

一元函数极限、连续（数一）考研真题

一、选择题（将最佳答案的序号填写在括号内）

1. (94年, 3分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = 2$, 其中 $a^2 + c^2 \neq 0$, 则必有 ()

- (A) $b = 4d$ (B) $b = -4d$
 (C) $a = 4c$ (D) $a = -4c$

2. (03年, 4分) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有 ()

- (A) $a_n < b_n$, 对任意 n 成立. (B) $b_n < c_n$, 对任意 n 成立.
 (C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在 (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

3. (04年, 4分) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt, \beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt, \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是 ()

- (A) α, β, γ (B) α, γ, β (C) β, α, γ (D) β, γ, α

4. (07年, 4分) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 ()

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$
 (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

5. (08年, 3分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是 ()

- (A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛 (B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛
 (C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛 (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

6. (09年, 4分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 等价无穷小, 则 ()

- (A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$ (B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$
 (C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$ (D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$

7. (10年, 4分) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^n = ()$

- (A) 1. (B) e .
 (C) e^{a-b} . (D) e^{b-a}

二、填空题

1. (94年, 3分) $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. (95年, 3分) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. (96年, 3分) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

4. (97年, 3分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. (98年, 3分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

6. (99年, 3分) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

7. (03年, 4分) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \underline{\hspace{2cm}}$

8. (06年, 4分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算

1、(96, 5分) 设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} (n = 1, 2, \dots)$, 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

2、(98, 6分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$.

3、(00, 5分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

4、(02, 6分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 某邻域内有一阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0$, 若

$af(h) + bf(2h) - f(0)$ 在 $h \rightarrow 0$ 时是比 h 高阶的无穷小, 试确定 a, b 的值.

5、(06, 12分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$,

(1) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限

(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

6、(08, 9分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$

7、(11, 10分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$

8、(11, 10分) 求方程 $k \arctan x - x = 0$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数

四、证明

1、(11, 10分)

(1) 证明: 对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

(2) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n (n = 1, 2, \dots)$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛