线性代数

——同济五版

高景利
南阳师范学院数学与统计学院

目　录

目 录

- 1. 了解排列、逆序的概念，会计算排列的逆序数.
- 2. 熟练运用对角线法则计算二阶及三阶行列式，理解n阶行列式的定义.
- 3. 掌握行列式的性质，会用化三角行列式的方法计算一般的行列式.
- 4. 理解 行列式按行（列）展开定理，会用降阶法计算一般的行列式.
- 5. 理解Cramer法则.

- 1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质.
- 2. 会应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式.
- 3. 会用克拉默法则解线性方程组.

注：参考2013考研大纲

第一节　二阶与三阶行列式

一、复习二阶行列式

定义　由四个数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 排成二行二列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \qquad (1)$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为由数表（1）所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

关于二阶行列式定义的补充说明:

- （1）数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式（2）的**元素**或**元**.
- （2）元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明元素 a_{ij} 位于行列式的第 i 行. 第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于行列式的第 j 列.
- （3）位于第 i 行第 j 列得元素称为行列式的 (i, j)元.
- （4）一般，我们用D来表示行列式.

二阶行列式的记忆——（用对角线法则）

对角线法则只是为方便对二阶行列式定义的记忆而找出一个规律.

主对角线

反(副)对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

主对角线

反（副）对角线

如

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\times 2-(-1)\times 2 = 8$$

二阶行列式的作用——（解二元线性方程组）

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (3)$$

称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为方程组（3）的系数行列式.

若方程组（3）的系数行列式不等于零，则方程组（3）有唯一解，并且其解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

注意：（1）这里的分母是方程组（3）的系数行列式D.

（2）x_1的分子 D_1是用常数项 b_1,b_2 替换系数行列式 D 中的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式. x_2的分子是用常数项 b_1,b_2 替换系数行列式 D 中系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式.

例1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

解:由于

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\times1-(-2)\times2 = 7$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12\times1-(-2)\times1 = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\times1-12\times2 = -21$$

因此　$x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{1}{2}, x_2 = \dfrac{D_2}{D} = -\dfrac{1}{3}$

二、复习三阶行列式

定义 设由9个数排成三行三列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad (4)$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (5)$$

（5）式称为由数表（4）所确定的三阶行列式.

三阶行列式的记忆——（对角线法则）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

这个对角线法则与二阶行列式的对角线法则不是完全一样

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

注意　红线上三元素的乘积冠以正号，蓝线上三元素的乘积冠以负号.

例2　计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

解：按对角线法则，有

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times(-5)\times(-1) + 0\times 0\times 1 + 1\times 1\times 2$$

$$-1\times(-5)\times 1 - 0\times 1\times(-1) - 3\times 0\times 2$$

$$= 15 + 2 + 5 = 22$$

三阶行列式的作用——（解三元线性方程组）

设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (6)$$

称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为方程组（3）的系数行列式.

若方程组（6）的系数行列式不等于零，则方程组（6）有唯一解，并且其解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

注意：（1）这里的分母是方程组（6）的系数行列式D.

（2）x_i 的分子 D_i 是用常数项 b_1,b_2,b_3 替换系数行列式 D 中的系数 a_{1i},a_{2i},a_{3i} 所得的三阶行列式.

第二节 全排列及其逆序数

定义2.1 把n个不同的元素排成一排，叫做这n个元素的**全排列**，也称**n级全排列**（简称**排列**）.

n个不同的元素的所有排列种数为n!个.

定义2.2 在n个不同元素的排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说这两个元素构成该排列的一个**逆序**．一个排列中逆序的总数叫做这个排列的**逆序数**.

排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$

逆序数的求法：

设n个元素为1至n这n个自然数，并规定由小到大为标准次序.设

$$p_1p_2,\cdots p_n$$

为这n个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i ，则全体元素的逆序数之总和

$$t_1+t_2+\cdots+t_i$$

就是这个排列的逆序数，即

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_i$$

例3 求排列32514的逆序数.

分析： 3前面比3大的数有0个，即 $t_1 = 0$.

2前面比2大的数有1个（3），即 $t_2 = 1$.

5前面比5大的数有0个，即 $t_3 = 0$.

1前面比1大的数有3个（3,2,5），即 $t_4 = 3$.

4前面比4大的数有1个（5），即 $t_5 = 1$.

解：

$$\tau(32514) = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5$$

逆序数为奇数册排列叫做**奇排列**，逆序数为偶数的排列叫做**偶排列**.

在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不懂，这种作出新排列的手续叫做**对换**，将两个相邻两个元素对换，叫做**相邻兑换**.

定理1　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

推论1　所有的n级排列中奇偶排列各占一半，分别为 $\frac{n!}{2}$ 个.

推论2　奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

第三节 n阶行列式的定义

一、三阶行列式的结构

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

（**1**）上式右边的每一项都恰是三个元素的乘积，且这三个元素位于不同行不同列.因此，上式右端的任一项除正负号外可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是**1,2,3**三个数的某个排列.我们知道这样的排列共有**6**个，对应上式的右端共含**6**项.即，上式右端除了每一项的正负号外就是对所有三级排列求和.

（2）各项的正负号与列标的排列对照，很容易看出

带正号的三项排列是**123,231,312**

带负号的三项排列是**132,213,321**

经计算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列.因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)}$.

综上，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

其中，$\sum$ 表示对**1,2,3**三个数的所有排列 $j_1 j_2 j_3$ 取和.

同样的分析，可以发现二阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{(-1)^{\tau(j_1 j_2)}} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

其中，$j_1 j_2$ 表示对**1,2** 三个数的所有排列 $j_1 j_2$取和.

第三节　n阶行列式的定义

定义　设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

表达式 $\sum(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 称为数表所确定的**n**阶行列式，并记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中，$\sum$ 表示对由**1,2**，**…**，**n**构成的所有 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 排列求和.

简记作 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元.

注:每一项是n个元素的乘积，且这n个元素取自不同的行不同的列,其符号由列指标的逆序数所确定.

特别地，　定义一阶行列式 $\left|a_{11}\right| = a_{11}$

注：四阶及四阶以上的行列式不能用对角线法则计算.

例4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=24$$

重要结论：

（1）下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（2）上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（3）对角行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

（4）斜对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \therefore & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

思考题　求多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 0 \\ 0 & 3 & x & 2 \\ 0 & x^2 & x & 1 \\ x & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

最高次项的系数.

答案：-2

第四节　　行列式的性质

一、行列式的性质

性质1　行列式转置值不变，即 $D^T = D$.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质2　互换行列式的某两行（列）元素，行列式变号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论　若行列式中有两行（列）元素对应相同，则行列式的值为零.

性质3　行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一数k，等于用k去乘此行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论　若行列式中某行（列）的元素全为零，则行列式的值为零.

性质4　行列式中若有两行（列）对应元素成比例，其值为零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质5 若行列式的某一列（行）得元素是两数之和，例如第 行得元素是两数之和，则该行列式等于两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6 把某一行（列）元素的k倍加到另一行（列）的对应元素上去，行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为了方便起见，我们以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_j 表示行列式第 j 列.

交换 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i, j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$，

第 i 行（或列）乘以 k，记作 $r_i \times k (c_i \times k)$，

以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上，记作 $r_i + k r_j$，

以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上，记作 $c_i + k c_j$.

因此，行列式的性质2,3,6可简记为

$$\text{若}D\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}D_1,\ \text{则}D_1=-D\quad\left(\text{若}D\xrightarrow{c_i\leftrightarrow c_j}D_1,\ \text{则}D_1=-D\right)$$

$$\text{若}D\xrightarrow{r_i\times k}D_2,\ \text{则}D_2=kD\text{或者}D=\frac{1}{k}D_2$$

$$\left(\text{若}D\xrightarrow{c_i\times k}D_2,\ \text{则}D_2=kD\text{或者}D=\frac{1}{k}D_2\right)$$

$$\text{若}D\xrightarrow{r_i+kr_j}D_3,\quad\text{则}D_3=D\quad\left(\text{若}D\xrightarrow{r_i+kr_j}D_3,\quad\text{则}D_3=D\right)$$

二、化三角行列式法计算行列式

命题　任意一个行列式都可以通过性质2,3,6化成一个上（下）三角行列式.

将D 化至上三角行列式. 这一过程一般是从左到右逐列逐列进行.

例4 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ 的值.

分析： 将D化为上三角行列式，从左往右逐列化简.首先是第1列，因为上三角的行列式的第一列除了（1,1）元外其他的元素全为零，所以我们首先要做的就是把第1列中除了（1,1）元外其他的元素全化为零.只需要作 $r_2+\frac{5}{3}r_1$, $r_3-\frac{2}{3}r_1$ ， $r_4-\frac{1}{3}r_1$ 即可.为了方便我们不妨先 $r_1 \leftrightarrow r_4$，这样我们作 r_2+5r_1, r_3-2r_1, r_4-3r_1 显然这样作比上面的要简单精确的多.由于行列式的性质定理对列也是成立的，观察上面的行列式，可以看出如果先作 $c_1 \leftrightarrow c_2$，这样我们只需作 r_2-r_1, r_4+5r_1 即可显然比上面的作法更简单．依次类推，可以把第二列，第三列化为上三角行列式的形式.

解:

$$D \overset{c_1 \leftrightarrow c_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ -5 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_4+5r_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_3+4r_2 \\ r_4-8r_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4+\frac{5}{4}r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5}{2} \end{vmatrix} = 40$$

例5　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解法一　仿照上面的计算方法，

$$D \overset{r_1 \leftrightarrow r_4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - 3r_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4 + r_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{vmatrix} \overset{r_4 + r_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 48$$

解法二　这个行列式的特点是各行4个数之和都是6，各列4个数之和也是6.因此我们可以考虑在计算行列式时把行列式的这个特点计算在内.

$$D \overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1}}{=} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48$$

例6 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$

解:

$$D_n \overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{=} \begin{vmatrix} b+(n-1)a & a & \cdots & a \\ b+(n-1)a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b+(n-1)a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ \vdots \\ r_n-r_1}}{=} \begin{vmatrix} b+(n-1)a & a & \cdots & a \\ 0 & b-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b-a \end{vmatrix} = [b+(n-1)a](b-a)^{n-1}$$

例5 证明

$$\begin{vmatrix} kc_1+a_1 & ma_1+b_1 & lb_1+c_1 \\ kc_2+a_2 & ma_2+b_2 & lb_2+c_2 \\ kc_3+a_3 & ma_3+b_3 & lb_3+c_3 \end{vmatrix} = (klm+1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明：

$$\begin{vmatrix} kc_1+a_1 & ma_1+b_1 & lb_1+c_1 \\ kc_2+a_2 & ma_2+b_2 & lb_2+c_2 \\ kc_3+a_3 & ma_3+b_3 & lb_3+c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & ma_1+b_1 & lb_1+c_1 \\ a_2 & ma_2+b_2 & lb_2+c_2 \\ a_3 & ma_3+b_3 & lb_3+c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} kc_1 & ma_1+b_1 & lb_1+c_1 \\ kc_2 & ma_2+b_2 & lb_2+c_2 \\ kc_3 & ma_3+b_3 & lb_3+c_3 \end{vmatrix}=D_1+D_2$$

对于 $D_1 \overset{\substack{c_2-mc_1 \\ c_3-lc_2}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$D_2 \overset{c_1\div k}{=} k\begin{vmatrix} c_1 & ma_1+b_1 & lb_1+c_1 \\ c_2 & ma_2+b_2 & lb_2+c_2 \\ c_3 & ma_3+b_3 & lb_3+c_3 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_3-c_1 \\ c_3\div l \\ c_2-c_3 \\ c_2\div m}}{=} kml\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}=kml\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

所以，$\begin{vmatrix} kc_1+a_1 & ma_1+b_1 & lb_1+c_1 \\ kc_2+a_2 & ma_2+b_2 & lb_2+c_2 \\ kc_3+a_3 & ma_3+b_3 & lb_3+c_3 \end{vmatrix}=(klm+1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

例7　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & & & O & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　$D=D_1D_2$

例8 计算行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & a & & & b & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & b & & & a & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

其中未写出的元素为0

解： 把 D_{2n} 中的第 $2n$ 行依次与第 $2n-1$ 行、…、第 2 行对调（作2n-2次相邻对换），再把第 $2n$ 列依次与第 $2n-1$ 列、…、第 2 列对调（作2n-2次相邻对换），得

$$D_{2n}=(-1)^{2(2n-2)}\begin{vmatrix} a & b & 0 & & & & & 0 \\ b & a & 0 & & & & & 0 \\ 0 & 0 & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a & b & & \\ & & & & b & a & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & b & & & & & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\cdot D_{2n-2}$$

根据例7的结果，有

$$D_{2n}=(a^2-b^2)D_{2(n-1)}$$

以此作递推公式，即得

$$\begin{aligned}D_{2n}&=(a^2-b^2)D_{2(n-1)}=(a^2-b^2)^2D_{2(n-2)}\\&=\cdots=(a^2-b^2)^{n-1}D_2=(a^2-b^2)^n\end{aligned}$$

注意：利用行列式的性质计算行列式时，要特别注意运算顺序.

第五节　行列式按行（列）展开

一、余子式、代数余子式

n阶行列式 $\boldsymbol{D}=\det(\boldsymbol{a}_{ij})$ ，把（i，j）元 $\boldsymbol{a}_{ij}$ 所在的第i行与第j列 划去后，留下的n-1阶行列式叫做（i，j）元 $\boldsymbol{a}_{ij}$ 的***余子式***，记作 $\boldsymbol{M}_{ij}$ ．

$$Det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ ，叫做（i，j）元的***代数余子式***.

例如

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & \boxed{3} & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{23}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix}=11$$

$$\boldsymbol{A}_{23}=(-1)^{2+3}\boldsymbol{M}_{23}=-\boldsymbol{M}_{23}=-11$$

注意　　行列式（i，j）元 a_{ij} 的余子式和代数余子式与其所在行及所在列的元素无关，而仅与其所处的位置有关.

第五节　行列式按行（列）展开

引理　一个n阶行列式，如果其中第i行所有的元素除（i，j）元 a_{ij} 外都为零，那么该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D = a_{ij}A_{ij}$.

$$
D = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-2} & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1.j+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-2} & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-2,1} & a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,j-2} & a_{i-2,j-1} & a_{i-2,j} & a_{i-2,j+1} & \cdots & a_{i-2,n} \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{i+1,n} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-2} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-2} & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = a_{ij}A_{ij}
$$

证　先证（i,j）=（1,1）的情形，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例10（P14） 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & & & O & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 $D=D_1D_2$

证　先证（i,j）=（1,1）的情形，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}M_{11}$$

又　$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}$$

从而，　$$D=a_{11}A_{11}.$$

再证一般情形，

$$D=\begin{array}{cc}
\text{第}j\text{列} & \\
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-2} & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-2} & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-2,1} & a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,j-2} & a_{i-2,j-1} & a_{i-2,j} & a_{i-2,j+1} & \cdots & a_{i-2,n} \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-2} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-2} & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix} & \text{第}i\text{行}
\end{array}$$

$$r_i \leftrightarrow r_{i-1}$$

$$D\quad \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccc} & & & & & \text{第}j\text{列} & & & \end{array} & \\
\left|\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-2} & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-2} & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-2,1} & a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,j-2} & a_{i-2,j-1} & a_{i-2,j} & a_{i-2,j+1} & \cdots & a_{i-2,n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-2} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-2} & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{array}\right| & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

$r_i \leftrightarrow r_{i-1}$

$r_{i-1} \leftrightarrow r_{i-2}$

$$D \quad \begin{array}{|ccccccccc|l}
 & & & & & \text{第}\,j\,\text{列} & & & & \\
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-2} & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-2} & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & \\
a_{i-2,1} & a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,j-2} & a_{i-2,j-1} & a_{i-2,j} & a_{i-2,j+1} & \cdots & a_{i-2,n} & \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & \text{第}\,i\,\text{行} \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-2} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-2} & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} &
\end{array}$$

第五节 行列式按行（列）展开

$r_i \leftrightarrow r_{i-1}$

$r_{i-1} \leftrightarrow r_{i-2}$

$\vdots$

$$
D\quad
\begin{array}{c|ccccccccc|c}
 & & & & & & \text{第j列} & & & & \\
 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-2} & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & \\
 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-2} & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} & \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & a_{i-2,1} & a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,j-2} & a_{i-2,j-1} & a_{i-2,j} & a_{i-2,j+1} & \cdots & a_{i-2,n} & \\
 & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & \text{第i行} \\
 & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-2} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-2} & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} &
\end{array}
$$

$r_i \leftrightarrow r_{i-1}$

$r_{i-1} \leftrightarrow r_{i-2}$

$\vdots$

$r_3 \leftrightarrow r_2$

$$D \quad \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccc} & & & & & \text{第}j\text{列} & & & \end{array} & \\
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-2} & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-2} & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-2,1} & a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,j-2} & a_{i-2,j-1} & a_{i-2,j} & a_{i-2,j+1} & \cdots & a_{i-2,n} \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-2} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-2} & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix} &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \text{第}\,i\,\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

第j列

$$
\begin{array}{c}
r_i \leftrightarrow r_{i-1} \\
r_{i-1} \leftrightarrow r_{i-2} \\
\vdots \\
r_3 \leftrightarrow r_2 \\
r_2 \leftrightarrow r_1 \\
D = (-1)^{i-1} \\
c_j \leftrightarrow c_{j-1} \\
c_{j-1} \leftrightarrow c_{j-2} \\
\vdots \\
c_2 \leftrightarrow c_1
\end{array}
\begin{vmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-2} & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-2} & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-2,1} & a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,j-2} & a_{i-2,j-1} & a_{i-2,j} & a_{i-2,j+1} & \cdots & a_{i-2,n} \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-2} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-2} & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

第i行

第j列

$$
\begin{array}{c}
r_i \leftrightarrow r_{i-1} \\
r_{i-1} \leftrightarrow r_{i-2} \\
\vdots \\
r_2 \leftrightarrow r_1 \\
= \\
c_j \leftrightarrow c_{j-1} \\
c_{j-1} \leftrightarrow c_{j-2} \\
\vdots \\
c_2 \leftrightarrow c_1
\end{array}
(-1)^{i-1}
\begin{vmatrix}
a_{ij} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-2} & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-2} & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-2,j} & a_{i-2,1} & a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,j-2} & a_{i-2,j-1} & a_{i-2,j+1} & \cdots & a_{i-2,n} \\
a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-2} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-2} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

第i行

第五节　行列式按行（列）展开

第j列

$r_i \leftrightarrow r_{i-1}$

$r_{i-1} \leftrightarrow r_{i-2}$

$\vdots$

$r_2 \leftrightarrow r_1$

$$= (-1)^{i-1+j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-2} & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-2} & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-2,j} & a_{i-2,1} & a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,j-2} & a_{i-2,j-1} & a_{i-2,j+1} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-2} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-2} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第i行

$c_j \leftrightarrow c_{j-1}$

$c_{j-1} \leftrightarrow c_{j-2}$

$\vdots$

$c_2 \leftrightarrow c_1$

$$D=\begin{array}{|ccccccccc|l}
 & & & & & \text{第j列} & & & & \\
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-2} & a_{1,j-1} & & a_{1.j+1} & \cdots & a_{1n} & \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-2} & a_{2,j-1} & & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
a_{i-2,1} & a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,j-2} & a_{i-2,j-1} & & a_{i-2,j+1} & \cdots & a_{i-2,n} & \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & \\
 & & & & & & & & & \text{第i行} \\
a_{i+1,n} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-2} & a_{i+1,j-1} & & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-2} & a_{n,j-1} & & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} \phantom{a_{ij}} & & & & \text{第j列} & & & & \end{array} \\
\xlongequal[\substack{c_j\leftrightarrow c_{j-1}\\ c_{j-1}\leftrightarrow c_{j-2}\\ \vdots\\ c_2\leftrightarrow c_1}]{\substack{r_i\leftrightarrow r_{i-1}\\ r_{i-1}\leftrightarrow r_{i-2}\\ \vdots\\ r_2\leftrightarrow r_1}} (-1)^{i-1+j-1} & \begin{array}{c} \begin{vmatrix}
a_{ij} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-2} & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-2} & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-2,j} & a_{i-2,1} & a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,j-2} & a_{i-2,j-1} & a_{i-2,j+1} & \cdots & a_{i-2,n} \\
a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-2} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-2} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \text{第i行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= (-1)^{i-1+j-1} \quad a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}$$

第五节　行列式按行（列）展开

根据行列式的性质1，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-2} & a_{1,j-1} & 0 & a_{1.j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-2} & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-2,1} & a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,j-2} & a_{i-2,j-1} & 0 & a_{i-2,j+1} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,j-2} & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,n} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-2} & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-2} & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{ij}A_{ij}$$

2.展开定理

行列式D等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

3. 展开定理的应用

例1　计算下列行列式值

（1）$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；　（2）$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解：（1）

$$D_1=(-1)^{1+1}2\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}$$

$$=2\left[(-1)^{1+1}2\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}\right]-(-1)^{1+1}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}$$

$$=12-4-3$$

$$=5$$

(2)

$$D_2 \xlongequal[r_2+3r_3]{\substack{r_1+r_3\\ r_4-r_2}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 1 \\ -11 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & -6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

注意运算顺序

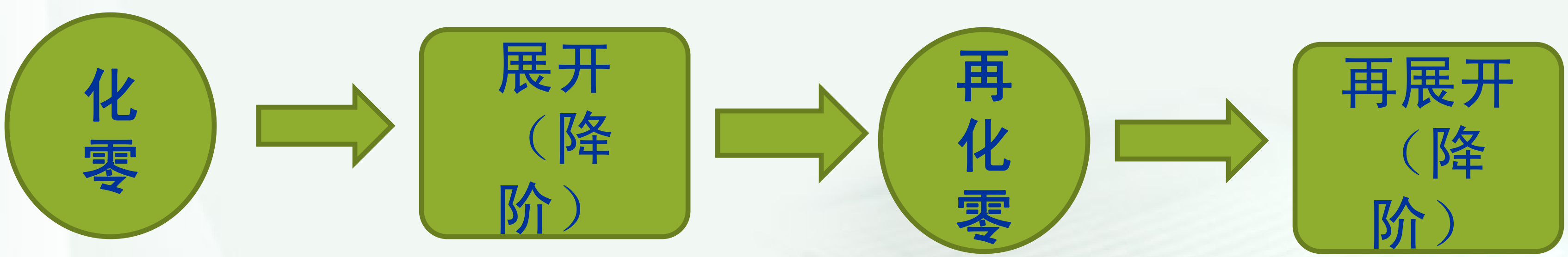
$$\xlongequal{\text{按第三列展开}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ 6 & -6 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第三列展开}} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 40$$

第五节　行列式按行（列）展开

注意　一般应选取零元素较多的行或列进行展开；或者选取一行或列，利用行列式的性质6，将这一行或列的元素尽可能多的化为零，然后按一行或列进行展开．

降阶法



···

例2　证明范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}\left(x_i-x_j\right)$$

推论 行列式D的任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases}D & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}$$

例12 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

D 的 (i,j) 元得余子式和代数余子式记作 M_{ij} 和 A_{ij}，求

$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 及 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$

第六节　Cramer法则

1.线性方程组

含有n个未知量n个方程的线性方程组一般形式为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{(I)}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n)$ 称为**方程组的系数**;

$b_j(j=1,2,\cdots,n)$ 称为**常数项**.

特别地，$b_j=0(j=1,2,\cdots,n)$ ，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

称为***n*元齐次线性方程组** .

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 称为齐次线性方程组（II）的**零解**

由系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots n)$ 构成的行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做方程组的**系数行列式**.

若记

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\cdots n)$$

2. Cramer法则

定理 如果线性方程组 (I) 式的系数行列式 $D \neq 0$ ，那么它有唯一解，其解为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

推论 若齐次线性方程组 (II) 的系数行列式 $D \neq 0$ 则它只有唯一零解.

如果齐次线性方程组 (II)有非零解，则它的系数行列式等于零.

例13 下列齐次方程组中的参数 λ 为何值时，方程组有非零解

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (6-\lambda)x_2 = 0 \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

解：由定理可知，当其系数行列式值为零时，方程组有非零解.

又因为其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)$$

所以，当 $\lambda=2,5$或8 时方程组有非零解.