第三章　函数极限

- 一、 主要内容
- 1、函数极限的概念
- 2、函数极限的性质
- 3、函数极限存在的条件
- 4 、两个重要的极限
- 5 、无穷小量与无穷大量

二、目的要求

- 1、 熟练掌握函数极限的定义，并能利用ε-δ语言对简单的初等函数的极限给出证明；
- 2、 熟练掌握函数极限的性质并利用它对相关问题进行讨论研究；
- 3、掌握夹逼定理的基本思想；
- 4、 牢记两个重要极限的结果，会用两个重要极限作相关的计算与证明；
- 5、熟练掌握Heine归结原理，并能利用Heine定理对函数的敛散性进行判断；
- 5、掌握无穷小和无穷大的定义、性质和关系；能够对于相对简单的无穷小及无穷大进行比较，了解阶的概念。

- **三、重点与难点**
- 1、重点是函数极限的概念、性质
- 及计算。
- 2、难点是归结原理和柯西准则的
- 应用

§1 函数极限概念

在本章,我们将讨论函数极限的基本概念和重要性质.作为数列极限的推广,函数极限与数列极限之间有着密切的联系,它们之间的纽带就是归结原理.

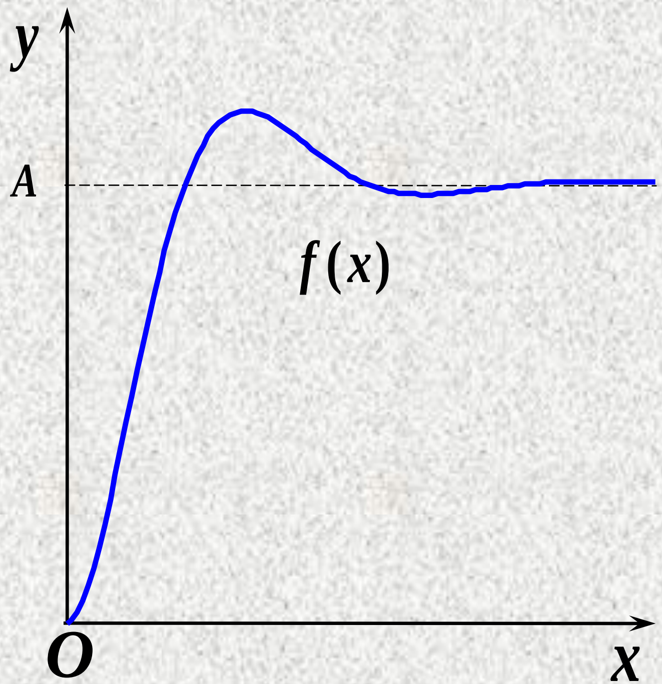
一、x趋于∞时的函数极限

二、x趋于x_0 时的函数极限

三、单侧极限

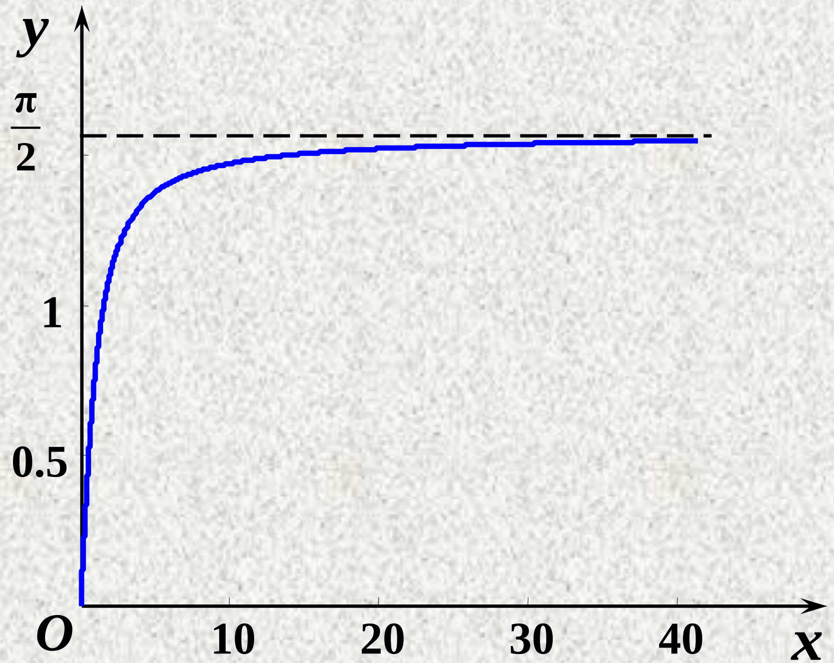
一、x趋于∞时的函数极限

设函数$f(x)$定义在$[a,+\infty)$上，当 x 沿着 x 轴的正向无限远离原点时，函数$f(x)$也无限地接近A，我们就称$f(x)$当 x 趋于$+\infty$时以A为极限.



前页 后页 返回

例如 函数 $y = \arctan x$, 当 x 趋于$+\infty$时, $\arctan x$ 以 $\dfrac{\pi}{2}$为极限.



前页 后页 返回

定义1 设 f 为定义在 $[a,+\infty)$ 上的一个函数． A 为定数，若对于任意正数 $\varepsilon>0$，存在 $M(\geq a)$，使得当 $x>M$ 时，

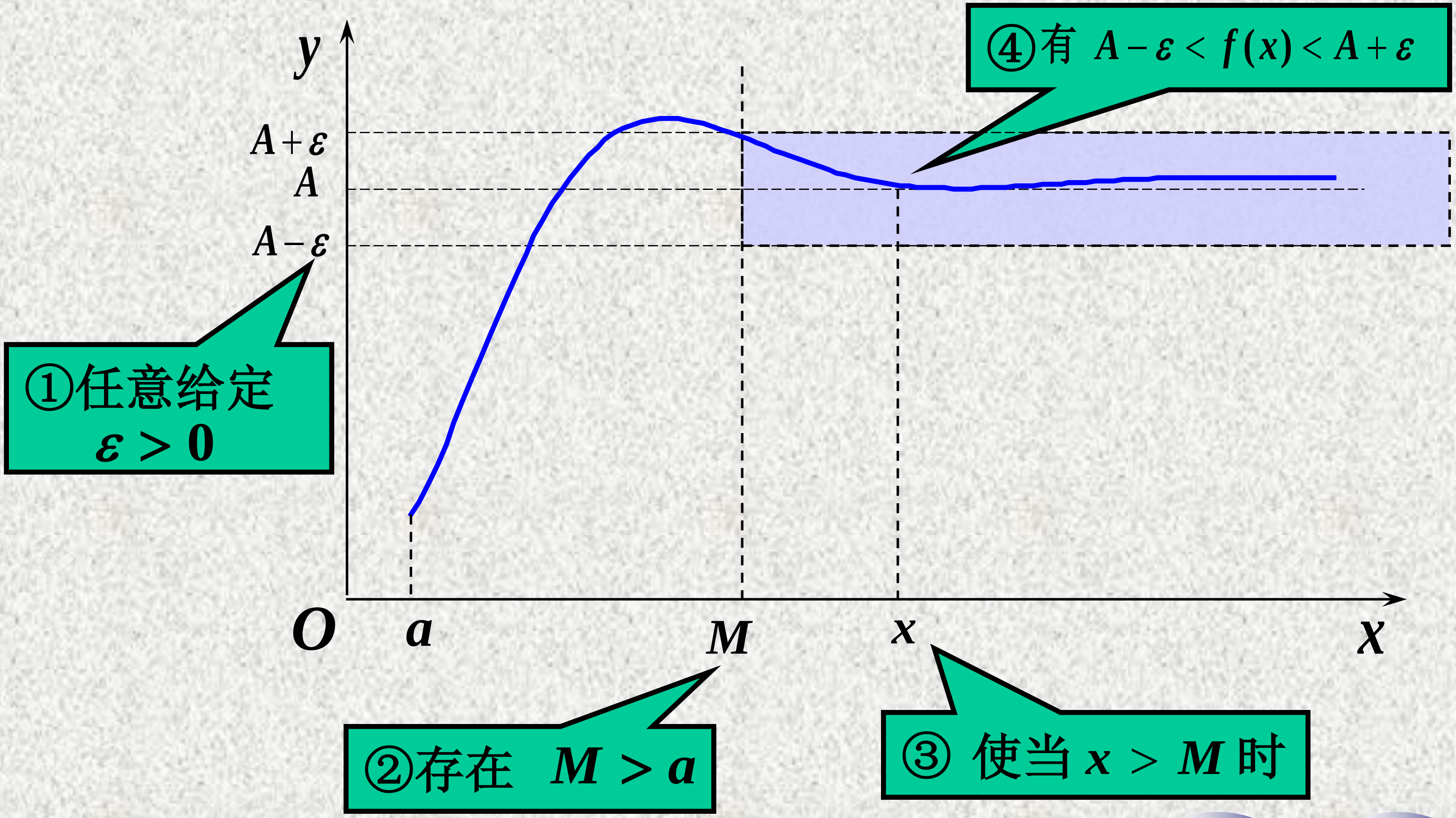
$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 $+\infty$ 时以 A 为极限.

记为

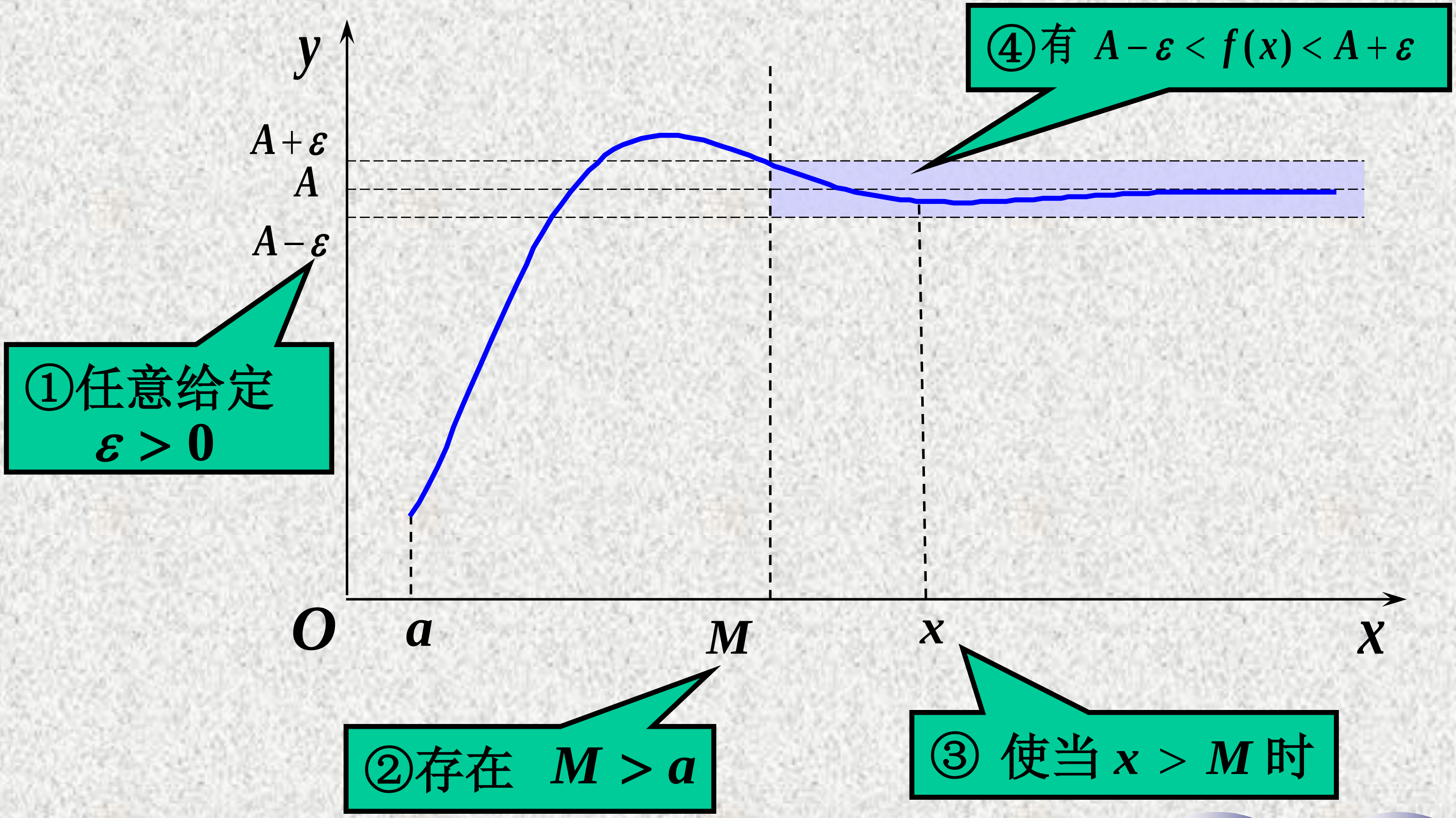
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或者 \quad f(x)\to A \quad (x\to+\infty).$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$的几何意义



前页 后页 返回

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 的几何意义



前页 后页 返回

注 数列可视为定义在正整数集上的函数. 请大家比较数列极限定义与函数极限定义之间的相同点与不同点.

例1 证明 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

证 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$, 当 $x > M$ 时,

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon,$$

所以(由定义1),

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

前页 后页 返回

例2 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}.$

证 任给 $\varepsilon>0\ (\varepsilon<\dfrac{\pi}{2})$, 取 $M=\tan(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon).$

因为 $\arctan x$ 严格增, 当 $x>M$ 时,

$$\left|f(x)-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan x$$

$$<\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=\varepsilon.$$

这就是说 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}.$

前页 后页 返回

定义2 设 $f(x)$定义在$(-\infty,b]$上,A是一个常数.

若对于任意$\varepsilon>0$, 存在 $M>0$, 当 $x<-M(<b)$时

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$当 $x\to-\infty$时以 A 为极限, 记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to-\infty).$$

前页 后页 返回

定义3 设 $f(x)$定义在∞的某个邻域$U(\infty)$内， A 为一个常数. 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 当 $|x| > M$时

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$当$x \to \infty$时以A为极限，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \ (x \to \infty).$$

例3 求证 $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$

证 对于任意正数 $\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$, 取 $M=-\ln\varepsilon$,

当 $x<\ln\varepsilon$ 时

$$|\mathrm{e}^x - 0| = \mathrm{e}^x < \varepsilon.$$

这就是说

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

前页 后页 返回

例4 求证 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0.$

证 对于任意正数 ε, 可取 $M=\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$, 当 $|x|>M$ 时, 有

$$\left|\frac{1}{1+x^2}-0\right|<\frac{1}{x^2}<\varepsilon,$$

所以结论成立.

从定义1、2 、3 不难得到:

定理 3.1　$f(x)$ 定义在 ∞ 的一个邻域内,则

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的充要条件是:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = A.$$

例如　$\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2},$

则由定理 3.1, $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ 不存在.

前页　后页　返回

二、x趋于x_0时的函数极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域 $U^{\circ}(x_0)$ 内有定义.

下面我们直接给出函数 $f(x)$当 $x \to x_0$ 时以常数 A 为极限的定义.

定义4　设 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域$U^{\circ}(x)$内有定义, A是一个常数. 如果对于任意正数 ε, 存在正数δ, 当 $x \in U^{\circ}(x,\delta) \subset U^{\circ}(x_0)$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时以 A 为极限. 记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

或者

$$f(x) \to A \quad (x \to x_0).$$

例5　证明 $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$

分析　对于任意正数 ε,要找到 $\delta > 0$, 当 $0 < |x-1| < \delta$

时，使

前页　后页　返回

$$\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|$$

$$=\frac{\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right|}{2\sqrt{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\frac{|x-1|}{2\sqrt{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})^2}<\varepsilon\ . \quad (*)$$

因

$$\frac{|x-1|}{2\sqrt{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})^2}\le |x-1|,$$

只要$|x-1|<\varepsilon$, (*)式就能成立，故取$\delta=\varepsilon$即可.

证 任给正数ε, 取$\delta=\varepsilon$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时,

前页 后页 返回

$$\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right| \le |x-1| < \varepsilon,$$

这就证明了

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

例6 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2.$

分析 要使

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| < \varepsilon,$$

可以先限制 $|x - x_0| < 1,$ 因为此时有

$$|x + x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \le |x - x_0| + 2|x_0|$$

$$< 1 + 2|x_0|,$$

所以 $|x^2 - x_0^2| \le (1 + 2|x_0|)|x - x_0|$，故只要

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}.$$

证 $\forall \varepsilon > 0$, 取$\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right\}$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2.$$

前页 后页 返回

注 在例5、例6中, 我们将所考虑的式子适当放大, 其目的就是为了更简洁地求出 δ, 或许所求出的 δ 不是“最佳”的, 但这不影响我们解题的有效性.

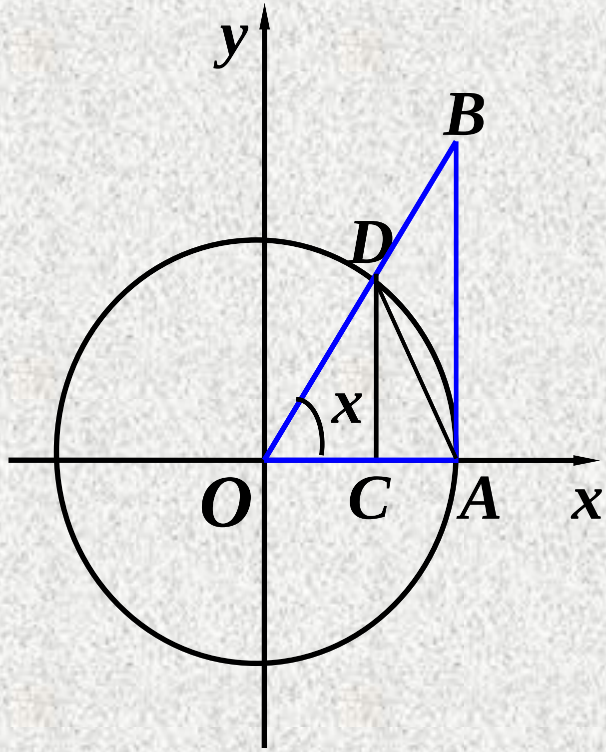
例7 求证:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

证 首先，在右图所示的单位圆内，

当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时，显然有



$$S_{\Delta OAD} < S_{扇形OAD} < S_{\Delta OAB},$$

即

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

故 $\sin x < x < \tan x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$

前页 后页 返回

因为当 $x \ge \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x \le 1 < x$, 故对一切 $x > 0$,

有 $\sin x < x$. 又因为 $\sin x$, x 均是奇函数, 故

$$|\sin x| \le |x|, \quad x \in \mathbf{R}.$$

上式中的等号仅在 $x = 0$ 时成立.

对于任意正数 ε, 取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|$$

$$\le |x - x_0| < \varepsilon,$$

前页 后页 返回

所以

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 .$$

同理可证:

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 .$$

前页 后页 返回

例7 证明: $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x_0^2} \quad (|x_0|<1).$

证 因为

$$\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^2}\right| = \frac{|x-x_0||x+x_0|}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x_0^2}}$$

$$\le \frac{2|x-x_0|}{\sqrt{1-x_0^2}},$$

则 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon\sqrt{1-x_0^2}}{2}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^2}\right| \le \frac{2|x-x_0|}{\sqrt{1-x_0^2}} < \varepsilon.$$

这就证明了所需的结论.

在上面例题中，需要注意以下几点：

1. 对于δ, 我们强调其存在性. 换句话说，对于固定的ε,不同的方法会得出不同的δ，不存在哪一个更好的问题.

2. δ是不惟一的, 一旦求出了δ, 那么比它更小的正数都可以充当这个角色.

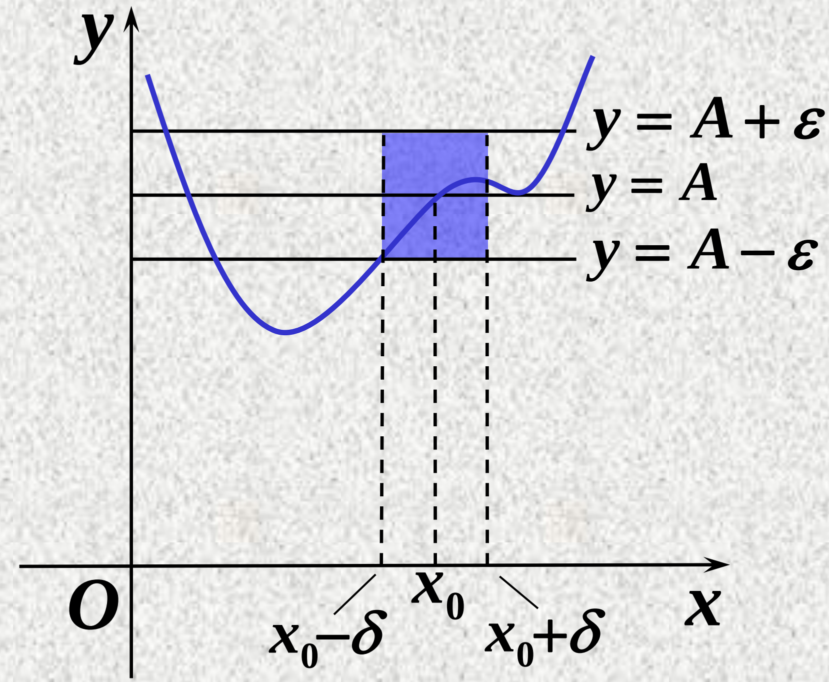
3. 正数 ε是任意的,一旦给出,它就是确定的常数.

有时为了方便, 需要让 ε 小于某个正数. 一旦对这样的 ε 能找到相应的 δ, 那么比它大的 ε, 这个 δ 当然也能满足要求. 所以我们有时戏称 ε “以小为贵”.

4. 函数极限的几何意义如图，任给$\varepsilon > 0$,对于坐标平面上以 y =A为中心线，宽为2ε 的窄带,可以找到$\delta > 0$, 使得曲线段

$$y = f(x),\ \ x \in U^{\circ}(x_0, \delta)$$

落在窄带内.



前页 后页 返回

三、单侧极限

在考虑 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 时，x 既可以从 x_0 的左侧 $(x < x_0)$ 又可以从 x_0 的右侧 $(x > x_0)$ 趋向于 x_0. 但在某些时候,我们仅需(仅能)在 x_0 的某一侧来考虑, 比如函数在定义区间的端点和分段函数的分界点等.

定义5 设 $f(x)$ 在 $U_+^\circ(x_0,\eta)$ ($U_-^\circ(x_0,\eta)$)有定义, A 为常数. 若对于任意正数 ε，存在正数 δ（$\delta < \eta$），

当 $0<x-x_0<\delta$ $(0<x_0-x<\delta)$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 f 当 $x\to x_0^+$ $(x\to x_0^-)$ 时的右(左)极限, 记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \ \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A\right).$$

右极限与左极限统称为单侧极限, 为了方便起见, 有时记

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x),\ \ f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

例8 讨论函数 $\sqrt{1-x^2}$ 在 $x=\pm1$ 处的单侧极限.

解 因为 $|x|\le 1,\ 1-x^2=(1+x)(1-x)\le 2(1-x)$,

所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon^2}{2}$, 当 $1-\delta<x<1$ 时, 有

$$|\sqrt{1-x^2}-0|<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x^2}=0.$

同理可证 $\lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt{1-x^2}=0.$

由定义3.4和定义3.5，我们不难得到：

定理 3.1′ 设 $f(x)$ 在 $U^{\circ}(x_0)$ 有定义，则

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是：

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

注 试比较定理 3.1 与定理 3.1′.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn} x=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn} x=-1$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$

不存在.

前页 后页 返回

作为本节的结束,我们来介绍两个特殊的函数极限.

例9　证明狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x=\text{有理数}\\ 0, & x=\text{无理数}\end{cases}$$

处处无极限.

证 对于任意的 $x_0\in\mathbf{R}$, 以及任意实数 A, 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$.

对于任意的 $\delta>0$, 若 $|A|\geq\dfrac{1}{2}$, 取 $x^*\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, 满足

$$0<|x^*-x_0|<\delta,$$

则

$$|D(x^*)-A|=|A|\geq\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

若 $|A|\leq\frac{1}{2}$, 取 $x^*\in\mathbf{Q}$, 满足 $0<|x^*-x_0|<\delta$, 则

$$|D(x^*)-A|=|1-A|\geq\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

这就证明了结论.

例10 设黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\quad (p,q)=1,\\ 0, & x=\text{无理数以及}\ 0,1\end{cases}.$$

求证：$\forall x_0\in(0,1),\ \lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0.$

证 $\forall\varepsilon>0$，取一正整数 N，使 $\dfrac{1}{N}<\varepsilon.$

因为在 $(0,1)$ 中分母小于 N 的有理数至多只有

$K=\dfrac{N(N-1)}{2}$ 个，故可设这些有理数为

$$x_1,x_2,\cdots,x_n\quad(n\le K).$$

前页 后页 返回

这就是说，除了这 n 个点外，其他点的函数值都小于 ε. 所以

(1) 若 x_0 是 $x_1,\cdots,x_n$ 中的某一个, 可设 $x_0 = x_i$ ，则令 $\delta = \min\limits_{1\le k\le n,\ k\ne i}\{|x_k - x_0|\}$;

(2) 若 $x_0 \notin \{x_1,\cdots,x_n\}$, 则令 $\delta = \min\limits_{1\le k\le n}\{|x_k - x_0|\}$.

于是, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对以上两种情形都有

$$|R(x)-0|<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0$.

前页 后页 返回

§2 函数极限的性质

在前面一节中引进的六种类型的函数极限，它们都有类似于数列极限的一些性质．这里仅以 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 为代表叙述并证明这些性质，其它类型的性质与证明，只要相应作一些修改即可．

一、$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 的基本性质

二、范例

一、$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的基本性质

定理3.2 （惟一性）

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则此极限惟一.

证　不妨设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 以及 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$.

由极限的定义，对于任意的正数 ε, 存在正数 δ_1, δ_2, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (1)$$

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,

前页 后页 返回

$$|f(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，(1) 式与 (2) 式均成立，所以

$$|A-B|\le|A-f(x)|+|f(x)-B|<\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，推得 $A=B$. 这就证明了极限是惟一的.

定理 3.3（局部有界性）

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则存在 $U^{\circ}(x_0)$, $f(x)$ 在 $U^{\circ}(x_0)$上有界.

证 取$\varepsilon=1$, 存在$\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|f(x)-A|<1.$$

由此得

$$|f(x)|<|A|+1.$$

这就证明了$f(x)$在某个空心邻域$U^{\circ}(x_0,\delta)$上有界.

注:

(1) 试与数列极限的有界性定理（定理 2.3）作一比较;

(2) 有界函数不一定存在极限;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$, 但 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 2)$ 上并不是有界的. 这说明定理中 "局部" 这两个字是关键性的.

定理3.4（局部保号性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$ (或 <0), 则对任何正数 $r<A$ (或 $r<-A$), 存在 $U^\circ(x_0)$, 使得对一切 $x\in U^\circ(x_0)$, 有

$$f(x)>r>0\ (\text{或}\ f(x)<-r<0).$$

证 不妨设 $A>0$. 对于任何 $r\in(0,A)$, 取 $\varepsilon=A-r$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

由此证得 $f(x)>A-\varepsilon>r$.

前页 后页 返回

定理 3.5（保不等式性） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在, 且在某邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)\le g(x)$, 则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x).$$

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 那么对于任意 $\varepsilon>0$, 分别存在正数 δ_1,δ_2, 使当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有

$$f(x)>A-\varepsilon;$$

而当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $g(x)<B+\varepsilon$.

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，满足

$$A - \varepsilon < f(x) \le g(x) < B + \varepsilon,$$

从而有 $A < B + 2\varepsilon$. 因为 ε 是任意正数，所以证得

$$A \le B.$$

定理 3.6（迫敛性） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, 且在 x_0 的某个空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有

$$f(x)\le h(x)\le g(x).$$

那么 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$.

证 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, 所以对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon,$$

$$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon.$$

再由定理的条件，又得

$$A-\varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < A+\varepsilon.$$

这就证明了$h(x)$在点x_0的极限存在，并且就是A.

定理 3.7（四则运算法则） 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$，$\lim_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，则 $f\pm g$，$f\cdot g$ 在点 x_0 的极限也存在，且

(1) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x)$；

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$；

(3) 又若 $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$，则 $\dfrac{f}{g}$ 在点 x_0 的极限也存在，并有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

前页 后页 返回

这些定理的证明类似于数列极限中的相应定理, 这里将证明留给读者. 在下一节学过归结原则之后, 就可以知道这些定理是显然的.

二、范例

例1 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\arctan x\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot 0=0.$$

前页 后页 返回

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解 由取整函数的性质, $\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\le\dfrac{1}{x}$. 当 $x>0$ 时, 有 $1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1$, 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$, 因此由迫敛性得 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$; 又当 $x<0$ 时, 有 $1<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1-x$, 同理得 $\lim\limits_{x\to 0^-}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$. 于是求得

$$\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

前页 后页 返回

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(x\tan x-1)$.

解 因为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=1,$$

所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(x\tan x-1)=\frac{\pi}{4}\cdot 1-1=\frac{\pi}{4}-1.$$

例4　求证 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1\ (a>1)$.

证　因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$，所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists N,$

当 $n \geq N$ 时，有 $1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$，特别又有

$$1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon .$$

取 $\delta = \dfrac{1}{N}$，当 $0 < |x-0| < \delta$ 时，

$$1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^x < a^{\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon ,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ 得证.

前页　后页　返回

§3 函数极限存在的条件

在这一节中，我们仍以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 为代表，介绍函数极限存在的条件．对于其他类型的极限，也有类似的结论．

一、归结原则

二、单调有界定理

三、柯西收敛准则

前页 后页 返回

一、归结原则

定理 3.8 设 f 在 $U^{\circ}(x_0,\eta)$ 有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是：对于在 $U^{\circ}(x_0,\eta)$ 内以 x_0 为极限的任何数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在，并且相等.

证 (必要性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

设 $\{x_n\}\subset U^{\circ}(x_0,\eta)$, $x_n\to x_0$，那么对上述 δ，存在

N, 当 $n > N$ 时, 有

$$0 < |x_n - x_0| < \delta,$$

所以 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

(充分性) （下面的证法很有典型性，大家必须学会这种方法. ）设任给 $\{x_n\} \subset U^{\circ}(x_0, \eta)$, $x_n \to x_0$, 恒有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

若 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时, 不以 A 为极限, 则存在正数

前页 后页 返回

ε_0, 对于任意正数 δ, 存在 $x_\delta \in U^\circ(x_0, \delta)$, 使得

$$|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0.$$

现分别取

$$\delta_1 = \eta, \delta_2 = \frac{\eta}{2}, \cdots, \delta_n = \frac{\eta}{n}, \cdots,$$

存在相应的

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots, \quad x_n \in U^\circ(x, \delta_n),$$

使得

$$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0, \ n = 1, 2, \cdots.$$

前页 后页 返回

另一方面，$0<|x_n - x_0|<\delta_n = \dfrac{\eta}{n}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

这与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ 矛盾.

注　归结原则有一个重要应用：

若存在$\{x_n\},\{y_n\}\subset U^{\circ}(x_0)$, $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$, 但是

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \neq B = \lim_{n\to\infty} f(y_n),$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

例1 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 都不存在.

解 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0$, $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\to 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0\neq 1=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

同理可取 $x_n=2n\pi\to\infty$, $y_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\to\infty$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\cos x_n=1\neq 0=\lim_{n\to\infty}\cos y_n,$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 不存在.

从几何上看，$y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的图象在 $x=0$ 附近作无比密集的等幅振荡，当然不会趋于一个固定的值. 为了让读者更好地掌握其他五类极限的归结原则, 我们写出 $x \to x_0^+$ 时的归结原则如下：

定理 3.9 设 $f(x)$ 在 x_0 的某空心右邻域 $U_+^\circ(x_0)$有定义, 则

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \begin{cases} 任给 \{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0),\ x_n\to x_0, \\ 必有 \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A. \end{cases}$$

作为一个例题, 下面给出定理 3.9 的另一种形式.

例 2 设 $f(x)$在 x_0 的某空心右邻域 $U_+^\circ(x_0,\eta)$上有定义. 那么 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 的充要条件是任给严格递减的 $\{x_n\}\subset U_+^0(x_0,\eta)$, $x_n\to x_0$, 必有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

证　必要性应该是显然的. 下面我们证明充分性.

假若 $x \to x_0^+$ 时, $f(x)$ 不以 A 为极限. 则存在正数

$\varepsilon_0, \forall \delta > 0$, 存在 $x_\delta \in U_+^\circ(x_0, \delta)$, 使 $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$.

取 $\delta_1 = \eta, \exists x_1, 0 < x_1 - x_0 < \delta_1, |f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$;

$$\delta_2 = \min\{\frac{\eta}{2}, x_1 - x_0\},$$

$\exists x_2, 0 < x_2 - x_0 < \delta_2, |f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$;

$$\cdots\cdots$$

$$\delta_n = \min\{\frac{\eta}{n}, x_{n-1} - x_0\},$$

$\exists\, x_n, 0 < x_n - x_0 < \delta_n\ , | f(x_n) - A | \geq \varepsilon_0;$

……

这样就得到一列严格递减的数列 $\{x_n\} \subset U_+^\circ(x_0, \eta)$,

$x_n \to x_0$, 但 $| f(x_n) - A | \geq \varepsilon_0$, 这与条件矛盾.

前页 后页 返回

二、单调有界定理

定理 3.10 设 f 为定义在 $U_+^\circ(x_0)$ 上的单调有界函数，则右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在.

（相信读者也能够写出关于 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ 的单调有界定理.）

证 不妨设 f 在 $U_+^\circ(x_0)$ 递减. 因为 $f(x)$ 有界, 故 $\sup\limits_{x\in U_+^\circ(x_0)} f(x)$ 存在, 设为 A. 由确界定义, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x^* \in U_+^\circ(x_0)$, 使

$$A-\varepsilon< f(x^*)\le A.$$

令 $\delta=x^*-x_0$, 当 $0<x-x_0<\delta$ 时, 由 $f(x)$ 的递减性,

$$A-\varepsilon< f(x^*)\le f(x)\le A<A+\varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

对于单调函数, 归结原则的条件就要简单得多.

例3 设 $f(x)$ 在 $U_+^\circ(x_0,\eta)$ 上单调, 则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在的充要条件是存在一个数列

前页 后页 返回

$$\{x_n\} \subset U_+^\circ(x_0, \eta), \; x_n \to x_0,$$

使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在.

证 必要性可直接由归结原则得出, 下面证明充分性. 假设 $f(x)$ 递减.

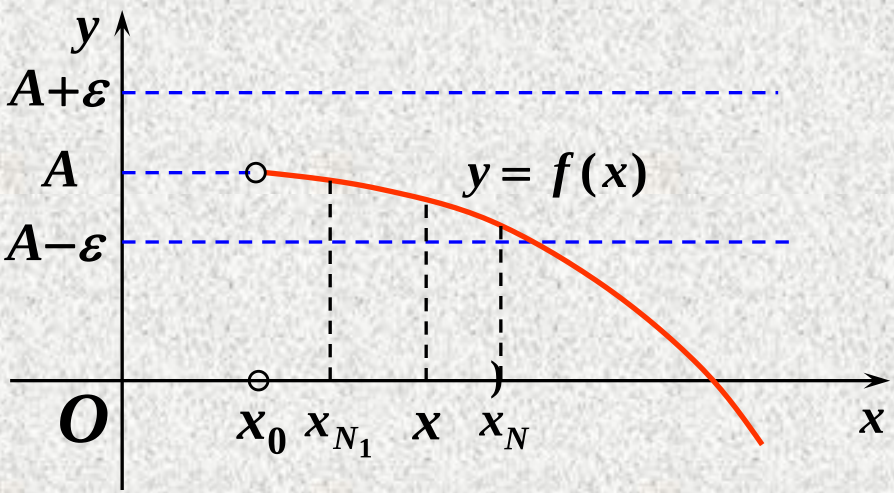
设 $\{x_n\} \subset U_+^\circ(x_0, \delta'), \; x_n \to x_0, \; \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A.$

故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n \geq N$ 时, 有

$$A - \varepsilon < f(x_n) < A + \varepsilon.$$

对于任意 $x \in U_+^\circ(x_0, x_N - x_0)$, $A - \varepsilon < f(x_N) \leq f(x)$.

前页 后页 返回



又因为 $x_n \to x_0 < x$, 所以 $\exists N_1(>N)$, 使 $x_{N_1} < x$,

从而 $f(x) \le f(x_{N_1}) < A+\varepsilon$. 因此

$$A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A.$

三、柯西收敛准则

这里仅给出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的柯西收敛准则, 请读者自行写出其他五种极限类型的柯西收敛准则, 并证明之.

定理3.11 设 $f(x)$ 在 $+\infty$ 的某个邻域 $\{x \mid x > M\}$ 上有定义, 则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充要条件是: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $X\ (> M)$, 对于任意 $x_1, x_2 > X$, 均有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

证（必要性）设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $X(>M)$，对一切 $x>X$，

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以对一切 $x_1,x_2>X$，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-A|+|f(x_2)-A|<\varepsilon.$$

（充分性）对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $X\left(>M\right)$，对一切 $x_1,x_2>X$，有

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\varepsilon.$$

前页 后页 返回

任取$\{x_n\}$, $x_n \to +\infty$，则存在N，当$n > N$时，$x_n > X$. 又当$n, m > N$时，$x_n, x_m > M$，故

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

这就是说$\{f(x_n)\}$是柯西列，因此收敛.

若存在$\{x_n\}, \{y_n\}$, $x_n \to +\infty, y_n \to +\infty$，使

$$f(x_n) \to A, f(y_n) \to B, B \neq A,$$

则令$\{z_n\}$为$x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots$，显然$z_n \to +\infty$.

但$\{f(z_n)\}$发散，矛盾.

这样就证明了对于任意的 $\{x_n\}, x_n \to +\infty,$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在且相等. 由归结原则, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

注 由柯西准则可知, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在的充要条件是：$\exists \varepsilon_0 > 0,$ 以及 $\{x_n\}, \{y_n\},$ 虽然

$$x_n \to +\infty,\ \ y_n \to +\infty,$$

但是

$$\left| f(x_n) - f(y_n) \right| \geq \varepsilon_0 .$$

前页 后页 返回

例如, 对于$y=\sin x$, 取$\varepsilon_0=1$,

$$x_n=2n\pi,\ y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2},$$

但是$\left|\sin x_n-\sin y_n\right|=1\geq\varepsilon_0$. 这就说明$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$不存在.

§4 两个重要的极限

一、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

二、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

一、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

命题1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

证 因为 $\sin x < x < \tan x\ \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$, 所以

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}\ . \tag{1}$$

不等式中的三个表达式均是偶函数, 故当

$0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$时, (1) 式仍成立.

前页 后页 返回

因为 $\lim\limits_{x\to 0} 1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$,

即 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

例1 求 $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

解 令 $t = x - \pi$, $\sin x = \sin(t+\pi) = -\sin t$, 所以

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{t} = -1.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 令 $t=\arctan x,\quad x=\tan t,$ 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\lim_{t\to 0}\cos t=1.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

二、 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

命题2 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$

证 我们只需证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad 和 \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

设两个分段函数分别为:

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n, \quad n\le x<n+1, \quad n=1,2,\cdots;$$

$$g(x)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\quad n\le x<n+1,\quad n=1,2,\cdots.$$

显然有

$$f(x)\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\le g(x),\ x\in[1,+\infty).$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e},$$

所以由函数极限的迫敛性，得到

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}. \qquad (2)$$

当 $x<0$时, 设 $x=-y,\ y>0$, 则

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}.$$

因为当 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$, 所以

前页 后页 返回

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=\mathrm{e}\,.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}\,.$

注 若令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x\to\infty$ 时, $t\to 0$. 由此可得

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}. \tag{3}$$

在实际应用中, 公式(2)与(3)具有相同作用.

前页 后页 返回

例4 求 $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

解 由公式(3),

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2=\mathrm{e}^2.$$

例5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

解 因为 $\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,

$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-\frac{n}{n-1}}\geq\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-2}.$$

前页 后页 返回

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, $\dfrac{n-1}{n^2} \to 0$, 所以由归结原则,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}} = \mathrm{e}.$$

再由迫敛性, 求得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n = \mathrm{e}.$$

§5 无穷大量与无穷小量

由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 等同于 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-A)=0$，因此函数极限的性质与无穷小量的性质在本质上是相同的. 所以有人把 “数学分析” 也称为 “无穷小分析” .

一、无穷小量

二、无穷小量阶的比较

三、无穷大量

四、渐近线

一、无穷小量

定义1　设 f 在点 x_0 的某邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有定义，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称 f 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

若 f 在点 x_0 的某个空心邻域内有界，则称 f 为 $x \to x_0$ 时的有界量.

类似地可以分别定义 f 为

$$x \to x_0^+,\ x \to x_0^-,\ x \to \infty,\ x \to +\infty,\ x \to -\infty$$

时的无穷小量和有界量.

例如: $x-1$为$x\to 1$时的无穷小量;

$\sqrt{1-x^2}$ 为 $x\to 1^-$ 时的无穷小量;

$\dfrac{\sin x}{x}$为$x\to\infty$时的无穷小量;

$\sin x$为$x\to\infty$时的有界量.

显然，无穷小量是有界量. 而有界量不一定是无穷小量.

对于无穷小量与有界量，有如下关系:

1. 两个(类型相同的)无穷小量的和，差，积仍是无穷小量.

2. 无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量.

性质1可由极限的四则运算性质直接得到.

下面对性质 2 加以证明.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, |g(x)|\le M, x\in U^\circ(x_0)$. 对于任意的 $\varepsilon>0$, 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 所以存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M+1}$, 从而

前页 后页 返回

$$|f(x)g(x)|<\varepsilon.$$

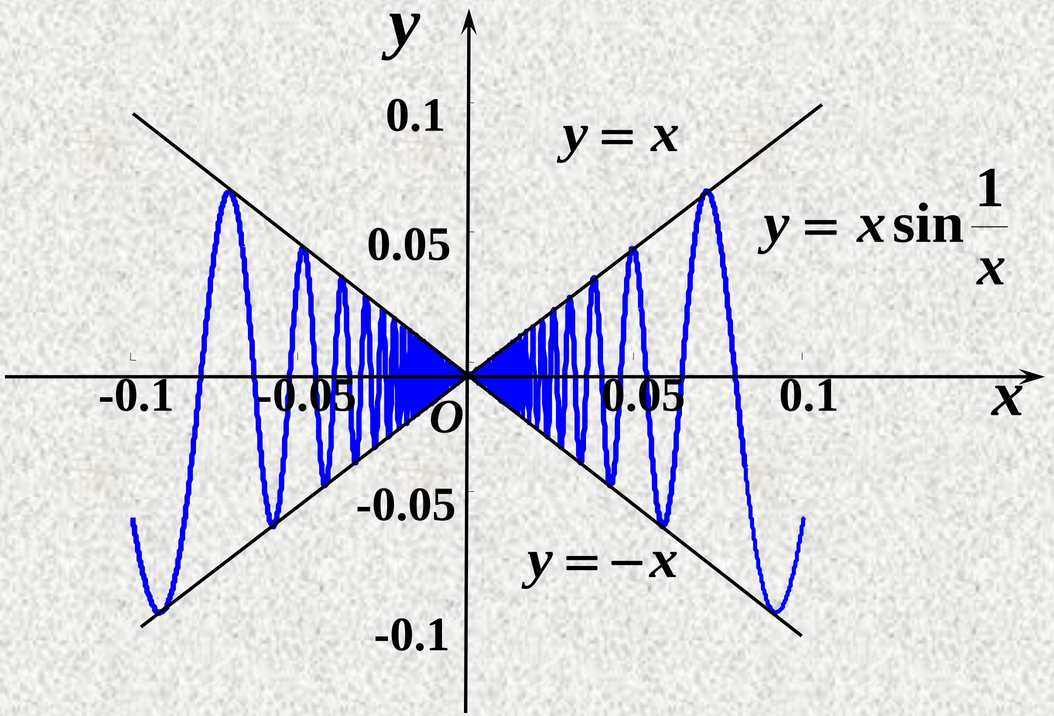
这就证明了 $f(x)g(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

例如: x 为 $x\to 0$ 时的无穷小量，$\sin\frac{1}{x}$ 为 $x\to 0$ 时的有界量，那么 $x\sin\frac{1}{x}$ 为 $x\to 0$ 时的无穷小量.

应当注意，下面运算的写法是错误的:

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0} x\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0.$$

从几何上看，曲线 $y = x\sin\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 近旁发生无限密集的振动，其振幅被两条直线 $y = \pm x$ 所限制.



前页 后页 返回

二、无穷小量阶的比较

两个相同类型的无穷小量，它们的和、差、积仍是无穷小量，但是它们的商一般来说是不确定的.这与它们各自趋于零的速度有关.为了便于考察两个无穷小量之间趋于零的速度的快慢，我们给出如下定义.

设当 $x \to x_0$ 时，$f(x), g(x)$ 均是无穷小量 .

1. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 是关于 $g(x)$

的高阶无穷小量，记作

$$f(x)=o(g(x))\ \ (x\to x_0).$$

当 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量时，我们记

$$f(x)=o(1)\ \ (x\to x_0).$$

例如：$1-\cos x=o(x)\ \ (x\to 0)$；

$$\sin x=o(1)\ \ (x\to 0);$$

$$x^{k+1}=o(x^k)\ (x\to 0, k>0).$$

2. 若存在正数 K 和 L，使得在 x_0 的某一空心邻域 $U^{\circ}(x_0)$ 内，有

$$L \le \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le M,$$

则称 $f(x)$与 $g(x)$是 $x \to x_0$ 时的同阶无穷小量.

根据函数极限的保号性，特别当

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = c \ne 0$$

时，这两个无穷小量一定是同阶的.

例如: 当 $x \to 0$ 时, $1-\cos x$ 与 x^2是同阶无穷小量;

前页 后页 返回

当 $x \to 0$ 时，x 与 $x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$ 是同阶无穷小量.

3. 若两个无穷小量在 $U^{\circ}(x_0)$ 内满足: $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le L$,

则记 $f(x)=O(g(x))\ \ (x\to x_0)$.

$f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的有界量时，我们记

$$f(x)=O(1)\ \ (x\to x_0).$$

应当注意，若 $f(x), g(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的同阶无穷小量，当然有

前页 后页 返回

$$f(x)=O(g(x))\ \ (x\to x_0).$$

反之不一定成立，例如

$$x\sin\frac{1}{x}=O(x)\ \ (x\to 0).$$

但是这两个无穷小量不是同阶的.

注意：这里的 $f(x)=o(g(x))$ 与 $f(x)=O(g(x))$ $(x\to x_0)$ 和通常的等式是不同的，这两个式子的右边，本质上只是表示一类函数. 例如 $o(g(x))$ $(x\to x_0)$ 表示 $g(x)$ 的所有高阶无穷小量的集合.

也就是说，这里的 “=” 类似于“∈”.

4. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的等价无穷小量，记作

$$f(x) \sim g(x) \ (x \to x_0).$$

因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, 所以 $\sin x \sim x \, (x \to 0)$;

因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$, 所以 $\arctan x \sim x \, (x \to 0)$;

前页 后页 返回

同样还有 $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \ (x \to 0)$.

根据等价无穷小量的定义，显然有如下性质：

若 $f(x) \sim g(x)\,(x \to x_0),\ g(x) \sim h(x)\,(x \to x_0)$,

那么 $f(x) \sim h(x)\,(x \to x_0)$. 这是因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)} = 1 .$$

前面讨论了无穷小量阶的比较, 值得注意的是，并不是任何两个无穷小量都可作阶的比较. 例如

$\dfrac{\sin x}{x}$ 与 $\dfrac{1}{x^2}$ 均为 $x \to +\infty$ 时的无穷小量，却不能按照前面讨论的方式进行阶的比较. 这是因为

$$\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1}{x^2}} = x\sin x \ (x \to +\infty)$$

是一个无界量，并且 $(2n\pi)\sin(2n\pi) \to 0$.

下面介绍一个非常有用的定理：

定理3.12 设函数 f, g, h 在 $U^{\circ}(x_0)$ 内有定义，且

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0).$$

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)h(x) = A$；

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{f(x)} = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{g(x)} = A$.

证 (1) 因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)h(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$，所以

$$\lim_{x \to x_0} g(x)h(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} f(x)h(x) = A.$$

(2) 可以类似地证明.

定理 3.12 告诉我们，在求极限时，乘积中的因子可用等价无穷小量代替，这是一种很有用的方法.

例1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\sin 2x}$.

解 因为 $\arctan x \sim x$，$\sin 2x \sim 2x$ $(x \to 0)$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

例2 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

三、无穷大量

定义2 设函数 f 在 $U^{\circ}(x_0)$ 有定义, 若对于任给 $G>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in U^{\circ}(x_0;\delta)\subset U^{\circ}(x_0)$ 时, 有

$$|f(x)|>G,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大量, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

若定义中的 $|f(x)|>G$ 改为 $f(x)>G$ 或 $f(x)<-G$, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

相应地称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的正无穷大量和负无穷大量.

类似地可以定义如下的无穷大量:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty.$$

请读者自行写出它们的定义.

例3 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

证 $\forall G>0$，取 $\delta=\dfrac{1}{\sqrt{G}}$，当 $0<|x|<\delta$ 时，$\dfrac{1}{x^2}>G$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

例4 当 $a>1$ 时，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$.

证 $\forall\, G>0$ (不妨设 $G>1$), 令$M=\log_a G$，由对数函数 $\log_a x$ 的严格递增性，当 $x>M$ 时，$a^x>G$，

这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$.

例5 证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$.

证 对 $\forall G>0$,要找到 $\delta>0$,使得 $\forall\, 0<x<\delta$,

$$\ln x < -G.$$

由于 $\ln x$ 单调增, 只要令 $\delta = \mathrm{e}^{-G} > 0$ 即可.

例6 设$\{a_n\}$递增，无上界. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

证 因为$\{a_n\}$无上界，所以任给 $G>0$，存在 n_0，

使 $a_{n_0} > G$. 又因$\{a_n\}$递增，故当 $n>n_0$ 时，有

$a_n \ge a_{n_0} > G$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

从无穷大量的定义与例3、例4和例5可以看出:

无穷大量不是很大的一个数，而是具有非正常的极限．很明显，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 那么 $f(x)$ 在 x_0 的任何一个邻域内无界．但值得注意的是: 若 $f(x)$ 在 x_0 的任何邻域内无界 (称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无界量)，并不能保证 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 的无穷大量.

例如: $f(x)=x\sin x$ 在 ∞ 的任何邻域内无界，但却不是 $x\to\infty$ 时的无穷大量．事实上，对

$$x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad y_n = 2n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

有

$$f(x_n) \to \infty, \quad f(y_n) \to 0.$$

因而 $f(x)$不是 $x\to\infty$ 时的无穷大量.

两个无穷大量也可以定义阶的比较. 设

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

1. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称 $g(x)$ 是关于 $f(x)$ 的高阶无穷大量.

2. 若存在正数 L, K 和正数 δ, 使 $x \in U^{\circ}(x_0, \delta)$ 时,

$$L \le \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \le K,$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的一个同阶无穷大量.

3. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时

的等价无穷大量，记为

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0.$$

下述定理反映了无穷小量与无穷大量之间的关系，直观地说：无穷大量与无穷小量构成倒数关系.

定理3.13

(1) 若 f 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量，且不等于零，则 $\frac{1}{f}$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量.

(2) 若 g 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量，则 $\frac{1}{g}$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

证 这里仅证明定理的 (1). 对于任意正数G，因为 f 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量，所以存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x)| < \frac{1}{G}\text{，即}\left|\frac{1}{f(x)}\right| > G,$$

这就证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

例7 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，求证

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty.$$

证 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b\neq 0$, 由极限的保号性，存在

$\delta_1>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有

$$|f(x)|\geq \frac{|b|}{2}.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，所以对于任意正数$G$，存在

$\delta_2>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，

$$|g(x)|>\frac{2}{|b|}G.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x)g(x)| \geq \frac{|b|}{2} \cdot \frac{2}{|b|} \cdot G = G,$$

即

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \infty.$$

注 对于函数 $f(x) = x$，$g(x) = \dfrac{1}{x}$，当 $x \to 0$ 时，有

$$\lim_{x \to 0} f(x)g(x) = 1 \neq \infty.$$

这就说明了当 $b = 0$ 时结论不一定成立.

例8 设 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无界量．证明：存在 $x_n \neq x_0, x_n \to x_0$ ，使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty.$$

证 因为 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 为无界量， 所以 $\forall G > 0$, $\forall \delta > 0$, 都存在 x_δ ,当 $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$ 时，使得

$$|f(x_\delta)| > G.$$

对 $G_1 = 1$, $\delta_1 = 1$, $\exists x_1$，当 $0 < |x_1 - x_0| < 1$ 时，

$$|f(x_1)| > 1;$$

前页 后页 返回

对 $G_2=2$, $\delta_2=\frac{1}{2}$, $\exists x_2$, 当 $0<|x_2-x_0|<\frac{1}{2}$ 时,

$$|f(x_2)|>2;$$

对 $G_n=n$, $\delta_n=\frac{1}{n}$, $\exists x_n$, 当 $0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$ 时,

$$|f(x_n)|>n;$$

由此得到一列 $\{x_n\}$，满足 $x_n\neq x_0$, $x_n\to x_0$, 且

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n)=\infty.$$

注　例8的证明虽然有些难度，但它却提供了选取符合要求的点列的一种方法. 熟练地掌握这种方法, 对提高解题能力是有益处的.

四、渐近线

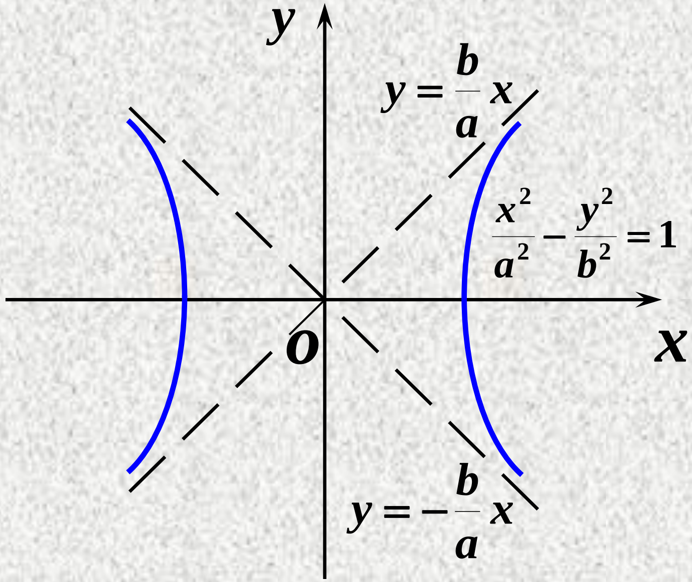
作为函数极限的一个应用，我们来讨论曲线的渐近线问题.

在中学里我们已经知道双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

它的渐近线方程为

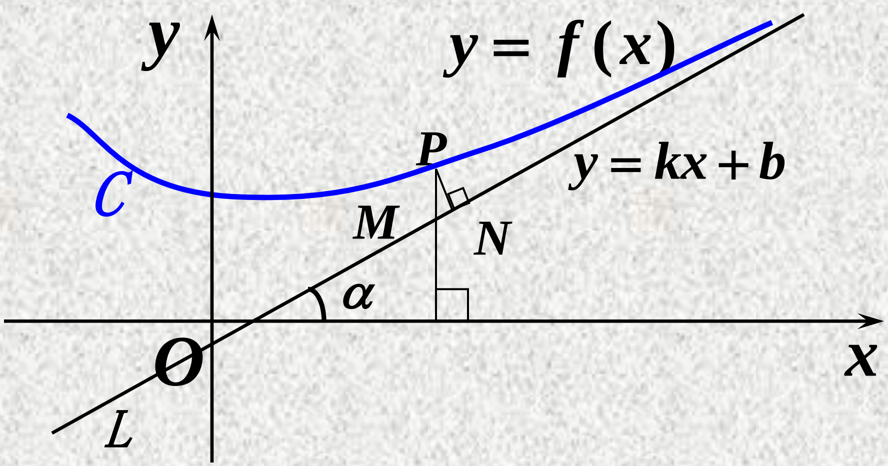
$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$



前页 后页 返回

下面给出渐近线的一般定义.

定义4 设 L 是一条直线, 若曲线 C 上的动点 P 沿曲线无限远离原点时, 点 P 与 L 的距离趋于零, 则称直线 L 为曲线 C 的一条渐近线(如图).



前页 后页 返回

首先，我们来看如何求曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

如图所示，设斜渐近线 L 的方程为 $y = kx + b$. 曲线上的动点 $P(x, y)$ 至直线 L 的距离为

$$|PN| = |PM| \cdot |\cos\alpha| = \frac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

由渐近线的定义，$x \to +\infty$ 时 (或 $x \to -\infty$, $x \to \infty$ 时），$PN \to 0$, 即

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - kx - b}{\sqrt{1+k^2}} = 0,$$

前页 后页 返回

从而

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx].$$

又

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-kx}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0,$$

所以,

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

前页 后页 返回

这样就确定了斜渐近线的两个参数：

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx].$$

这是沿 x 轴正向的渐近线的方程. 显然沿 x 轴负向的斜渐近线的斜率和截距分别为

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx].$$

同样也可以求出沿着 $x\to-\infty$ 的渐近线方程.

注 特别当 $k=0$ 时，该渐近线称为水平渐近线.

显然，曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线的充要条件是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\,(\neq\infty)$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=A,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=A\right).$$

若函数 $f(x)$满足

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$$

$$\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty \text{ 或 } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty\right),$$

则称 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

例9 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线.

解 设 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)}$，易见

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to -3} f(x)=\infty.$$

并且 $f(x)$ 在其他点处均有有限极限，所以求得垂直渐近线为:

$$x=1,\ x=-3.$$

前页 后页 返回

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(x+3)(x-1)}=1$，得 $k=1$；

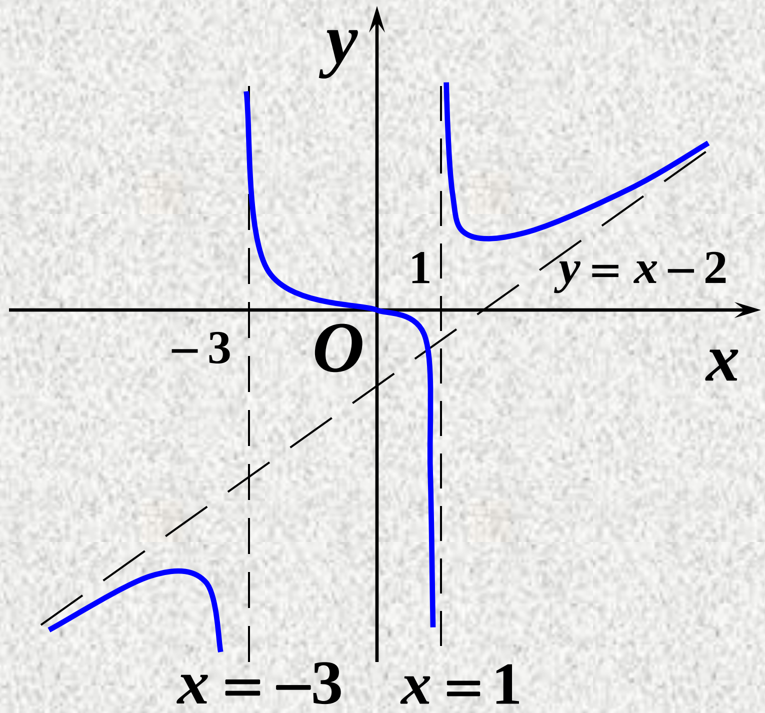
$$f(x)-x=\frac{x^3}{x^2+2x-3}-x$$

$$=\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3},$$

得 $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=-2$.

于是求得斜渐近线方程为

$y=x-2$.（如右图所示）



前页 后页 返回