§1 含参量正常积分

对多元函数其中的一个自变量进行积分形成的函数称为含参量积分，它可用来构造新的非初等函数．含参量积分包含正常积分和非正常积分两种形式.

一、含参量正常积分的定义

设 $f(x, y)$是定义在矩形区域 $R=[a, b]\times[c, d]$上的二元函数. 当 x取$[a, b]$上的定值时, 函数 $f(x, y)$ 是定义在$[c, d]$上以 y 为自变量的一元函数. 倘若这时 $f(x, y)$在$[c, d]$上可积, 则其积分值

$$I(x)=\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\ , x\in[a, b] \tag{1}$$

是定义在$[a, b]$上的函数.

一般地, 设 $f(x, y)$为定义在区域

前页 后页 返回

$$G=\{(x,y)\,|\,c(x)\le y\le d(x)\,,a\le x\le b\}$$

上的二元函数, 其中$c(x)$, $d(x)$为定义在$[a,b]$上的连续函数(图19-1),

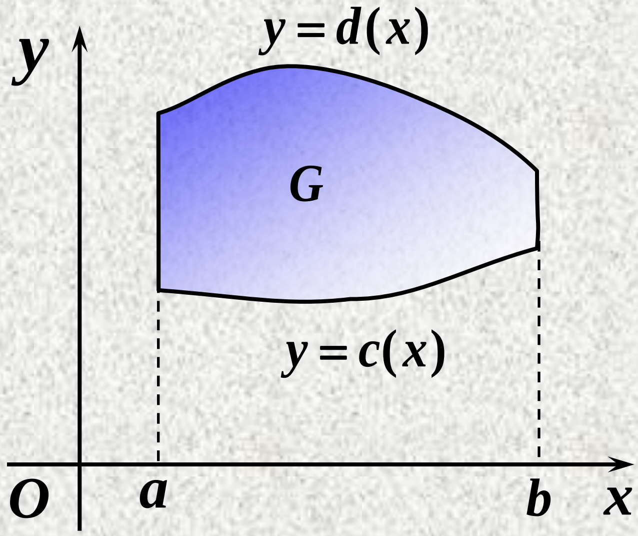

图19－1

若对于$[a,b]$上每一固定的 x 值, $f(x,y)$作为 y 的函

前页 后页 返回

数在闭区间$[c(x), d(x)]$上可积, 则其积分值

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\mathrm{d}y, \ x\in[a, b] \qquad (2)$$

是定义在$[a,b]$上的函数.

用积分形式 (1) 和 (2) 所定义的这函数$I(x)$与$F(x)$

通称为定义在$[a, b]$上的含参量 x 的(正常)积分,

或简称为含参量积分.

二、含参量正常积分的连续性

定理19.1 ($I(x)$的连续性) 若二元函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $R=[a, b]\times[c, d]$ 上连续，则函数

$$I(x)=\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$$

在 $[a, b]$ 上连续.

证 设 $x\in[a, b]$，对充分小的 Δx，有 $x+\Delta x\in[a, b]$（若 x 为区间的端点，则仅考虑 $\Delta x>0$ 或 $\Delta x<0$），于是

前页 后页 返回

$$I(x+\Delta x)-I(x)=\int_c^d[f(x+\Delta x,y)-f(x,y)]\mathrm{d}y, \quad (3)$$

由于$f(x,y)$在有界闭区域R上连续，从而一致连续，即对任意$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，对R内任意两点(x_1,y_1)与(x_2,y_2)，只要

$$|x_1-x_2|<\delta, |y_1-y_2|<\delta,$$

就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon. \quad (4)$$

所以由(3), (4)可得，当$|\Delta x|<\delta$时，

$$|I(x+\Delta x)-I(x)| \le \int_c^d |f(x+\Delta x, y)-f(x, y)|\,\mathrm{d}y$$

$$< \int_c^d \varepsilon \mathrm{d}x = \varepsilon(d-c).$$

即 $I(x)$ 在$[a, b]$上连续.

同理可证: 若 $f(x, y)$在矩形区域 R上连续, 则含参量 y的积分

$$J(y) = \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x \qquad (5)$$

在$[c, d]$上连续.

定理19.2 ($F(x)$的连续性) 若二元函数 $f(x, y)$在区域$G=\{(x, y)\,|\,c(x)\le y\le d(x)\,, a\le x\le b\}$上连续，其中$c(x)$, $d(x)$为$[a, b]$上的连续函数，则函数

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \tag{6}$$

在$[a, b]$上连续.

证 对积分(6)用换元积分法, 令

$$y=c(x)+t(d(x)-c(x)).$$

当 y 在$c(x)$与$d(x)$之间取值时，t 在 $[0, 1]$ 上取值，且

$$\mathrm{d}y=(d(x)-c(x))\mathrm{d}t\,.$$

所以从(6)式可得

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 f(x,c(x)+t(d(x)-c(x)))(d(x)-c(x))\mathrm{d}t.$$

由于被积函数

$$f(x,c(x)+t(d(x)-c(x)))(d(x)-c(x))$$

在矩形区域$[a,b]\times[0,1]$上连续，由定理19.1得积分(6)所确定的函数 $F(x)$ 在$[a,b]$连续.

三、含参量正常积分的可微性

定理19.3 (**$I(x)$的可微性**) 若函数$f(x, y)$与其偏导数 $f_x(x, y)$ 都在矩形区域 $R=[a, b]\times[c, d]$上连续, 则函数

$$I(x)=\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$$

在$[a, b]$上可微, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y=\int_c^d f_x(x, y)\mathrm{d}y .$$

证 对于$[a,b]$内任意一点x, 设 $x+\Delta x\in[a,b]$(若x为区间的端点，则讨论单侧函数)，则

$$\frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x}=\int_c^d\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\mathrm{d}y\,.$$

由微分学的拉格朗日中值定理及 $f_x(x,y)$在有界闭域 R上连续(从而一致连续), 对$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$, 只要$\Delta x<\delta$时，就有

$$\left|\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}-f_x(x,y)\right|$$

$$=\left|f_x(x+\theta\Delta x, y)-f_x(x, y)\right|<\varepsilon,$$

其中$\theta\in(0,1)$. 因此

$$\left|\frac{\Delta I}{\Delta x}-\int_c^d f_x(x, y)\mathrm{d}y\right|$$

$$\leq\int_c^d\left|\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}-f_x(x, y)\right|\mathrm{d}y$$

$$\leq\varepsilon(d-c).$$

这就证明了对一切$x\in[a,b]$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} I(x) = \int_c^d f_x(x, y)\mathrm{d}y .$$

定理19.4 (**$F(x)$的可微性**) 设 $f(x, y), f_x(x, y)$在 $R = [a, b] \times [p, q]$上连续, $c(x), d(x)$为定义在$[a, b]$上其值含于$[p, q]$内的可微函数, 则函数

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\mathrm{d}y$$

在$[a, b]$上可微, 且

$$F'(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x, y)\mathrm{d}y + f(x, d(x))d'(x)$$

$$- f(x, c(x))c'(x) . \qquad (7)$$

证 把 $F(x)$ 看作复合函数:

$$F(x)=H(x,c,d)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\,,$$

$$c=c(x)\,,\,d=d(x)\,.$$

由复合函数求导法则及变动上限积分的性质, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial c}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial H}{\partial d}\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}x}$$

$$=\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y+f(x,d(x))d'(x)$$

$$-f(x,c(x))c'(x)\,.$$

注 由于可微性也是局部性质, 定理19.3 中条件 f 与 f_x 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续可改为在 $\mathfrak{I}\times[c,d]$ 上连续, 其中 $\mathfrak{I}$ 为任意区间.

四、含参量正常积分的可积性

由定理19.1与定理19.2推得:

定理19.5 ($I(x)$的可积性) 若 $f(x, y)$ 在矩形区域 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上连续, 则 $I(x)$ 与 $J(x)$ 分别在 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 上可积.

这就是说: 在 $f(x, y)$ 连续性假设下, 同时存在两个求积顺序不同的积分:

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \quad 与 \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y .$$

为书写简便起见，今后将上述两个积分写作

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y \quad 与 \quad \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x .$$

前者表示 $f(x, y)$先对 y 求积然后对 x 求积，后者则表示求积顺序相反. 它们统称为累次积分.

在 $f(x, y)$连续性假设下,累次积分与求积顺序无关.

定理19.6 若 $f(x, y)$在矩形区域 $R=[a, b]\times[c, d]$ 上连续, 则

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x . \tag{8}$$

证 记

$$I_1(u)=\int_a^u \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\,,\ I_2(u)=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^u f(x,y)\mathrm{d}x\,,$$

其中 $u\in[a,b]$，现在分别求 $I_1(u)$ 与 $I_2(u)$ 的导数.

$$I_1'(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^u I(x)\mathrm{d}x=I(u)\,.$$

对于 $I_2(u)$，令 $H(u,y)=\int_a^u f(x,y)\mathrm{d}x$，则有

$$I_2(u)=\int_c^d H(u,y)\mathrm{d}y\,.$$

因为 $H(u,y)$ 与 $H_u(u,y)=f(u,y)$ 都在 R 上连续，由

前页 后页 返回

定理19.3,

$$I_2'(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_c^d H(u,y)\mathrm{d}y=\int_c^d H_u(u,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d f(u,y)\mathrm{d}y=I(u).$$

故得 $I_1'(u)=I_2'(u)$, 因此对一切 $u\in[a,b]$, 有

$$I_1(u)=I_2(u)+k \quad (k\text{为常数}).$$

当 $u=a$时, $I_1(a)=I_2(a)=0$,于是 $k=0$, 即得

$$I_1(u)=I_2(u),\quad u\in[a,b].$$

取 $u=b$ 就得到所要证明的(8)式.

五、例题

例1 求 $\lim\limits_{a \to 0} \int_a^{1+a} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+a^2}$.

解 记 $I(a) = \int_a^{1+a} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+a^2}$. 由于 a ,$1+a$ 以及 $\frac{1}{1+x^2+a^2}$ 都是 a 和 x 的连续函数, 由定理19.2 已知 $I(a)$ 在 $a=0$ 处连续, 所以

$$\lim_{a \to 0} I(a) = I(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

例2 计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x\,.$$

解 令

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x\,,\ \alpha\in[0,1].$$

显然$I(0)=0,\ I(1)=I$, 且函数$I(\alpha)$在 $R=[0,1]\times[0,1]$

上满足定理19.3的条件, 于是

$$I'(\alpha)=\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}\mathrm{d}x\,.$$

因为

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{\alpha+x}{1+x^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right),$$

所以

$$I'(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\int_0^1\frac{\alpha}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\alpha}{1+\alpha x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\alpha\arctan x\Big|_0^1+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1-\ln(1+\alpha x)\Big|_0^1\right]$$

$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+\alpha)\right].$$

因而

$$\int_0^1 I'(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{\alpha\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 - \ln(1+\alpha)\right] d\alpha$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln(1+\alpha^2)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln 2 \arctan\alpha\Big|_0^1 - I(1)$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \frac{\pi}{8}\ln 2 - I(1)$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - I(1).$$

另一方面

$$\int_0^1 I'(\alpha)\mathrm{d}\alpha = I(1) - I(0) = I(1),$$

所以

$$I = I(1) = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

例3 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，验证当 $|x|$ 充分小时, 函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\mathrm{d}t \qquad (9)$$

的各阶导数存在，且 $\varphi^{(n)}(x) = f(x)$.

前页 后页 返回

解 由于(9)中被积函数$F(x,t)=(x-t)^{n-1}f(t)$以及其偏导数$F_x(x,t)$在原点的某个方邻域内连续，于是由定理 19.4 可得

$$\varphi'(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (n-1)(x-t)^{n-2}f(t)\mathrm{d}t+$$

$$\frac{1}{(n-1)!}(x-x)^{n-1}f(x)$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (n-1)(x-t)^{n-2}f(t)\mathrm{d}t\ .$$

同理

$$\varphi''(x)=\frac{1}{(n-3)!}\int_0^x (n-1)(x-t)^{n-3}f(t)\mathrm{d}t,$$

如此继续下去，求得 k 阶导数为

$$\varphi^{(k)}(x)=\frac{1}{(n-k-1)!}\int_0^x (n-1)(x-t)^{n-k-1}f(t)\mathrm{d}t\,.$$

特别当$k=n-1$时有

$$\varphi^{(n-1)}(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\,,$$

于是$\varphi^{(n)}(x)=f(x)$. 附带说明：当 $x=0$ 时，$\varphi(x)$ 及其各导数为

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=\cdots=\varphi^{(n-1)}(0)=0\,.$$

例4 求 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (b>a>0)\,.$

解 因为 $\int_a^b x^y \mathrm{d}y=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$, 所以

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_a^b x^y \mathrm{d}y\,.$$

又由于函数 x^y在$R=[0,1]\times[a,b]$上满足定理19.6 的

前页 后页 返回

条件，所以交换积分顺序得到

$$I=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{1}{1+y}\mathrm{d}y=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

§2　含参量反常积分

与函数项级数相比, 含参量反常积分的重要容与方法是判别含参量反常积分的一致收敛性及在此条件下, 含参量反常积分的连续性, 可微性, 可积性. 同学们在学习含参量反常积分的一致收敛性的判别法时可与函数项级数的一致收敛性的判别法比较.

一、含参量反常积分一致收敛性

设函数 $f(x, y)$ 定义在无界区域 $R = J\times[c, +\infty)$ 上, 其中 J 是任意区间. 若 $\forall x\in J$, 反常积分

$$I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y \qquad (1)$$

都收敛，则 $I(x)$ 是 J 上的函数.

称(1)为定义在 J 上的含参量 x 的无穷限反常积分, 或称含参量反常积分.

前页 后页 返回

定义1 若含参量反常积分(1)与函数 $I(x)$对$\forall \varepsilon > 0$，

$\exists N > c$, 使得当 $M > N$时，对一切$x \in J$, 都有

$$\left| \int_c^M f(x, y)\mathrm{d}y - I(x) \right| < \varepsilon ,$$

即

$$\left| \int_M^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y \right| < \varepsilon ,$$

则称含参量反常积分(1)在 J上一致收敛于$I(x)$, 或简单地说含参量积分(1)在 J上一致收敛.

二、含参量反常积分一致收敛性的判别

定理19.7 (一致收敛的柯西准则) 含参量反常积分(1)在$[a,b]$上一致收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > c$，使得当 $A_1, A_2 > N$ 时，对一切的 $x \in [a,b]$，都有

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right| < \varepsilon . \tag{2}$$

证 必要性

若$I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$在$J$上一致收敛，则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > c, \forall A > N \text{及} x \in J, \text{有}$$

前页 后页 返回

$$\left|\int_c^A f(x,y)\,\mathrm{d}y - I(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

因此, $\forall A_1, A_2 > N,$

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_c^{A_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_c^{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leq \left|\int_c^{A_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x - I(x)\right| + \left|\int_c^{A_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x - I(x)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > c, \forall M = A_1, A_2 > N,$

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x, y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon.$$

则令 $A_2 \to +\infty$, 得 $\left|\int_{M}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right| \le \varepsilon.$

这就证明了$I(x) = \int_{c}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 在 J 上一致收敛.

例1 证明含参量反常积分

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y \qquad (3)$$

在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛(其中 $\delta>0$)，但在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛.

证 作变量代换 $u=xy$，得

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y=\int_{Ax}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\,, \tag{4}$$

其中 $A>0$, 由于 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$ 收敛，故对任给的正数 ε，总存在某一实数 M，当 $A'>M$ 时就有

$$\left|\int_{A'}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right|<\varepsilon\,.$$

取 $A\delta > M$, 则当$A > \dfrac{M}{\delta}$时，对$\forall x \ge \delta > 0$, 由 (4) 式

$$\left|\int_{A'}^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y\right| < \varepsilon ,$$

所以(3)在 $x \ge \delta > 0$ 上一致收敛.

现证明(3) 在 $(0, +\infty)$ 内不一致收敛. 由一致收敛定义的注2，只要证明：存在某一正数ε_0，使得对任何实数 $M(> c)$， 总相应地存在某个 $A > M$ 及某个 $x \in (0, +\infty)$，使得

前页 后页 返回

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right| \geq \varepsilon_0 .$$

由于非正常积分 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u} \mathrm{d}u$ 收敛 (在本节例6 中我们将求出这个积分的值)，故对 $\forall \varepsilon_0 > 0$ 与 $\forall M > 0$，总 $\exists\, x > 0$，使得

$$\left|\int_{Mx}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u\right| < \varepsilon_0 ,$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\varepsilon_0<\int_{Mx}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u<\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u+\varepsilon_0\,. \quad (5)$$

现令 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$，由(4)及不等式(5)的左端就有

$$\int_M^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y=\int_{Mx}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u>2\varepsilon_0-\varepsilon_0=\varepsilon_0.$$

所以(3)在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛.

关于含参量反常积分一致收敛性与函数项级数一致收敛之间的联系有下述定理.

定理19.8 含参量反常积分(1)在 J 上一致收敛的充要

条件是: 对任一趋于 $+\infty$ 的递增数列 $\{A_n\}$ (其中 $A_1 = c$), 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{6}$$

在 J 上一致收敛, 其中 $u_n(x) = \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

证 必要性 由(1)在 J 上一致收敛, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > c$, 使得当 $A'' > A' > M$ 时, 对一切 $x \in J$, 总有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon . \tag{7}$$

前页 后页 返回

又由$A_n \to +\infty\ (n \to \infty)$,所以对正数$M$, 存在正整数$N$, 只要当 $m > n > N$ 时, 就有$A_m > A_n > M$.由(7)对一切 $x \in J$, 就有

$$|u_n(x) + \cdots + u_m(x)| = \left|\int_{A_m}^{A_{m+1}} f(x, y)\mathrm{d}y + \cdots + \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x, y)\mathrm{d}y\right|$$

$$= \left|\int_{A_n}^{A_{m+1}} f(x, y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon .$$

这就证明了级数(6)在 J 上一致收敛.

充分性 用反证法. 假若(1)在 J 上不一致收敛, 则 $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, 对$\forall M > c$, $\exists\, A'' > A' > M$和 $x' \in J$, 使得

前页 后页 返回

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x', y)\mathrm{d}y\right| \geq \varepsilon_0 .$$

现取 $M_1 = \max\{1, c\}$, 则存在 $A_2 > A_1 > M_1$ 及 $x_1 \in [a, b]$, 使得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x_1, y)\mathrm{d}y\right| \geq \varepsilon_0 .$$

一般地，取 $M_n = \max\{n, A_{2(n-1)}\} \, (n \geq 2)$,

则有 $A_{2n} > A_{2n-1} > M_n$ 及 $x_n \in J$，使得

$$\left|\int_{A_{2n-1}}^{A_{2n}} f(x_n, y)\mathrm{d}y\right| \geq \varepsilon_0 . \tag{8}$$

由上述所得到的数列$\{A_n\}$是递增数列，且$\lim\limits_{n\to\infty} A_n =$ $+\infty$. 现在考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x, y)\mathrm{d}y .$$

由(8)式知存在正数ε_0，对任何正整数N，只要$n > N$，就有某个$x_0 \in J$，使得

$$\left|u_{2n}(x_n)\right| = \left|\int_{A_{2n}}^{A_{2n+1}} f(x_n, y)\mathrm{d}y\right| \geq \varepsilon_0 .$$

这与级数(6)在J上一致收敛的假设矛盾．故含参量

反常积分在 J 上一致收敛.

魏尔斯特拉斯 M 判别法　设有函数 $g(y)$，使得

$$|f(x,y)| \le g(y),\ x \in J,\ c \le y < +\infty.$$

若 $\int_c^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y$ 收敛, 则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 J 上一致收敛.

证 由于 $\int_c^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y$ 收敛, $\exists N > c, \forall A_1, A_2 > N,$

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} g(y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon.$$

因此

$$\forall A_1, A_2 > N \text{ 及 } x \in [c,d],$$

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_{A_1}^{A_2} g(y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon.$$

从而 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 J 上一致收敛.

狄利克雷判别法 设

(i) 对一切实数 $N > c$, 含参量正常积分

$$\int_c^N f(x,y)\mathrm{d}y$$

对参量 x 在 J 上一致有界，即存在正数M，对一切 $N > c$, 及一切 $x \in J$, 都有

$$\left|\int_c^N f(x,y)\mathrm{d}y\right| \le M;$$

(ii)对每一个 $x \in J$，函数 $g(x,y)$ 关于 y 单调且当

$y \to +\infty$ 时，对参量 x，$g(x,y)$ 一致收敛于0,

则含参量反常积分

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$$

在 J 上一致收敛.

证 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > c, \forall A > N$，有$|g(A)| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$.

于是，$\forall A_1, A_2 > N$，由积分第二中值定理，

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y\right|$$

$$= \left|g(A_1)\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y + g(A_2)\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|$$

$$\le \left|g(A_1)\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right| + \left|g(A_2)\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|$$

$$\le \left|g(A_1)\right|\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right| + \left|g(A_2)\right|\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2M}\cdot M + \frac{\varepsilon}{2M}\cdot M = \varepsilon.$$

由一致收敛的柯西准则, $\int_c^{+\infty} f(x, y)g(x, y)\mathrm{d}y$ 在 J 上一致收敛.

阿贝耳判别法　设

(i) $\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 在 J 上一致收敛;

(ii) 对每一个 $x \in J$, 函数 $g(x, y)$ 为 y 的单调函数, 且对参量 x, $g(x, y)$ 在 J 上一致有界,

则含参量反常积分

$$\int_c^{+\infty} f(x, y)g(x, y)\mathrm{d}y \text{ 在 } J \text{ 上一致收敛.}$$

例2 证明含参量反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} \mathrm{d}x \qquad (10)$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

证 由于对任何实数 y 有

$$\left|\frac{\cos xy}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2},$$

及反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 收敛，故由魏尔斯特拉斯 M 判别法，含参量反常积分(10)在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

例3 证明含参量反常积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \qquad (11)$$

在 $[0, d]$ 上一致收敛.

证 由于反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛(当然, 对于参量 y, 它在 $[0, d]$ 上一致收敛), 函数 $g(x, y) = \mathrm{e}^{-xy}$ 对每一个 $x \in [0, d]$ 单调, 且对任何 $0 \le y \le d$, $x \ge 0$ 都有

$$|g(x, y)| = \left|\mathrm{e}^{-xy}\right| \le 1 .$$

故由阿贝耳判别法即得含参量反常积分(11)在$[0,d]$上一致收敛.

例4 证明: 若 $f(x,y)$在$[a,b]\times[c,+\infty)$上连续, 又

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在$[a,b)$上收敛, 但在 $x=b$ 处发散, 则

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在$[a,b)$上不一致收敛.

前页 后页 返回

证 用反证法. 假若积分在$[a,b)$上一致收敛, 则对于任给$\varepsilon>0$, 总存在$M>c$, 当$A, A'>M$时对一切$x\in[a,b)$恒有

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon .$$

因$f(x,y)$在$[a,b]\times[A,A']$上连续, 所以$\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}y$是$x$的连续函数. 在上面不等式中令$x\to b^-$,得到当$A'>A>M$时,

$$\left|\int_A^{A'} f(b,y)\,\mathrm{d}y\right| \le \varepsilon .$$

而 ε 是任给的, 因此 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $x=b$ 处收敛, 这与假设矛盾. 所以积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b)$ 上不一致收敛.

三、含参量反常积分的性质

定理19.9 (含参量反常积分的连续性)

设 $f(x, y)$在$J\times[c,+\infty)$上连续, 若含参量反常积分

$$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{12}$$

在 J 上一致收敛, 则 $I(x)$ 在 J 上连续.

证 由定理19.8, 对任一递增且趋于$+\infty$的数列$\{A_n\}$ $(A_1=c)$, 函数项级数

$$I(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x, y)\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \tag{13}$$

前页 后页 返回

在 J 上一致收敛. 又由于 $f(x, y)$ 在 $J\times[c, +\infty)$ 上连续, 故每个 $u_n(x)$ 都在 J 上连续. 根据函数项级数的连续性定理, 函数 $I(x)$ 在 J 上连续.

这个定理也证明了在一致收敛的条件下, 极限运算与积分运算可以交换:

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y = \int_c^{+\infty} f(x_0, y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_c^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f(x, y)\mathrm{d}y . \qquad (14)$$

前页 后页 返回

定理19.10 (含参量反常积分的可微性)

设 $f(x,y)$ 与 $f_x(x,y)$ 在区域 $J\times[c,+\infty)$ 上连续. 若 $I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 J 上收敛, $\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 在 J 上一致收敛, 则 $I(x)$ 在 J 上可微, 且

$$I'(x)=\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y \tag{15}$$

证 对任一递增且趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}(A_1=c)$, 令

$$u_n(x)=\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)\mathrm{d}y .$$

由定理19.3推得

$$u_n'(x)=\int_{A_n}^{A_{n+1}} f_x(x,y)\mathrm{d}y\,.$$

由 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在J上一致收敛及定理19.8, 可得函数

项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f_x(x,y)\mathrm{d}y$$

在 J上一致收敛，因此根据函数项级数的逐项求导

定理，即得

$$I'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f_x(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}f_x(x,y)\mathrm{d}y,$$

或写作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

最后结果表明在定理条件下，求导运算和积分运算可以交换.

定理19.11 (含参量反常积分的可积性) 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续，若 $I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x, \tag{16}$$

证 由定理19.9知道 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

又由定理19.9的证明中可以看到，函数项级数(13)在 $[a,b]$ 上一致收敛，且各项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因此

根据函数项级数逐项求积定理，有

$$\int_a^b I(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b \mathrm{d}x\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\,, \tag{17}$$

这里最后一步是根据定理19.6关于积分顺序的可交换性. (17)式又可写作

$$\int_a^b I(x)\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\,.$$

这就是(16)式.

定理19.12 设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$ 上连续, 且

(i) $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在任何 $[c,d]$ 上一致收敛,

$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 x 在任何 $[a,b]$ 上一致收敛;

(ii) 积分

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y \text{ 与 } \int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x \qquad (18)$$

中有一个收敛. 则必有

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x. \qquad (19)$$

证 不妨设 (18) 中第一个积分收敛, 由此推得

$$\int_a^{+\infty} \mathrm{d}x \int_c^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y$$

也收敛. 当 $d > c$ 时,

$$I_d = \left| \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} \mathrm{d}x \int_c^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y \right|$$

$$= \left| \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y \right.$$

$$\left. - \int_a^{+\infty} \mathrm{d}x \int_d^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y \right|$$

根据条件(i)及定理19.11，有

$$I_d = \left| \int_a^{+\infty} \mathrm{d}x \int_d^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y \right|$$

$$\leq \left| \int_a^{A} \mathrm{d}x \int_d^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y \right| + \int_A^{+\infty} \mathrm{d}x \int_d^{+\infty} |f(x, y)| \mathrm{d}y. \quad (20)$$

由条件(ii), 对于任给的$\varepsilon > 0$,有$G > a$,使当$A > G$时,

有

$$\int_A^{+\infty} \mathrm{d}x \int_d^{+\infty} |f(x, y)| \mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{2}.$$

选定A后, 由$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$的一致收敛性, 存在$M>c$,

使得当 $d>M$ 时有

$$\left|\int_d^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon}{2(A-a)}.$$

把这两个结果应用到(20)式, 得到

$$I_d < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{d\to\infty} I_d = 0$, 这就证明了(19)式.

例5 计算

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x \quad (p>0,b>a).$$

解 因为 $\dfrac{\sin bx-\sin ax}{x}=\displaystyle\int_a^b\cos xy\mathrm{d}y$，所以

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\left(\int_a^b\cos xy\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-px}\cos xy\mathrm{d}y. \tag{21}$$

由于$\left|\mathrm{e}^{-px}\cos xy\right| \le \mathrm{e}^{-px}$ 及反常积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x$收敛, 根

据M判定法，含参量反常积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\cos xy\mathrm{d}x$$

在区间 $[a,b]$ 上一致收敛. 由于 $\mathrm{e}^{-px}\cos xy$ 在

$[0,+\infty)\times[a,b]$上连续，根据定理19.11交换积分(21)

的顺序, 积分I 的值不变．于是

前页 后页 返回

$$I=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\cos xy\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{p}{p^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}.$$

例6 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x$.

解 在上例中, 令 $b=0$, 则有

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\arctan\frac{a}{p}\quad(p>0).\quad(22)$$

由阿贝耳判别法可得上述含参量反常积分在 $p\geq 0$ 上

一致收敛. 于是由定理19.9, $F(p)$在$p\geq 0$上连续, 且

$$F(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x.$$

又由(22)式

$$F(0)=\lim_{p\to 0^+}F(p)=\lim_{p\to 0^+}\arctan\frac{a}{p}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a.$$

例7 计算

$$\varphi(r)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos rx\,\mathrm{d}x. \tag{23}$$

解 由于$\left|\mathrm{e}^{-x^2}\cos rx\right|\leq \mathrm{e}^{-x^2}$对任一实数 r成立及反常积

分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$ 收敛，所以积分(23)在 $r \in (-\infty, +\infty)$ 上收敛.

考察含参量反常积分

$$\int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x^2} \cos rx\right)'_r \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} -x\mathrm{e}^{-x^2} \sin rx \mathrm{d}x . \quad (24)$$

由于 $\left|-x\mathrm{e}^{-x^2} \sin rx\right| \le x\mathrm{e}^{-x^2}$ 对一切 $x \ge 0$，$-\infty < r < +\infty$ 成立及反常积分 $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$ 收敛，根据 M 判定法，含参量反常积分(24)在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

综合上述结果由定理19.10即得

$$\varphi'(r)=\int_0^{+\infty}-xe^{-x^2}\sin rx\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}-xe^{-x^2}\sin rx\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\sin rx\Big|_0^A-\frac{1}{2}\int_0^A re^{-x^2}\cos rx\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\frac{r}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos rx\mathrm{d}x=-\frac{r}{2}\varphi(r).$$

于是有

$$\ln\varphi(r)=-\frac{r^2}{4}+\ln c,\quad \varphi(r)=ce^{-\frac{r^2}{4}}.$$

前页 后页 返回

从而 $\varphi(0)=c$，又由(23)式，$\varphi(0)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，

所以 $c=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，因此得到

$$\varphi(r)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4}}.$$

四、含参量无界函数的反常积分

设 $f(x,y)$ 在区域 $R=J\times[c,d)$ 上有定义. 若对 x 的某些值, $y=d$ 为函数 $f(x,y)$ 的瑕点, 则称

$$\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \tag{25}$$

为含参量 x 的无界函数反常积分, 或简称为含参量反常积分. 若对每一个 $x\in J$, 积分(25)都收敛, 则其积分值是 x 在 J 上取值的函数. 含参量反常积分(25)在 J 上一致收敛的定义是:

定义2 对任给正数 ε，总存在某正数 $\delta < d - c$，使得当 $0 < \eta < \delta$ 时，对一切 $x \in J$ 都有

$$\left| \int_{d-\eta}^{d} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right| < \varepsilon ,$$

则称含参量反常积分(25)在 J 上一致收敛.

读者可以参照无穷限反常积分的办法建立相应的含参量无界函数反常积分的一致收敛性判别法，并讨论它们的性质.

§3 欧拉积分

在本节中我们将讨论由含参量反常积分定义的两个很重要的非初等函数 —

Γ 函数和 $\mathbf{B}$ 函数.

一、Γ 函 数

含参量积分:

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\,,\ s>0\,, \tag{1}$$

称为格马函数.

Γ 函数可以写成如下两个积分之和:

$$\Gamma(s)=\int_0^{1} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=I(s)+J(s)\,,$$

其中$I(s)$当$s\geq 1$时是正常积分, 当 $0<s<1$时是收敛的无界函数反常积分(可用柯西判别法推得);

$J(s)$当$s \ge 0$时是收敛的无穷限反常积分(也可用柯西判别法推得). 所以含参量积分(1)在$s>0$时收敛, 即 Γ 函数的定义域为 $s>0$.

1. $\Gamma(s)$在定义域 $s>0$ 内连续且有任意阶导数

在任何闭区间$[a,b](a>0)$上, 对于函数$I(s)$, 当$0<x\le 1$时有 $x^{s-1}\mathrm{e}^{-x} \le x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}$, 由于 $\int_0^1 x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛, 从而$I(s)$在$[a,b]$上也一致收敛, 对于$J(s)$, 当

前页 后页 返回

$1 \le x < +\infty$ 时, 有 $x^{s-1}\mathrm{e}^{-x} \le x^{b-1}\mathrm{e}^{-x}$, 由于 $\int_1^{+\infty} x^{b-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛, 从而 $J(s)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛, 于是 $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 上连续.

用上述相同的方法考察积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\left(x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x \ .$$

它在任何区间 $[a,b](a>0)$ 上一致收敛. 于是由定理 19.10 得到 $\Gamma(s)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 由 a, b 的任意性, $\Gamma(s)$

在 $s>0$ 上可导，且

$$\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x\,,\ s>0\,.$$

同理可证

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n\mathrm{d}x\,,\ s>0, n=2,3,\cdots.$$

2. 递推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$

对下述积分应用分部积分法, 有

$$\int_0^{A} x^{s}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-x^{s}\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{A}+s\int_0^{A} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=-A^{s}\mathrm{e}^{-A}+s\int_0^{A} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\,.$$

前页 后页 返回

让 $A \to +\infty$ 就得到 $\Gamma(s)$ 的递推公式:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) . \tag{3}$$

设 $n < s \le n+1$, 即 $0 < s-n \le 1$, 应用递推公式(3) n 次可以得到

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = s(s-1)\Gamma(s-1) = \cdots$$

$$= s(s-1)\cdots(s-n)\Gamma(s-n) . \tag{4}$$

公式(3)还指出, 如果已知 $\Gamma(s)$ 在 $0 < s \le 1$ 上的值, 那

么在其他范围内的函数值可由它计算出来.

若s为正整数n+1,则(4)式可写成

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)=n!\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=n!. \quad (5)$$

3. Γ函数图象的讨论

对一切$s>0$, $\Gamma(s)$和$\Gamma''(s)$恒大于0, 因此$\Gamma(s)$的图形位于x轴上方, 且是向下凸的. 因为$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, 所以$\Gamma(s)$在$s>0$上存在唯一的极小点x_0且$x_0\in(1,2)$.

又$\Gamma(s)$在$(0, x_0)$内严格减;在$(x_0, +\infty)$内严格增.

由于 $\Gamma(s) = \dfrac{s\Gamma(s)}{s} = \dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$ $(s > 0)$ 及

$$\lim_{s\to 0^+}\Gamma(s+1) = \Gamma(1) = 1,$$

故有

$$\lim_{s\to 0^+}\Gamma(s) = \lim_{s\to 0^+}\frac{\Gamma(s+1)}{s} = +\infty .$$

由(5)式及$\Gamma(s)$在$(x_0, +\infty)$上严格增可推得

$$\lim_{s\to +\infty}\Gamma(s) = +\infty .$$

前页 后页 返回

综上所述, Γ函数的图象如图19-2中$s>0$部分所示.

4. 延拓$\Gamma(s)$

改写递推公式 (3) 为

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s}. \qquad (6)$$

当$-1<s<0$时, (6)式右端有意义, 于是可应用(6)式来定义左端函数$\Gamma(s)$在$(-1,0)$内的值, 并且可推知这时$\Gamma(s)<0$.

用同样的方法，利用 $\Gamma(s)$ 已在 $(-1,0)$ 内有定义这一事实，由(6)式又可定义 $\Gamma(s)$ 在 $(-2,-1)$ 内的值，而且这时 $\Gamma(s)>0$. 依此

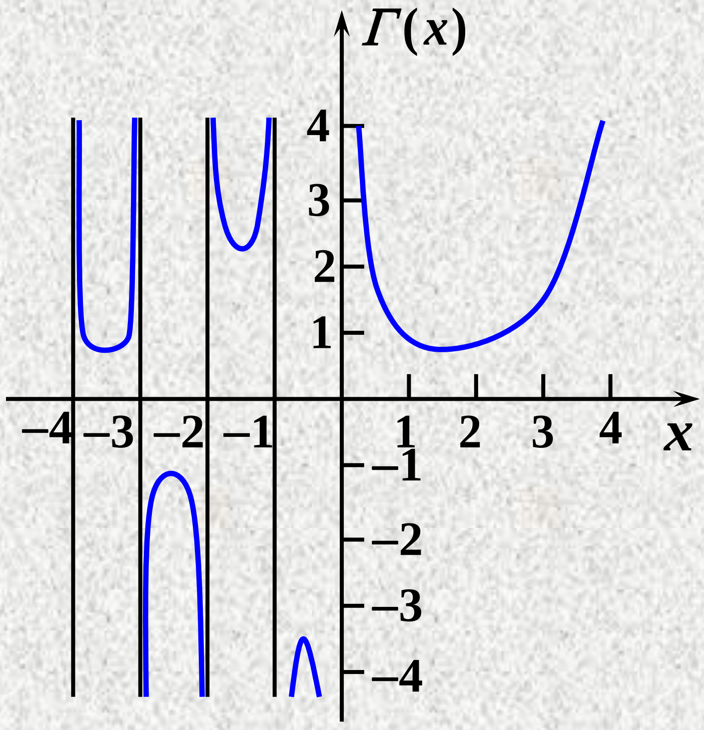

图 19 – 2

下去可把 $\Gamma(s)$ 延拓到整个数轴 (除了 $s=0,-1,-2,\cdots$ 以外)，其图象如图19-2所示.

前页 后页 返回

5. $\Gamma(s)$的其他形式

在应用上, $\Gamma(s)$也常以如下形式出现, 如令 $x=y^2$,

则有

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} y^{2s-1}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y \quad (s>0).$$

令 $x=py$，就有

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = p^s\int_0^{+\infty} y^{s-1}\mathrm{e}^{-py}\mathrm{d}y$$

$$(s>0,p>0). \tag{7}$$

前页 后页 返回

二、B 函 数

含参量积分:

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\ ,\ p>0\ ,q>0 \quad (2)$$

称为贝塔 (Beta) 函数 (或写作 B 函数).

注 与前讨论的单参变量的含参数积分不同, B 函数是含两元的含参量积分，但讨论的步骤与方法是完全类似的.

B 函数(2)当 $p<1$ 时, 是以 $x=0$ 为瑕点的无界函数

反常积分；当 $q<1$ 时，是以 $x=1$ 为瑕点的无界函数反常积分. 应用柯西判别法可证得当 $p>0,q>0$ 时这两个无界函数反常积分都收敛. 所以函数 $\mathrm{B}(p,q)$ 的定义域为 $p>0,q>0$.

1. $\mathrm{B}(p,q)$在定义域 $p>0,q>0$ 内连续

由于对任何 $p_0>0$, $q_0>0$ 成立不等式

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \le x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}, \ p \ge p_0, \ q \ge q_0,$$

而积分 $\int_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\mathrm{d}x$ 收敛，故由 M 判别法知

前页 后页 返回

$\mathrm{B}(p,q)$在$p_0 \le p < +\infty$, $q_0 \le q < +\infty$上一致收敛. 因而推得$\mathrm{B}(p,q)$在 $p > 0, q > 0$内连续.

2. 对称 性 $\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$

作变 换 $x = 1 - y$,得

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (1-y)^{p-1} y^{q-1}\mathrm{d}y = \mathrm{B}(q,p).$$

3. 递推公式

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1)\quad(p>0,q>1), \qquad (8)$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1,q)\quad(p>1,q>0), \qquad (9)$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}\mathrm{B}(p-1,q-1)$$

$$(p>1,q>1).$$

证 下面只证公式(8)，公式(9)可由对称性及公式(8)推得，而最后一个公式则可由公式(8), (9)推得.

当 $p>1,q>1$ 时, 有

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$

$$=\left.\frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\right|_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1\left[x^{p-1}-x^{p-1}(1-x)\right](1-x)^{q-2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\mathrm{d}x-\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p,q-1)-\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p,q),$$

移项并整理就得(8) .

4. $\mathrm{B}(p, q)$ 的其他形 式

在应用中 B 函数也常常以如下形式出现：如令

$x = \cos^2 \varphi$， 则有

$$\mathrm{B}(p, q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2q-1}\varphi \cos^{2p-1}\varphi \, \mathrm{d}\varphi . \tag{10}$$

如令 $x = \dfrac{y}{1+y}, 1-x = \dfrac{1}{1+y}, \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2}$， 则有

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\mathrm{d}y.$$

考 察 $\int_1^{+\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\mathrm{d}y$. 令 $y=\frac{1}{t}$， 则有

$$\int_1^{+\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\mathrm{d}y=-\int_1^{0}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}y.$$

所以

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{1}\frac{y^{p-1}+y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}\mathrm{d}y.$$

前页 后页 返回

三、Γ函数与B函数之间的关系

当 m,n 为正数时，反复应用 B 函数的递推公式，可得

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{n-1}{m+n-1}\mathrm{B}(m,n-1)$$

$$=\frac{n-1}{m+n-1}\frac{n-2}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+1}\mathrm{B}(m,1).$$

又由于 $\mathrm{B}(m,1)=\int_0^1 x^{m-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{m}$，所以

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{n-1}{m+n-1}\frac{n-2}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+1}\frac{1}{m}\cdot\frac{(m-1)!}{(m-1)!}$$

$$=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!},$$

即

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}. \qquad (11)$$

对任何正实数 p, q 也有相同的关系:

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p>0, q>0). \qquad (12)$$

这个关系式将在第二十一章 § 8 中加以证明.