

第三章 练习题

一、判断题

1. 初等变换不改变矩阵的秩. ()
3. $R(A+B) \leq R(A)+R(B)$ ()
2. 秩为 r 的矩阵 A 中, A 的 r 阶子式全不为零. ()
4. 如果线性方程组 $A_{n \times n}x = b$ 无解或有两个不同的解, 则它的系数行列式必为零. ()
5. 若 $|A| \neq 0$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解. ()
6. 若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$. ()
7. 若矩阵 A 中有一个 r 阶子式全不为零, 则矩阵 A 的秩为 r . ()
8. 若 $m < n$, 则 $A_{m \times n}x = 0$ 有非零解. ()
9. 若 A 为 n 阶可逆矩阵, 且 $AX=0$, 则 $X=0$. ()

二、选择题

10. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 且秩 $R(A) = m < n$, 则 ()
A. A 的任意一个 m 阶子式都不等于零; B. A 的任意一个 $m-1$ 阶子式都不等于零;
C. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解; D. 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 必有无穷多解.
11. 设 A 是 n 阶方阵, A 经过有限次矩阵的初等行变换后得到矩阵 B , 则有 () .
A. 存在矩阵 P , 使得 $PA=B$; B. 存在可逆矩阵 Q , 使得 $AQ=B$;
C. 存在可逆矩阵 P , 有 $PA=B$; D. 存在可逆矩阵 P 及 Q , 有 $PAQ=B$.
12. 行列式 $|A| = 0$ 时, 线性方程组 $AX = 0$ ()
A. 只有零解; B. 只有非零解; C. 无解; D. 有非零解.
13. 设 A 是 n 阶方阵, A 经过有限次矩阵的初等变换后得到矩阵 B , 则有 ()
A. $|A| = |B|$; B. $|A| \neq |B|$; C. $R(A) = R(B)$; D. $R(A) \neq R(B)$.
14. 设 n 阶方阵不可逆, 则必有 ()
A. $R(A) < n$; B. $R(A) = n-1$; C. $A = 0$; D. 方程组 $AX = 0$ 只有零解.
15. 设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 以下说法错误的是 () .
A. $Ax = b$ 有解的充分必要条件是 $|A| \neq 0$;
B. $Ax = b$ 无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, b)$;
C. $Ax = b$ 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$;
D. $Ax = b$ 有无穷多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$
16. 设矩阵 A 的秩为 r , 则 A 中 ()
A. 所有 $r-1$ 阶子式都不为零; B. 所有 $r-1$ 阶子式全为零;

C. 至少有 1 个 r 阶子式不为零; D. 所有 r 阶子式都不为零.

17. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 若 $R(A) = 2$, 则 k 的取值情况为 ().

A. $k = -2$; B. $k = 1$; C. $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$; D. 无法确定.

三、填空题

18. 已知 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ _____.

19. n 个方程 n 个未知数构成的线性方程组, 如果它的系数行列式 $D \neq 0$, 那么它一定有 _____ 解.

20. 线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是 _____.

21. 三元齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系只含 3 个向量, 则 $R(A) =$ _____.

22. 设 A 是 3×4 矩阵, 秩 $R(A) = 2$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则秩 $R(BA) =$ _____.

四、计算题

23. 问 λ 取何值时, 非齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

(1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷多解, 并求其通解.

(答案: (1) 当 $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$ 时, $R(A) = R(B) = 3$, 方程组有唯一解;

(2) 当 $k = -2$ 时, $R(A) = 2, R(B) = 3$, 方程组无解;

(3) 当 $k = 1$ 时, $R(A) = R(B) = 1$, 方程组有无数多解, 这时方程组的通解

是 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 其中 c_1, c_2 为任意实数.)

24. 问 λ 取何值时, 非齐次线性方程组 $\begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda. \end{cases}$

(1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷多解, 并求其通解.

(答案: (1) 当 $k \neq 0$ 且 $k \neq -3$ 时, $R(A) = R(B) = 3$, 方程组有唯一解;

(2) 当 $k = 0$ 时, $R(A) = 1, R(B) = 2$, 方程组无解;

(3) 当 $k = -3$ 时, $R(A) = R(B) = 2$, 方程组有无数多解, 这时方程组的通解

是 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, 其中 c 为任意实数.)

25. 利用矩阵的初等行变换, 求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

26. 求下列矩阵的秩, 并求一个最高阶非零子式。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

27. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{AX} = 2\mathbf{X} + \mathbf{A}, \quad \text{求 } \mathbf{X}.$$

28. 求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

(答案: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5/3 \\ -4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 c_1, c_2 为任意实数.)

29. 求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

(答案: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -9/7 \\ 1/7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 c_1, c_2 为任意实数.)

30. 解线性方程组: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. (答案: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -11/3 \\ -2 \end{bmatrix}$.)

