

定积分（数一）考研真题

一、选择题（将最佳答案的序号填写在括号内）

1. (07年, 4分) 连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3, -2], [2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上下半圆周, 在区间 $[-2, 0], [0, 2]$ 的图形分别是直径 2 的下, 上半圆周, 设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则下列结论正确的是 ()

(A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$ (B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$

(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$ (D) $F(-3) = \frac{5}{4}F(-2)$

二、填空题

1. (96年, 3分) 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在 $A(1, 0, 1)$ 点处沿 A 点指向 $B(3, -2, 2)$ 点方向的方向导数为_____

2. (97年, 3分) 对数螺线 $\rho = e^\theta$ 在点 $(\rho, \theta) = \left(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为_____

3. (10年, 4分) 设位于曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}} (e \leq x < +\infty)$ 下方, x 轴上方的无界区域为 G , 则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积是_____

4. (11年, 4分) 曲线 $y = \int_0^x \tan x dx \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 s 为_____

三、计算

1. (94年, 6分) 已知 A 与 B 的直角坐标分别为 $(1, 0, 0)$ 与 $(0, 1, 1)$, 线段 AB 绕轴 x 旋转一周所成的旋转曲面为 S , 求由 S 及两平面 $z=0, z=1$ 所围成的立体体积.

2. (95年, 7分) 设曲线 L 位于平面的第一象限内, L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交, 交点为 A , 已知 $|MA| = |OA|$, 且 L 过点 $(1.5, 1.5)$, 求 L 的方程.

3. (96年, 7分) 设对于任意 $x > 0$, 曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$, 求 $f(x)$ 的一般表达式

4. (03年, 10分) 过坐标原点做曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D . 求

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

5. (03年, 10分) 某建筑工地打地基时候, 需用气锤将桩打进土层, 每次击打, 都将克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比 (比例系数为 $k, k > 0$), 气锤第一次击打将桩打进地 am . 根据设计方案, 要求气锤每次击

打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r(0 < r < 1)$. 问

(1) 气锤击打桩 3 次后, 可将桩打进地下多深?

(2) 若击打次数不限, 气锤之多能将桩打进地下多深?

(注: m 表示长度单位米)

6. (09 年, 9 分) 设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 及 $y = x^{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) 所围成的

区域的面积, 记 $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 求 S_1 及 S_2 的值.