第四章　随机变量的数字特征

学习目标

理解随机变量的数学期望及方差的概念，

掌握随机变量及其函数的数学期望及方差的求法

引例：某7人的高数成绩为90，85，85，80，80，75，60，则他们的平均成绩为

$$\frac{90+85\times 2+80\times 2+75+60}{7}$$

$$=90\times\frac{1}{7}+85\times\frac{2}{7}+80\times\frac{2}{7}+75\times\frac{1}{7}+60\times\frac{1}{7}$$

$$\approx 79.3$$

表示以频率为权重的加权平均.

第一节　数学期望

离散型随机变量

设离散型随机变量的概率分布为

$$P(X = x_k) = p_k \qquad k = 1, 2, \cdots$$

若级数 $\sum_k p_k x_k$ 绝对收敛，　则称此级数为

随机变量X的数学期望，记作E（X），即

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots p_k x_k + \cdots = \sum_k p_k x_k$$

例1 已知随机变量X的分布律：

X	4	5	6
P	1/4	1/2	1/4

求数学期望E（X）.

解 $$E(X)=4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{4}=5$$

连续型随机变量

设连续型随机变量X的概率密度为 f (x), 则

若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛, 则称此积分为 X的数学期望

即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx$$

例2　已知随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$$

求其数学期望.

解　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{-1} x\cdot 0\cdot dx+\int_{-1}^{1} x\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{1}^{+\infty} x\cdot 0\cdot dx$$

$$=0$$

E(X)的意义　反映了随机变量X取值的“概率平均”,是X的可能值以其相应概率的平均.

试验次数较大时，X的观测值的算术平均值 $\overline{X}$

在E(X)附近摆动

$$\overline{x} \approx E(X)$$

因此，数学期望又可以称为期望值，均值.

(X, Y) 为二维离散型随机变量

$$E(X)=\sum_i x_i P\{X=x_i\}=\sum_i x_i p_{i.}=\sum_i\sum_j x_i p_{ij}$$

$$E(Y)=\sum_j y_j P\{Y=y_j\}=\sum_j y_j p_{.j}=\sum_j\sum_i y_j p_{ij}$$

(X, Y) 为二维连续型随机变量

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)dxdy,$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x,y)dxdy$$

例3 设(X, Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy & ,x\in[0,1],y\in[1,3] \\ 0 & ,\ 其它 \end{cases}$$

(1) 求k;

(2) 求X和Y的边缘密度;

(3) 求E(X), E(Y).

解 (1)由 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

得 $$k\int_1^3 ydy \cdot \int_0^1 xdx = k\cdot 4\cdot \frac{1}{2} = 2k = 1$$

所以 $$k = \frac{1}{2}$$

(2) $x \in [0,1]$ 时

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{2}\int_1^3 xydy = 2x$$

所以 $$f_X(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x \in [0,1] \\ 0 & , \quad \text{其它} \end{cases}$$

$y \in [1,3]$ 时

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 xydx = \frac{1}{4}y$$

$$f_y(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{4} & , \quad y \in [1,3] \\ 0 & , \quad \text{其它} \end{cases}$$

（3）

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2xdx = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = \int_1^3 y \cdot \frac{y}{4}dy = \frac{13}{6}$$

（3）另解

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_1^3 x\cdot\frac{1}{2}xydy$$

$$=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$$

注　无需求

边缘分布密度函数

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_1^3 dy\int_0^1 y\cdot\frac{1}{2}xydx\quad=\int_1^3 y\cdot\frac{y}{4}dy=\frac{13}{6}$$

设 $Y = g(X)$ 是随机变量 X的函数,

离散型 $P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots$

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$$

连续型 概率密度为 $f(x)$

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

设 $Z = g(X,Y)$ 是随机变量 X， Y的函数,

离散型 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$

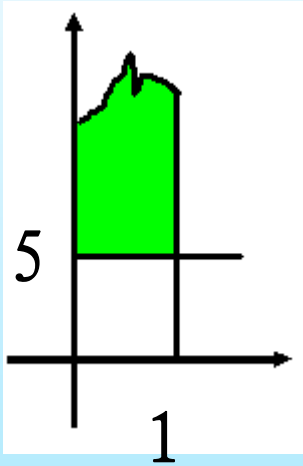
$$E[g(X,Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$$

连续型 联合概率密度为 $f(x,y)$

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) dxdy$$

例4 设相互独立的随机变量X，Y的密度函数分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}2x, & (0\le x\le 1)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_2(y)=\begin{cases}e^{-(y-5)}, & (y\ge 5)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



求E（XY）.

解 $$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_1(x)f_2(y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_5^{+\infty}xy\cdot 2x\cdot e^{-(y-5)}dy$$

$$=\int_0^1 2x^2dx\cdot\int_5^{+\infty}ye^{-(y-5)}dy\ =4$$

数学期望的性质

（1）$E(C)=C$,其中C为任意常数;

（2）$E(CX)=CE(X)$;

（3）$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$;

（4）若随机变量X,Y之间相互独立，则

E(XY)=E(X)E(Y).

特殊分布的数学期望

0-1分布　设X服从0-1分布，其概率分布为

X	0	1
P	1-p	p

则

$$E(X)=\mathbf{0}\times(\mathbf{1}-p)+\mathbf{1}\times p=p$$

二项分布　设X服从二项分布，其概率分布为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

二项分布可表示为　n 个 0 − 1 分布的和　$X=\sum_{i=1}^{n} X_i$

其中　$X_i=\begin{cases}0, & A\text{在第}i\text{次试验中不发生}\\ 1, & A\text{在第}i\text{次试验中发生}\end{cases}$

则

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=np$$

泊松分布　设X服从泊松分布，其概率分布为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\qquad (k-1=t)$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda^t}{t!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

均匀分布　设其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & ,a<x<b\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{a}^{b}\frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

正态分布 设其概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\sigma dt$$

$$=\mu$$

指数分布 设其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ,x>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\lambda}$$

第二节　　方 差

设有两种球形产品，其直径的取值规律如下：

X_1	4	5	6
P	1/4	1/2	1/4

$E(X_1)=5$

X_2	2	3	5	7	8
P	1/8	1/8	1/2	1/8	1/8

$E(X_2)=5$

两种产品的直径均值是相同的，但产品2的偏差大，如果需要使用直径为5的产品，则产品1较产品2理想.

设 X 是一随机变量，如果 $E\left[X-E(X)\right]^2$ 存在，则称为 X 的方差，记作 $D(X)$ 或 $Var(X)$

即

$$D(X)=E\left[X-E(X)\right]^2$$

标准差

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

σ 与 X 有相同的量纲

由方差的定义和数学期望的性质，可以得到

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

方差的性质

（1）$D(C)=0$,其中C为任意常数；

（2）$D(aX)=a^2D(X)$,其中a为任意常数；

（3）若随机变量X,Y相互独立，则

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

例1　设有两种球形产品，其直径的取值规律如下：

X_1	4	5	6
P	1/4	1/2	1/4

X_2	2	3	5	7	8
P	1/8	1/8	1/2	1/8	1/8

求$D(X_1)$,$D(X_2)$.

解　$E(X_1)=5$　　$E(X_2)=5$

$$D(X_1)=(4-5)^2\times\frac{1}{4}+(5-5)^2\times\frac{1}{2}+(6-5)^2\times\frac{1}{4}=0.5$$

$$D(X_2)=(2-5)^2\times\frac{1}{8}+(3-5)^2\times\frac{1}{8}+(5-5)^2\times\frac{1}{2}$$

$$+(7-5)^2\times\frac{1}{8}+(8-5)^2\times\frac{1}{8}=3.25$$

特殊分布的方差

0-1分布

X	0	1
P	1-p	p

$$E(X)=p$$

$$E(X^2)=1^2\cdot p+0^2\cdot(1-p)=p$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=pq$$

其中 $q=1-p$

二项分布

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$E(X)=np$$

$$E(X^2)=n(n-1)p^2+np$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=np(1-p)=npq$$

其中 $q=1-p$

泊松分布

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$E(X^2)=\lambda^2+\lambda$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$$

均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{2}(a+b)$$

$$E(X^2)=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $E(X)=\mu$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)$$

$$=\sigma^2$$

指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-\lambda x}dx$$

$$=-\frac{2}{\lambda}\left[xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx\right]=\frac{2}{\lambda^2}\left[e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}\right]=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

例2 设随机变量X服从参数为1的指数分布，求

$$E(X+e^{-2X})$$

解 X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & (x\geq 0) \\ 0, & (x<0) \end{cases} \qquad E(X)=1$$

所以 $$E(X+e^{-2X})=E(X)+E(e^{-2X})$$

$$E(e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx=\frac{1}{3}$$

所以 $$E(X+e^{-2X})=\frac{4}{3}$$