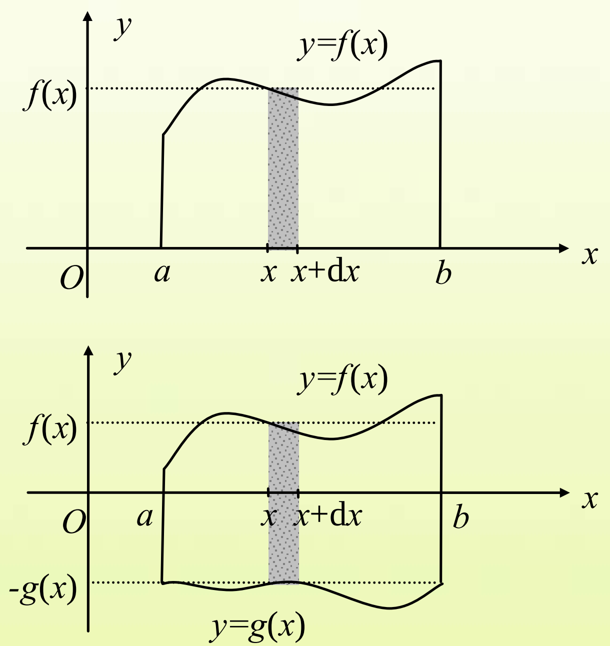
$$\boxed{dU = f(x)dx}$$

（3） 计算定积分 $U[a,b]=\int_a^b f(x)dx$.

二、平面图形的面积

1. 平面直角坐标:

一般地：平面图形的面积元素都用小矩形的面积表示



（1） $x=a$， $x=b$， $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 所围图形的面积

面积元素 $dA=[f(x)-g(x)]dx$

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

（2）由 $y=\alpha, y=\beta$ （$\alpha<\beta$）， $x=\varphi_1(y)$ 和 $x=\varphi_2(y)$

所围图形的面积为 $A=\int_\alpha^\beta |\varphi_1(y)-\varphi_2(y)|dy$

二、平面图形的面积

例 1　求 $y=x^2$，$x=1, y=0$ 围成的平面图形的面积.

解：（1）解方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ x=1 \end{cases}$ 得曲线 $y=x^2$ 与 $x=1$ 的交点 $A(1,1)$

解方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=0 \end{cases}$ 得曲线 $y=x^2$ 与 $y=0$ 的交点：$O(0,0)$

（2）取 x 为积分变量，则 $0 \le x \le 1$，且在 $[x, x+\Delta x]$ 上的面积元素 $dA=x^2dx$

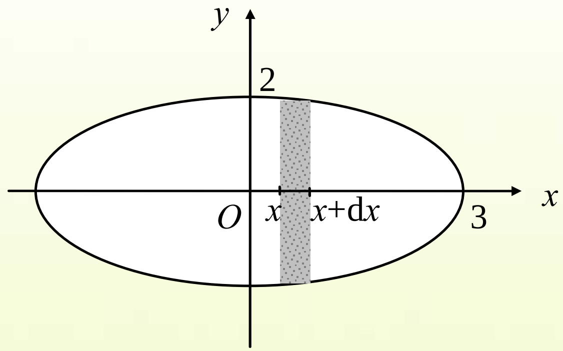
（3）所求的图形的面积　$A=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

答：$y=x^2$，$x=1, y=0$ 围成的平面图形的面积为 $\frac{1}{3}$.

例 2 计算椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围区域的面积.

解：由对称性，所求面积为它在第一象限部分面积的 4 倍在第一象限椭圆为，.

取x为积分变量，由公式得所求面积$A=4\int_0^a y\,dx$



令$x=a\cos t, y=b\sin t$， $t\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$. 则

$$A=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

$$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab$$

二、平面图形的面积

注记 2：设曲线 L 的参数方程是 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，$(\alpha \le t \le \beta)$，若

（1） $x(t), y(t)$ 具有连续的一阶导数

（2） $y(t) \ge 0, x(t)$ 严格单调，

（3） $x(\alpha) = a, x(\beta) = b.$

则由曲线 L 及 $x = a, x = b$ 及 x 轴围成的曲边梯形的面积是

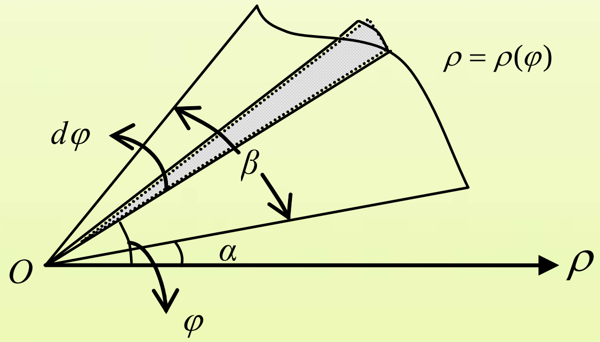
$$A = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt$$

二、平面图形的面积

2. 极坐标系的情形：

一般地：极坐标系中平面图形的面积元素用小扇形的面积表示

求在极坐标系下：由曲线 $\rho=\rho(\varphi)$ 及射线 $\varphi=\alpha$，$\varphi=\beta\ (\alpha<\beta)$ 围成曲边扇形的面积



设 $\rho(\varphi)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

（1）取 φ 为积分变量，则 $\varphi\in[\alpha,\beta]$

（2）在 $[\alpha,\beta]$ 上任取一小区间 $[\varphi,\varphi+d\varphi]$

面积元素 $dA=\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi$，

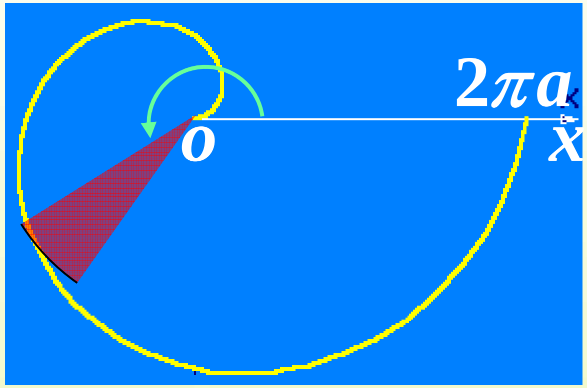
（3）所求曲边扇形的面积

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$$

二、平面图形的面积

例 3：**求阿基米德螺线** $\rho = a\varphi \ (a > 0)$ **对应** φ **从 0 到 2π 所围图形面积．**

解：φ 从 0 到 2π 所围图形的面积元素.

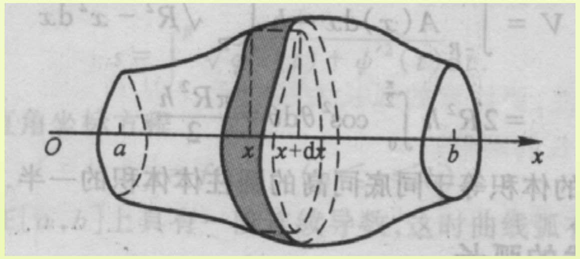


$$dA = \frac{1}{2}(a\varphi)^2 \, d\varphi.$$

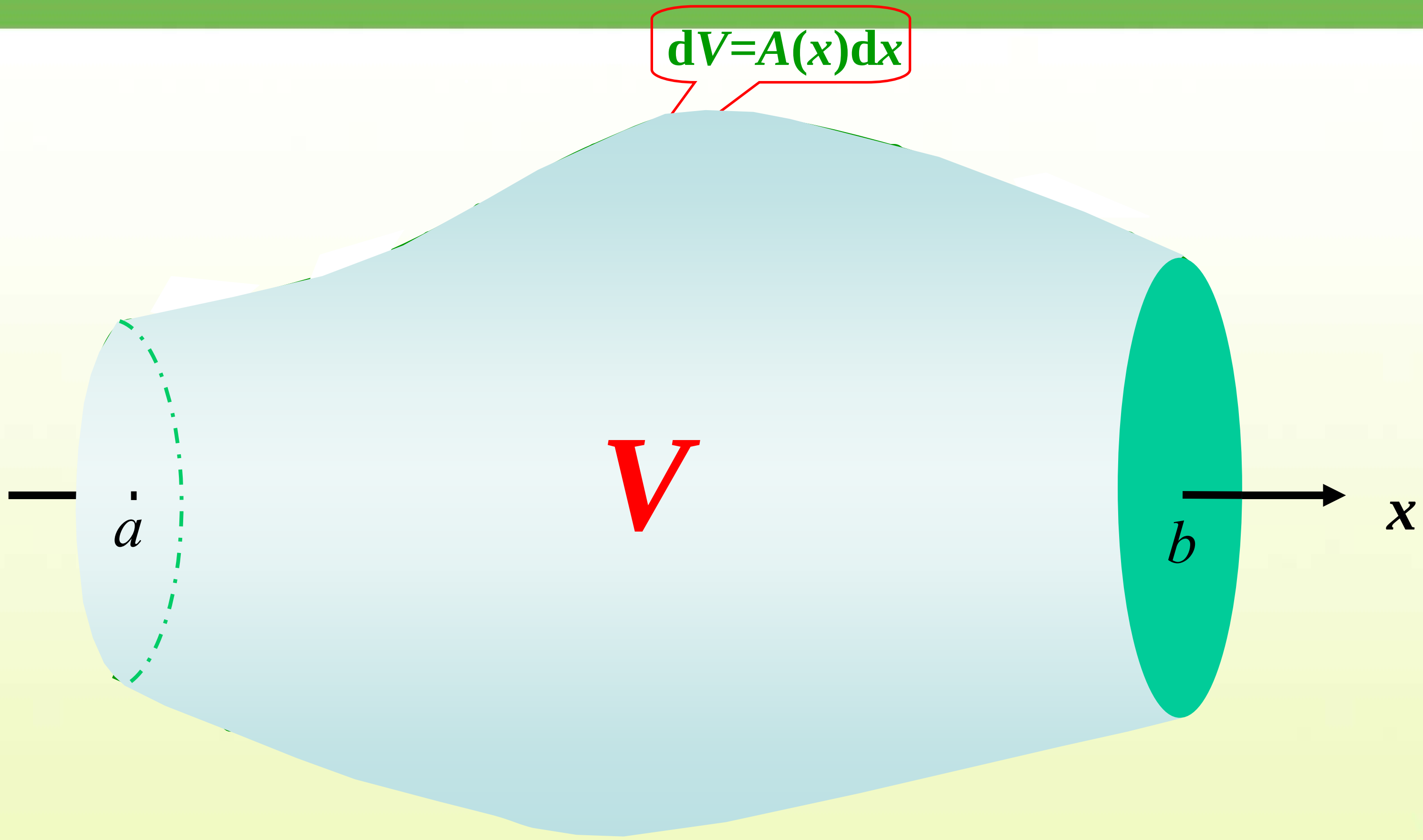
所求图形的面积 $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \times \left[\frac{\varphi^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{4a^2\pi^3}{3}$

三、体 积

1. 已知平行截面面积求立体体积 （一般地：体积元素用扁柱面体积表示）

设一物体位于平面 $x=a$ 与 $x=b$ 之间，任意垂直于 x 轴的平面截该物体，所得截面面积为 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 求立体体积 	（1）取 x 为积分变量，则 $x\in[a,b]$ （2）在 $[a,b]$ 上任取一小区间 $[x,x+dx]$ （3） 在区间 $[x,x+dx]$ 上的薄片的体积近似底面积为 $A(x)$ 高为 dx 的扁柱面的体积 体积元素 $dV=A(x)dx$ （4）立体的体积 $V=\int_a^b A(x)dx$.

已知平行截面面积为 $A(x)$的立体



$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

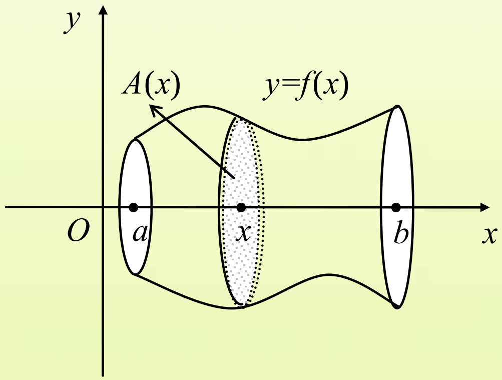
三、体 积

2. 旋转体的体积

（1） 曲边梯形 $0 \le y = f(x), a \le x \le b$ 绕 x 轴

旋转一周所成的旋转体的体积

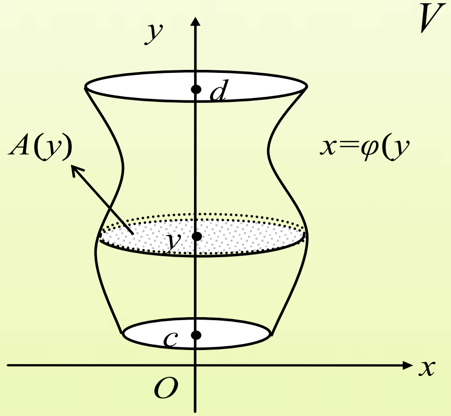
$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$



（2） 曲边梯形 $0 \le x = \varphi(y), c \le y \le d$ 绕 x 轴

旋转一周所成的旋转体的体积

$$V = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 dy$$



四．平面曲线的弧长

1．直角坐标系中曲线的弧长

设曲线的方程为 $y=f(x)$ （$a\le x\le b$）

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

则曲线的弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

例 1．计算曲线 $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$，$x\in[0,1]$ 的弧长

解：（1）显然 $y'=\sqrt{x}$，$x\in[0,1]$

（2）$s=\int_0^1\sqrt{1+[y']^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$

$$=\frac{2}{3}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$$

四. 平面曲线的弧长

2. 曲线方程为参数形式时曲线的弧长

设曲线的参数方程为

$x=\varphi(t)$， $y=\psi(t)$ （$\alpha \le t \le \beta$ ）

（1） $\varphi(t),\psi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$连续可导，

（2） $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$.

则曲线的弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

例 2. 求摆线 $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ 一拱 $0\le\theta\le\pi$ 的弧长

解： （1） 显然 $x'(\theta)=a(1-\cos\theta)$，

$$y'(\theta)=a\sin\theta$$

（2） $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}d\theta$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta=8a$$

四. 平面曲线的弧长

3. 极坐标系中曲线的弧长

设曲线的极坐标形式 $\rho = \rho(\varphi)$， $\varphi \in [\alpha , \beta]$

$\rho(\varphi)$ 连续可导

由于 $x = \rho(\varphi)\cos\varphi,\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

因此弧长 $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi.$

§5.6　反常积分

主要内容

具有无穷间断点的反常积分

无穷限的反常积分

定义性质

一、无穷限的反常积分

定义 1：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，

取 $t>a$，如果极限 $\boxed{\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx}$ 存在，

则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间

$\boxed{[a,+\infty)}$ 上的反常积分. 记作 $\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx}$.

即

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx}$$

当极限存在时，称反常积分收敛

当极限不存在时，称反常积分发散

定义 2：设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续，

取 $u<b$，如果极限 $\boxed{\lim_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)dx}$ 存在，

则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间

$\boxed{(-\infty,b]}$ 上的反常积分. 记作 $\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx}$.

即

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)dx}$$

当极限存在时，称反常积分收敛

当极限不存在时，称反常积分发散

一、无穷限的反常积分

定义 3：设函数 $f(x)$ 在区间 $\boxed{(-\infty,+\infty)}$ 上连续,

如果反常积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ 和 $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛

则称上述两反常积分之和为函数 $f(x)$ 在无穷区间

$(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分，记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$，

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

这时我们称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

否则就称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

注记 1：设函数 $f(x)$ 在区间 $\boxed{(-\infty,+\infty)}$ 上连续

（1）反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

的充要条件是反常积分

$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ 和 $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛

（2）如果反常积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ 和 $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$

有一个发散

则反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散

一、无穷限的反常积分

定理 1：设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的一个原函数

（1）若 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

（2）若 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 不存在，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

记 $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$，$\left[F(x)\right]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^{+\infty}$$

定理 2：设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 的一个原函数

（1）若 $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ 存在，则 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 收敛且

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = \left[F(x)\right]$$

（2）若 $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ 不存在存在，则

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \text{ 发散}$$

定理 1 的证明

证明： 因为 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的一个原函数

原函数的定义

$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,t]$ 上的一个原函数

牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

（1） 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在

$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx = \lim\limits_{t\to+\infty}[F(t)-F(a)]$ 存在

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$

（2） 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 不存在

$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx = \lim\limits_{t\to+\infty}[F(t)-F(a)]$ 不存在

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

一、无穷限的反常积分

定理 3：设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的一个原函数	
（1）若 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ 都存在	（2）若 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ 至少有一个不存在
则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\left[F(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}$	则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 发散

一、无穷限的反常积分

注记 2 判断反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 是否收敛的一般步骤：

第一步：判断被积函数在区间 $[a,+\infty)$ 上连续

第二步：找出被积函数的一个原函数 $F(x)$

第三步：判断 $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ 是否存在

（1）如果 $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ 存在，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$

（2）如果 $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ 不存在，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

一、无穷限的反常积分

例 1　证明反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 当 $p>1$时收敛；当 $p\le 1$时发散.

分析：　（1）显然被积函数在$[1,+\infty)$连续，且 $\int\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\ln x+C, p=1\\ \dfrac{x^{1-p}}{1-p}+C, p\ne 1\end{cases}$，

（2）$F(x)=\begin{cases}\ln x, p=1\\ \dfrac{x^{1-p}}{1-p}, p\ne 1\end{cases}$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ 的一个原函数

（3）当 $p=1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ 不存在

当 $p<1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{1-p}}{1-p}=+\infty$ 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ 不存在

当 $p>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{-(p-1)}}{1-p}=0$ 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ 存在

因此当 $p>1$时，反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 收敛；当 $p\le 1$时，反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 发散.

一、无穷限的反常积分

例 1 证明反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛；当 $p\le 1$ 时发散.

证明 （1）显然被积函数在 $[1,+\infty)$ 连续，

（2）当 $p=1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=[\ln x]_1^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

（3）当 $p<1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}=+\infty$

（4）当 $p>1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{-(p-1)}}{1-p}-\frac{1}{1-p}=\frac{1}{p-1}$

所以当 $p>1$ 时，反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 收敛；当 $p\le 1$ 时，反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 发散.

一、无穷限的反常积分

例 2 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt \quad (p>0)$

分析：显然被积函数在 $[0,+\infty)$ 连续

（1） $\int te^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\int tde^{-pt} = -\frac{1}{p}\left[te^{-pt} - \int e^{-pt}dt\right] = -\frac{1}{p}\left[t+\frac{1}{p}\right]e^{-pt} + C$，

（2） $F(t) = -\frac{1}{p}\left[t+\frac{1}{p}\right]e^{-pt}$ 是 $f(t) = te^{-pt}$ 的一个原函数

（3） $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = -\frac{1}{p}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t+\frac{1}{p}}{e^{pt}} = -\frac{1}{p}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\left(t+\frac{1}{p}\right)'}{\left(e^{pt}\right)'} = -\frac{1}{p}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{pe^{pt}} = 0$ 存在

（4） $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ 收敛 且 $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \left[F(t)\right]_0^{+\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty} F(t) - F(0) = \frac{1}{p^2}$

一、无穷限的反常积分

例 2 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt \quad (p>0)$

解：（1）$\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} tde^{-pt} = -\frac{1}{p}\left[te^{-pt} - \int e^{-pt}dt\right]_0^{+\infty}$

$$= -\frac{1}{p}\left[\left(t+\frac{1}{p}\right)e^{-pt}\right]_0^{+\infty}$$

（2）$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t+\frac{1}{p}\right)e^{-pt} = -\frac{1}{p}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t+\frac{1}{p}}{e^{pt}} = -\frac{1}{p}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\left(t+\frac{1}{p}\right)'}{\left(e^{pt}\right)'} = -\frac{1}{p}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{pe^{pt}} = 0$

（3）$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \left[F(t)\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{p}\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t+\frac{1}{p}\right)e^{-pt} + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}$

一、无穷限的反常积分

注记 3 判断反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$是否收敛的一般步骤：

第一步：判断被积函数在在区间$(-\infty,+\infty)$上连续

第二步：找出被积函数在$(-\infty,+\infty)$的一个原函数$F(x)$

第三步：判断$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$与$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$是否存在

（1）如果$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$与$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$都存在，则反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛

且
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \left[F(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

（2）如果$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$与$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$至少有一个不存在，则反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$发散

一、无穷限的反常积分

例 3　计算反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

分析：　（1）$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$，

（2）$F(x)=\arctan x$是$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$的一个原函数

（3）$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\frac{\pi}{2},\ \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}$存在

（4）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$收敛　且　$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=[F(x)]_{-\infty}^{+\infty}$

解：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x-\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

二、被积函数有无穷间断点的反常积分

定义 1：设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，

$\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$， 如果极限 $\boxed{\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx}$ 存在，

则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $\boxed{(a,b]}$

上的反常积分. 记作 $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx$$

当极限存在时，称反常积分收敛

当极限不存在时，称反常积分发散

定义 2：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，.

$\lim\limits_{x\to b-} f(x)=\infty$， 如果极限 $\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$ 存在， .

则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$

上的反常积分. 记作 $\int_a^b f(x)dx$.

即 $$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx.$$

当极限存在时，称反常积分收敛

当极限不存在时，称反常积分发散

二、被积函数有无穷间断点的反常积分

定义 3：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除点 c

$(a<c<b)$ 外连续上连续，$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$

如果两个反常积分 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛

则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，并定义

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

这时我们称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛

否则就称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

注记 4：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除点 c

$(a<c<b)$ 外连续上连续，$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$

（1）反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛

的充要条件是反常积分

$\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛

（2）如果反常积分 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$

有一个发散

则反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散

二、被积函数有无穷间断点的反常积分

定理 4：设 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$， 函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 的一个原函数

（1）若 $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$ 存在，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛且

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x) = F(b) - F(a^+)$$

（2）若 $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$ 不存在，则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散

记 $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a^+)$

则记 $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

无界函数的形式 Newton-Leibniz 公式

定理 5：设 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$， 函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 的一个原函数

（1）若 $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ 存在，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a) = F(b^-) - F$$

（2）若 $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ 不存在，则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散

记 $[F(x)]_a^b = F(b^-) - F(a)$

则记 $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

无界函数的形式 Newton-Leibniz 公式

例 4 求反常积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$

分析：（1）显然函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 在 $[0,a]$ 上除点 $x=a$ 外处处连续，且

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^-}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\infty$$

因此 $x=a$ 是被积函数的无穷间断点

（2）由于 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

所以 $F(x)=\arcsin\frac{x}{a}$ 是 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 的在 $[0,a)$ 上的一个原函数

（3）由于 $\lim\limits_{x\to a^-} F(x)=\lim\limits_{x\to a^-}\arcsin\frac{x}{a}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$， 故 $\lim\limits_{x\to a^-} F(x)$ 存在

（4）反常积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$ 收敛，且 $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\lim\limits_{x\to a^-}F(x)-F(0)=\frac{\pi}{2}$

二、被积函数有无穷间断点的反常积分

例 4 求反常积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$

解：（1）显然函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 在 $[0, a]$ 上除点 $x = a$ 外处处连续，且

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = +\infty$$

因此 $x = a$ 是被积函数的无穷间断点

（2）$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \left[\arcsin \frac{x}{a}\right]_0^a = \lim_{x \to a^-} \arcsin \frac{x}{a} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

一、无穷限的反常积分

例 5 讨论反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ 的收敛性.

解：（1）显然函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上除点 $x=0$ 外处处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

因此 $x=0$ 是被积函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 的无穷间断点

（2）$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_0^1=-1+\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

所以反常积分 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$ 的发散

（3）因此反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ 发散.