第六部分　二次型

一、选择题

1.二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_2x_3$ 的标准形可以是：

（A） $y_1^2+4y_2^2$；　（B） $y_1^2-6y_2^2+2y_3^2$；

（C） $y_1^2-y_2^2$；　（D） $y_1^2+4y_2^2+y_3^2$。

2.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(2x_1+3x_2+x_3)^2-5(x_2+x_3)^2$ 的规范型是：

（A） $y_1^2+y_2^2-5y_3^2$；（B） $y_2^2-y_3^2$；

（C） $y_1^2+y_2^2-y_3^2$；（D） $y_1^2+y_2^2$。

3.下列矩阵中，正定矩阵是

（A） $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}$；（B） $\begin{bmatrix}1&2&0\\2&5&3\\0&3&8\end{bmatrix}$；

（C） $\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$；（D） $\begin{bmatrix}5&2&1\\2&1&3\\1&3&0\end{bmatrix}$。

4.对于 n 元二次型 x^TAx，下述命题中正确的是

（A）化 x^TAx 为标准形的坐标变换是唯一的。

（B）化 x^TAx 为规范型的坐标变换是唯一的。

（C） x^TAx 的标准形是唯一的。

（D） x^TAx 的规范型是唯一的。

5.下列矩阵中 A 与 B 合同的是

（A） $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}$；

（B） $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$；

（C） $A=\begin{bmatrix}1&&1\\&1&\\1&&1\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&0\end{bmatrix}$

（D）$A=\begin{bmatrix}0&2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-1&&\\&-2&\\&&-2\end{bmatrix}$。

6.与二次型 $f=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+6x_1x_2$ 的矩阵 A 既合同又相似的矩阵是

（A）$\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&-8\end{bmatrix}$；（B）$\begin{bmatrix}4&&\\&2&\\&&-2\end{bmatrix}$；（C）$\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&0\end{bmatrix}$；（D）$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$。

7.设 A，B 均为 n 阶实对称矩阵，若 A 与 B 合同，则
（A）A 与 B 有相同的特征值；（B）A 与 B 有相同的秩；
（C）A 与 B 有相同的特征向量；（D）A 与 B 相同的行列式。

8.下列二次型中正定二次型是

（A）$f_1=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$

（B）$f_2=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$

（C）$f_3=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4-x_1)^2$

（D）$f_4=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4-x_1)^2$

9.设 A 是 n 阶实对称矩阵，将 A 的 i 列和 j 列对换得到 B，再将 B 的 i 行和 j 行对换得到 C，则 A 与 C
（A）等价但不相似；（B）合同但不相似；（C）相似但不合同；（D）等价，合同且相似。

二、填空题

1.设 $f(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}-2&3&x_1\\3&-5&x_2\\x_1&x_2&0\end{vmatrix}$，则二次型对应的矩阵是______________.

2.二次型 $f=x_3^2+4x_4^2+2x_1x_2+4x_3x_4$ 的规范型是_____________________.

3. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=2x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+4x_1x_3+2tx_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+7y_3^2$，则 $t=$_________。

4.若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+4x_2^2+ax_3^2+6x_1x_2+2x_2x_3$ 是正定的，则 a 的取值范围是_____.

5.设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1)^T$，$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，若 $B=(kE+A)^*$ 是正定矩阵，则 k 的取值范围是

________.

6.已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$与二次型$x^TBx=3x_1^2+ax_3^2$的矩阵 B 合同，则 a 的取值___。

7.已知$A=\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$和$B=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{bmatrix}$合同，那么使$C^TAC=B$的可逆矩阵$C=$___

8.设 A 是三阶实对称矩阵，满足$A^3=2A^2+5A-6E$，保证$kE+A$是正定阵，则 k 的取值范围是________.

9.设 A 是$m\times n$矩阵，E 是 n 阶单位阵，矩阵$B=-aE+A^TA$是正定阵，则 a 的取值范围是_________.

第五部分　矩阵特征值、特征向量

一、选择题

1.设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & -3 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$，那么矩阵 A 的三个特征值是

（A）1,0，-2；　（B）1,1,-3；　（C）3,0，-2；　（D）2,0，-3.

2.已知 A 是 4 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若 A^* 的特征值是 1，-1,2,4，那么不可逆矩阵是

(A) A-E;　(B) 2A-E;　(C)A+2E;　(D)A-4E.

3.已知 A 是 n 阶可逆矩阵，那么与 A 有相同特征值的矩阵是

（A）A^T；（B）A^2；（C）A^{-1}；（D）A-E。

4.矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$的特征向量不能是

（A）$(-1,1,0)^T$；（B）$(1,-2,3)^T$；（C）$(1,2,1)^T$；（D）$(3,-3,0)^T$。

5.矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & -4 & -4\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -2 & -3\end{bmatrix}$有一个特征向量是

（A）$(1,0,-1)^T$；（B）$(3,3,-6)^T$；（C）$(4,-1,2)^T$；（D）$(1,1,-2)^T$。

6.已知$\alpha=(1,-2,3)^T$是矩阵的特征向量，则

（A）$a=-2,b=6;$（B）$a=2,b=-6;$（C）$a=2,b=6;$（D）$a=-2,b=-6.$

7.设 A 是 n 阶矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵，n 维列向量α是矩阵 A 的属于特征值λ的特征向量，那么在下列矩阵中（1）A^2；（2）$P^{-1}AP$；(3)A^T；（4）$E-\frac{1}{2}A$，α 肯定是其特征向量的矩阵共有

（A）1 个；（B）2 个；（C）3 个；（D）4 个。

8.设 A 是 n 阶矩阵，下列命题中正确的是

（A）若α是A^T的特征向量，那么α是 A 的特征向量；

（B）若α是A^*的特征向量，那么α是 A 的特征向量；

（C）若α是A^2的特征向量，那么α是 A 的特征向量；

（D）若α是 2A 的特征向量，那么α是 A 的特征向量；

9.已知三阶矩阵 A 与三维非零列向量$\boldsymbol{\alpha}$，若向量组$\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, A^2\boldsymbol{\alpha}$线性无关，而$A^3\alpha = 3A\alpha - 2A^2\alpha$，那么矩阵$A$属于特征值$\lambda = -3$的特征向量是

（A）α；（B）$A\alpha + 2\alpha$；（C）$A^2\alpha - A\alpha$；（D）$A^2\alpha + 2A\alpha - 3\alpha$。

10.设 A 是三阶矩阵，其特征值是 1,3，-2，相应的特征向量依次为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，若$P = [\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2]$，则$P^{-1}AP =$

（A）$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$；（B）$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -4 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$；（C）$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$；(D)$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$.

11.已知$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$，$\alpha_1$是矩阵 A 属于特征值$\lambda = 1$的特征向量，$\alpha_2$与$\alpha_3$是矩阵 A 属于特征值$\lambda = 5$的特征向量，那么矩阵 P 不能是

（A）$[\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3]$;　　　（B）$[\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 - 2\alpha_3]$;

（C）$[\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2]$;　　　（D）$[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3]$;

12.已知矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，那么下列矩阵中

（1）$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,（2）$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$,（3）$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$,（4）$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，与矩阵 A 相似的矩阵的个数为

（A）1;（B）2;（C）3;（D）4.

13.下列矩阵中，不能相似对角化的矩阵是

（A）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$；（B）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$；（C）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$；（D）$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

14.下列矩阵中，A 和 B 相似的是

（A）$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；

（B）$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&3&-1\\0&-1&5\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$；

（C）$A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&3&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$；

（D）$A=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&-3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&-2\end{bmatrix}$。

15. 设 A 是三阶矩阵，$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$ 是三阶可逆矩阵，且

$AB=\begin{bmatrix}b_{12}&2b_{11}&-b_{13}\\b_{22}&2b_{21}&-b_{23}\\b_{32}&2b_{31}&-b_{33}\end{bmatrix}$，则 $A\sim$

（A）$\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$；（B）$\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$；（C）$\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$；（D）$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$。

16.设 A，B，C，D 都是 n 阶矩阵，且 $A\sim C,B\sim D$，则必有

（A）$(A+B)\sim(C+D)$；（B）$\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}C&O\\O&D\end{bmatrix}$；

（C）$AB\sim CD$；（D）$\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}O&C\\D&O\end{bmatrix}$。

17.已知 A 是 n 阶可逆矩阵，若 $A\sim B$，则下列命题中

（1）$AB\sim BA$，（2）$A^2\sim B^2$，（3）$A^{-1}\sim B^{-1}$，（4）$A^T\sim B^T$

正确的命题共有

（A）4 个；（B）3 个；（C）2 个；（D）1 个。

18.已知 A 是三阶矩阵，$r(A)=1$，则 $\lambda=0$

（A）必是 A 的二重特征值；
（B）至少是 A 的二重特征值；
（C）至多是 A 的二重特征值；
（D）一重、二重、三重特征值都有可能。

19.三阶矩阵 A 的特征值全为零，则必有

（A）$r(A)=0$；（B）$r(A)=1$；（C）$r(A)=2$；（D）条件不足不能确定。

20.n 阶矩阵 A 和 B 有相同的特征值是 A 和 B 相似的

（A）充分必要条件；　　　　　　　（B）必要而非充分条件；

（C）充分而非必要条件；　　　　　（D）既非充分也非必要条件。

21.n 阶矩阵 A 和 B 有相同的特征向量是 A 与 B 相似的

（A）充分必要条件；　　　　　　　（B）必要而非充分条件；

（C）充分而非必要条件；　　　　　（D）既非充分也非必要条件。

22.n 阶矩阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量是 A 与对角阵相似的

（A）充分必要条件；　　　　　　　（B）必要而非充分条件；

（C）充分而非必要条件；　　　　　（D）既非充分也非必要条件。

23.设三阶矩阵 A 的特征值是 0,1，-1，则下列命题中不正确的是

（A）矩阵 A-E 是不可逆矩阵；

（B）矩阵 A+E 和对角阵相似；

（C）矩阵 A 属于 1 与-1 的特征向量相互正交；

（D）方程组 $Ax=0$ 的基础解系由一个向量构成。

二、填空题

1.已知 $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，那么 A^* 的特征值是_________。

2.已知三阶矩阵 A 的特征值是 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，又三阶矩阵 B 满足关系式

$A^{-1}BA=6A+BA$，则矩阵 B 的特征值是__________。

3.设 A 是主对角线元素之和为-5 的三阶矩阵，且满足 $A^2+2A-3E=0$，那么矩阵 A 的三个特征值是______。

4.已知 $\alpha=(a,1,1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&a&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}$ 的逆矩阵的特征向量，那么 α 在矩阵 A 中对应的特征值是_________。

5.设 $\alpha=(1,-1,a)^T$ 是 $A=\begin{bmatrix}a&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵 A^* 的特征向量，其中 A^* 的秩为 3，则 $a=$______.

6.设 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维线性无关的列向量，且

$A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=-\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+2\alpha_3$，则矩阵 A 的三个特征值是________.

7.已知α是 3 维列向量，α^T是α的转置，若矩阵$\alpha\alpha^T$相似于$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，则

$\alpha^T\alpha =$ ________.

8.已知 A 是三阶方阵，其特征值分别为 1,2，-3，则行列式$|A|$中主对角线元素的代数余子式之和$A_{11} + A_{22} + A_{33} =$ _______.

9.设$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ a & 2 & 0 \end{bmatrix}$有二重特征值，则$a =$ ________.

10.已知 A 是三阶实对称矩阵，特征值 1,3，-2，其中$\alpha_1 = (1,2,-2)^T$，$\alpha_2 = (4,-1,a)^T$分别是属于特征值$\lambda = 1$与$\lambda = 3$的特征向量，那么矩阵 A 属于特征值$\lambda = -2$的特征向量是____________。

11. 设 A 是三阶实对称矩阵，存在正交阵$Q = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]$，使得$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$，则矩阵$B = A - \xi_1\xi_1^T$的特征值是________。

12.设$\alpha = (1,-1,a)^T, \beta = (1,a,2)^T, A = E + \alpha\beta^T$，且$\lambda = 3$时矩阵 A 的特征值，则矩阵 A 属于特征值$\lambda = 3$的特征向量是____________。

13.已知矩阵$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$和对角阵相似，则$a =$ _______.

14.已知 A 是四阶实对称矩阵，$r(A) = 3$，矩阵 A 满足$A^4 - A^3 - A^2 - 2A = 0$则与 A 相似的对角矩阵是__________.

15.已知矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$只有一个线性无关的特征向量，那么 A 的三个特征值是___________。

16.A 是三阶矩阵，ξ, α, β是三个三维线性无关的列向量，其中$Ax = 0$有解ξ，$Ax = \beta$有解α，$Ax = \alpha$有解β，则$A \sim$ _________.