南阳师范学院 《数学分析》

第二部分(函数的连续性、导数与微分、中值定理)自测题

一、判断正误题（判断下列各题是否正确，正确的划√，错误的划×）

1. $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是 $y=\tan x+x$ 的第一类间断点. (　　)

2. $x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases} x-2, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+2, & x>0. \end{cases}$ 的跳跃间断点. (　　)

3. $y=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & 当x\neq 0 \\ 1\ , & 当x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续. (　　)

4. 若 $f(x_0)=0$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=2$，则 $f'(x_0)=2$. (　　)

5. 若函数 $f(x)$ 在点 x 处可导，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x+\Delta x)-f(x)$ 一定是无穷小量. (　　)

6. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处左、右导数都存在. (　　)

7. 可导的偶函数的导数是奇函数. (　　)

8. $(\arcsin x+\arccos x)'=0$. (　　)

9. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y-f'(x_0)\Delta x$ 是比 Δx 高阶的无穷小. (　　)

10. 在区间 I 上，若 $f'(x)=g'(x)$，则必有 $f(x)=g(x)$. (　　)

11. 设 $f(x)$ 在区间 I 上可微，若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 I 上严格递增. (　　)

12. . 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则 $f(x)$ 在 I 上为常数函数的充要条件 $f'(x)\equiv 0$. (　　)

二、填空题（将正确答案填写在横线上）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{2}, & x>0 \\ ae^{2x}, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$__________.

2. 若当$\Delta x \to 0$时，函数$f(x)$在x_0点的函数值增量Δy与Δx是等价无穷小量，则$f'(x_0)=$______.

3. 若$f(x)=\ln(\ln x)$，则$\dfrac{df}{dx}=$______________ .

4. $f(x)=2^{\sin x}$, 则$f''(0)=$______________ .

5. $\left[\sin x+\cos x+e^{x}+x^{101}+x^{99}\right]^{(100)}\Big|_{x=0}=$________________ .

6. 若$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{(x-2)^2}=-1$，则$f'(2)=$______________ .

三 选择题

1. $x=1$是函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的（　　）

A 连续点　　B 可去间断点　　C 跳跃间断点　　D 无穷间断点

2. 设$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, 则$x=0$是$f(x)$的（　　）

A 可去间断点　B 跳跃间断点　　C 第二类间断点　　D 连续点

3. 函数$y=\dfrac{1}{(x^2-3)\ln|x|}$的间断点有（　　）

A　2 个;　　B　3 个　　C　4 个　　D　5 个

4. 下列结论错误的是　（　　）

A $f(x)$在点x_0连续的充分必要条件是$f(x)$在点x_0既左连续又右连续

B 若$f(x)$在点x_0无定义，则$f(x)$在点x_0一定不连续

C 若$f(x_0-0)=f(x_0+0)$，则$f(x)$在点x_0一定连续

D 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则$f(x)$在点$x_0$一定不连续

5. 设$u=u(x),v=v(x)$可导，则下列结论正确的是（　　）

A　$(uv)'=u'v+uv'$　　　B　$(uv)'=u'\cdot v'$

C　$(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'}{v'}$　　　D　$(u+1)'=u'+1$

6. 下列结论错误的是（　　）

A 若 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微

B 若 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不连续，则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可微

C 若 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微，则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续

D 若 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可微，则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处也可能连续.

7．下列命题中正确的是：（　　）

A、 若 $\left|f(x)\right|$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续；

B、 若 $[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续；

C、 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $\left|f(x)\right|$ 在 $[a,b]$ 连续；

D、 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 连续.

8．设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|D(x)$，其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数，则（　　）

A、 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中所有有理点连续；　　B、 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中所有无理点连续；

C、 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中有唯一连续点；　　D、 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中任意点不连续.

9. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{1-x}$ 的斜渐近线是（　　）

A、 $y=x+1$；　　B、 $y=x-1$；

C、 $y=-x-1$；　　D、 $y=-x+1$.

10．设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+\sin x), x\geq 0\\ x^2\sin\dfrac{1}{x}, x<0\end{cases}$，则（　　）

A、 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不连续；

B、 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，但左右导数至少有一不存在；

C、 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，左右导数存在但不相等；

D、 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导.

11．设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，且 $f'(x_0)\neq 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 点的增量 Δy 与微分 $dy\big|_{x_0}$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-dy\big|_{x_0}}{\Delta y}$ 的值是（　　）

A、0；　B、1；　C、－1；　D、∞.

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x<0\\ \sqrt{x}, x\geq 0\end{cases}$，那么（　　）

A、左导数 $f'_-(0)$ 和右导数 $f'_+(0)$ 都存在；

B、左导数 $f'_-(0)$ 和右导数 $f'_+(0)$ 都不存在；

C、左导数 $f'_-(0)$ 不存在，但右导数 $f'_+(0)$ 存在；

D、左导数 $f'_-(0)$ 存在，但右导数 $f'_+(0)$ 不存在.

四、计算题

1. 如果函数 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<0\\ a+x & x\geq 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续，求 a 的值.

2. 求 a 的值使 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}+2, & x>0;\\ a+4x^2 & x\leq 0.\end{cases}$ 在定义域内连续.

3. (1) 已知 $f(x)=e^x\sin 2x$ 求 $f'(0)$.

(2) 已知 $y=x^{\sin x}$ 求 $y'\big|_{x=0}$.

4. 已知函数 $y=\arctan(1+x)$，求 dy.

5. 已知曲线 $\begin{cases}x=2t-t^2\\ y=3t-t^3\end{cases}$，

（1）求该曲线在 $t=1$ 时的切线方程；

（2）该参数方程所确定的函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

6. 延拓下列函数，使其在 R 上连续：

（1） $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$

（2） $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

（3） $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$.

五．证明题

1. 证明：函数 $f(x)=|x-1|$ 在 $x=1$ 处连续但不可导.

2. 证明：函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在定义域内处处连续且可导，并求 $f'(x)$.

3. 证明：函数 $f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 一致连续，但在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致连续.

4. 设函数 f 在区间 I 上满足 Lipschitz 条件，即存在常数 $L>0$，使得对 I 上任意两点 x',x'' 都有 $|f(x')-f(x'')|\le L|x'-x''|$，证明 f 在 I 上一致连续.

5. 试用一致连续的定义证明：若 f，g 都在区间 I 上一致连续，则 $f+g$ 也在 I 上一致连续.

6. 应用一致连续的定义证明：$f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

7. 应用拉格朗日中值定理证明不等式.

(1) $\dfrac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\dfrac{b-a}{1+a^2}$ ， 其中 $0<a<b$.

(2) $\dfrac{1}{1+x}<\ln(1+x)-\ln x<\dfrac{1}{x}$，其中 $x>0$.

(3) $\dfrac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\dfrac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}$， $0\le x_1\le x_2\le x_3\le\pi$.