

《高等数学》第十章——无穷级数

练习题——王阳

一、选择题

1. 下列级数通项为 $u_n = \frac{1}{2n-1}$ 的是 ()

- (A) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$ (B) $\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \dots$
 (C) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ (D) $\frac{1}{1 \cdot 4} - \frac{x}{4 \cdot 7} + \frac{x^2}{7 \cdot 10} - \frac{x^3}{10 \cdot 13} + \dots$

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项部分和 $s_n = \frac{n}{2n+1}$, 则 ()

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 $\frac{1}{2}$
 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的余项 $r_n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性无法确定

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{q^n}$ (a 为常数) 收敛的充分条件是 ()

- (A) $|q| > 1$ (B) $|q| = 1$ (C) $|q| < 1$ (D) $|q| \neq 1$

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 且前 n 项部分和为 s_n , 则 ()

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$
 (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$
 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 任意加括号后所成的级数必发散

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 任意加括号后所成的级数可能收敛

5. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 那么下列级数中发散的是 ()

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} 2u_n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 1)$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+10}$ (D) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

6. 下列结论正确的是 ()

- (A) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3n} + \dots$ 收敛
 (B) $\frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2 + (\frac{3}{2})^3 + \dots + (\frac{3}{2})^n + \dots$ 收敛
 (C) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 13} + \dots$ 发散
 (D) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + \dots + (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) + \dots$ 收敛

7. 下列结论错误的是 ()

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 一定发散
 (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散
 (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$ 可能收敛也可能发散
 (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 收敛

8. 下列结论正确的是 ()

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - 1)$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
- (C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 不存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 收敛

9. 下列发散的级数是 ()

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}})$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
- (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

10. 设有两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 则下列结论中正确的是 ()

- (A) 若 $u_n \leq v_n$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛
- (B) 若 $u_n \leq v_n$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 一定发散
- (C) 若 $0 \leq u_n \leq v_n$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛
- (D) 若 $0 \leq u_n \leq v_n$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 一定收敛

11. 关于 p 级数, 下列结论错误的是 ()

- (A) $p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散 (B) $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛
- (C) $p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p}$ 收敛 (D) $p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p}$ 发散

12. 下列发散的级数是 ()

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)}}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2})$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$

13. 下列收敛的级数是 ()

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b} (a > 0, b > 0)$
- (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi}{n} \right)^2$

14. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n (u_n > 0)$ 收敛的充分条件是 ()

- (A) $u_{n+1} \leq u_n (n=1, 2, 3, \dots)$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$
- (C) $u_{n+1} \leq u_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (u_n - u_{n+1})$ 收敛

15. 关于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$, 下列结论中正确的是 ()

- (A) $0 < p \leq 1$ 时条件收敛 (B) $0 < p \leq 1$ 时绝对收敛
- (C) $p > 1$ 时条件收敛 (D) $0 < p \leq 1$ 时发散

16. 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 下列结论错误的是 ()

- (A) 若仅在 $x=0$ 收敛, 则其收敛半径 $R=0$
- (B) 若在 $(-\infty, +\infty)$ 绝对收敛, 则其收敛半径 $R=\infty$
- (C) 若在 $|x| < R$ 时绝对收敛, $|x| > R$ 时发散, 则其收敛域为 $(-R, R)$
- (D) 若在 $|x| < R$ 时绝对收敛, $|x| > R$ 时发散, 则其收敛区间为 $(-R, R)$

17.下列结论正确的是 ()

- (A) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛
- (B) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散
- (C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 也收敛
- (D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 有可能收敛

18.下列级数绝对收敛的是 ()

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$
- (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^2+1}{n} \pi$

19.幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} x^n$ 的收敛域是 ()

- (A) $[-1,1]$ (B) $(-1,1]$ (C) $[-1,1)$ (D) $(-1,1)$

20.设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(0 < R < +\infty)$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\frac{x}{4})^n$ 的收敛半径是 (A)

- (A) $4R$ (B) $\frac{R}{4}$ (C) R (D) $\frac{4}{R}$

21.下列式子不成立的是 ()

- (A) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty)$ (B) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty, +\infty)$
- (C) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in [-1,1]$ (D) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, x \in (-1,1]$

三、二、填空题 (将正确答案填写在横线上)

1. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的收敛半径是_____.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\frac{x}{2})^n$ 的收敛区间是 _____
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} (x-1)^n$ 的收敛区间是_____
4. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的收敛半径是_____.

三、证明题

- 1.试用比值审敛法证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n2^n}$ 发散, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$ 收敛.
3. 试用极限审敛法证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{n^4+1}}$ 收敛.
3. 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{3^n}$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{n^2}}{n!}$ 发散.

四、计算题

1. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n$ 的收敛区间
2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (x-5)^n$ 的收敛域
3. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ 的和函数.
4. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} x^{4n+1}$ 在收敛区间内的和函数..