

§1 隐函数

隐函数是函数关系的另一种表现形式.讨论隐函数的存性、连续性与可微性,不仅出于深刻了解这类函数本身的需要,同时又为后面研究隐函数组的存在性问题打好了基础.

一、隐函数概念

二、隐函数存在性条件分析

三、隐函数定理

四、隐函数求导数举例

前页

后页

返回

一、隐函数概念

显函数：因变量可由自变量的某一分析式来表示的函数称为显函数。例如：

$$y = 1 + \sin^3 x, z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

隐函数：自变量与因变量之间的关系是由某一个方程式所确定的函数,通常称为隐函数。例如：

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, x^3 + y^3 + z^3 - 3xy = 0.$$

隐函数一般定义：设 $E \subset \mathbb{R}^2, F : E \rightarrow \mathbb{R}$, 和方程

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

若存在 $I, J \subset \mathbf{R}$, 使得对任一 $x \in I$, 有惟一确定的 $y \in J$ 与之对应, 能使 $(x, y) \in E$, 且满足方程 (1), 则称由方程 (1) 确定了一个定义在 I , 值域含于 J 的隐函数. 如果把此隐函数记为

$$y = f(x), \quad x \in I, \quad y \in J,$$

则成立恒等式

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \quad x \in I.$$

前页

后页

返回

注1 隐函数一般不易,甚至不能化为显函数,但不妨仍记为 $y = f(x)$.

注2 不是任一方程 $F(x, y) = 0$ 都能确定隐函数,

例如 $x^2 + y^2 + 1 = 0$ 显然不能确定任何隐函数.

注3 隐函数一般需要同时指出自变量与因变量的取值范围. 例如由方程 $x^2 + y^2 = 1$ 可确定如下两个函数:

前页

后页

返回

$$y = f_1(x) (= \sqrt{1-x^2}), \quad x \in [-1, 1], y \in [0, 1];$$

$$y = f_2(x) (= -\sqrt{1-x^2}), \quad x \in [-1, 1], y \in [-1, 0].$$

注4 类似地可定义多元隐函数. 例如: 由方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数 $z = f(x, y)$, 由方程 $F(x, y, z, u) = 0$ 确定的隐函数 $u = f(x, y, z)$, 等等.

在 § 2 还要讨论由多个方程确定隐函数组的问题.

二、隐函数存在性条件分析

要讨论的问题是：当函数 $F(x, y)$ 满足怎样一些条件时，由方程 (1) 能确定隐函数 $y = f(x)$ ，并使该隐函数具有连续、可微等性质？

(a) $\exists P_0(x_0, y_0)$ ，满足 $F(x_0, y_0) = 0$ ， $y_0 = f(x_0)$ 。

(b) 为使 $y = f(x)$ 在 x_0 连续，故要求 $F(x, y)$ 在点 P_0 连续是合理的。

(c) 为使 $y = f(x)$ 在 x_0 可导, 即曲线 $y = f(x)$ 在点 P_0 存在切线, 而此切线是曲面 $z = F(x, y)$ 在点 P_0 的切平面与 $z = 0$ 的交线, 故应要求 $F(x, y)$ 在点 P_0 可微, 且 $(F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$.

(d) 在以上条件下, 通过复合求导数, 由 (1) 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(x, f(x)) \Big|_{x=x_0} &= F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0) f'(x_0) = 0, \\ \Rightarrow f'(x_0) &= -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \end{aligned}$$

由此可见, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ 是一个重要条件.

三、隐函数定理

定理18.1 (隐函数存在惟一性定理) 设方程 (1) 中的函数 $F(x, y)$ 满足以下四个条件:

- (i) 在以 $P_0(x_0, y_0)$ 为内点的某区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上连续;
- (ii) $F(x_0, y_0) = 0$ (初始条件);
- (iii) 在 D 内存在连续的偏导数 $F_y(x, y)$;
- (iv) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

则有如下结论成立:

1° 存在某邻域 $U(P_0) \subset D$, 在 $U(P_0)$ 内由方程 (1) 唯一地确定了一个隐函数

$$y = f(x), \quad x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha),$$

它满足:

$f(x_0) = y_0$, 且当 $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 时, 使得

$$(x, f(x)) \in U(P_0), \quad F(x, f(x)) \equiv 0;$$

2° $f(x)$ 在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 上连续.

证 首先证明隐函数的存在与唯一性.

证明分为以下四步

前页

后页

返回

(a) “一点正, 一片正”

由条件 (iv), 不妨设

$$F_y(x_0, y_0) > 0.$$

因为 $F_y(x, y)$ 连续, 所以根据

保号性, $\exists \beta > 0$, 使得

$$F_y(x, y) > 0, (x, y) \in S,$$

其中 $S = [x_0 - \beta, x_0 + \beta] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \subset D$.

(b) “正、负上下分”

因 $F_y(x, y) > 0$, $(x, y) \in S$, 故 $\forall x \in [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$, 把 $F(x, y)$ 看作 y 的函数, 它在 $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ 上严格增, 且连续 (据条件 (i)).

特别对于函数 $F(x_0, y)$, 由条件 $F(x_0, y_0) = 0$ 可知

$$F(x_0, y_0 + \beta) > 0,$$

$$F(x_0, y_0 - \beta) < 0.$$

(c) “同号两边伸”

因为 $F(x, y_0 - \beta)$, $F(x, y_0 + \beta)$ 关于 x 连续, 故由

(b) 的结论, 根据保号性, $\exists \alpha (0 < \alpha \leq \beta)$, 使得

$$F(x, y_0 + \beta) > 0,$$

$$F(x, y_0 - \beta) < 0,$$

$$x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha).$$

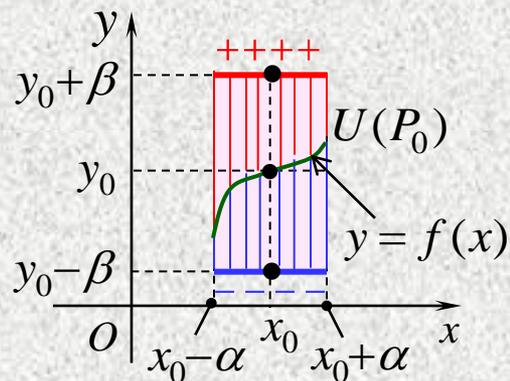
(d) “利用介值性”

$\forall \hat{x} \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, 因 $F(\hat{x}, y)$ 关于 y 连续, 且严格增, 故由 (c) 的结论, 依据介值性定理, 存在惟

一的 $\hat{y} \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$, 满足 $F(\hat{x}, \hat{y}) = 0$. 由 \hat{x} 的任意性, 这就证得存在惟一的隐函数:

$$y = f(x),$$

$$\begin{cases} x \in I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha), \\ y \in J = (y_0 - \beta, y_0 + \beta). \end{cases}$$



(d) 利用介值性

若记 $U(P_0) = I \times J$, 则定理结论 1° 得证.

下面再来证明上述隐函数的连续性:

即 $\forall \bar{x} \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, 欲证上述 $f(x)$ 在 \bar{x} 连续.

前页

后页

返回

如图 18-2 所示, $\forall \varepsilon > 0$, 取 ε 足够小, 使得 $y_0 - \beta \leq \bar{y} - \varepsilon < \bar{y} + \varepsilon \leq y_0 + \beta$, 其中 $\bar{y} = f(\bar{x})$.

由 $F(x, y)$ 对 y 严格增, 而

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

推知

$$F(\bar{x}, \bar{y} - \varepsilon) < 0, \quad F(\bar{x}, \bar{y} + \varepsilon) > 0.$$

类似于前面 (c), $\exists \delta > 0$, 使得

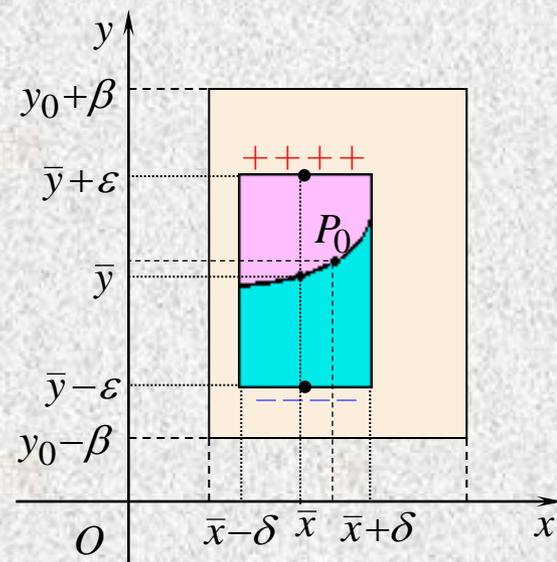


图 18-2

$$(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \subset (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha),$$

且当 $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ 时, 有

$$F(x, \bar{y} - \varepsilon) < 0, F(x, \bar{y} + \varepsilon) > 0.$$

类似于前面 (d), 由于隐函数惟一, 故有

$$\bar{y} - \varepsilon < f(x) < \bar{y} + \varepsilon, x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta),$$

因此 $f(x)$ 在 \bar{x} 连续. 由 \bar{x} 的任意性, 便证得 $f(x)$ 在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 上处处连续.

注1 定理 18.1 的条件 (i) ~ (iv) 仅是充分条件.

例如:

① $F(x, y) = y^3 - x^3 = 0$, $F_y(0, 0) = 0$, 在点 $(0, 0)$ 虽不满足条件 (iv), 但仍能确定唯一的隐函数 $y = x$.

② $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$ (双纽线), 在点 $(0, 0)$ 同样不满足条件 (iv); 如图 18-3 所示, 在该点无论多么小的邻域内, 确实

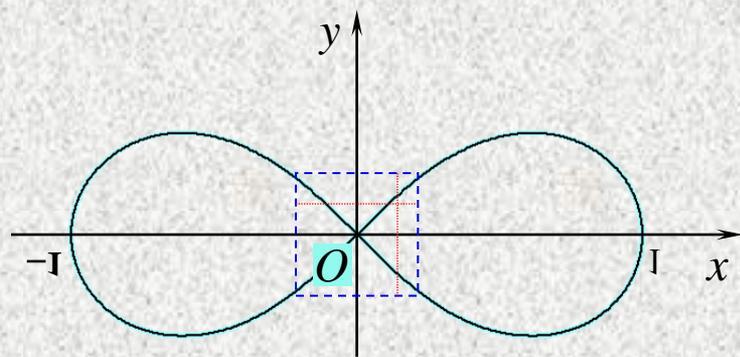


图 18-3

不能确定唯一的隐函数.

注2 条件 (iii)、(iv) 不仅是定理 18.1 的需要,更能保证隐函数有良好的性质,如后面定理 18.2.

注3 须强调的,定理 18.1 是一个局部性的.

注4 在方程 $F(x, y) = 0$ 中, x 与 y 的地位是平等的. 当条件 (iii)、(iv) 改为 $F_x(x, y)$ 连续,且 $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ 时,将存在局部的连续隐函数 $x = g(y)$.

定理 18.2 (隐函数可微性定理) 设函数 $F(x, y)$ 满足定理 18.1 中的条件 (i) ~ (iv), 在 D 内还存在连续的 $F_x(x, y)$. 则由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 在 I 内有连续的导函数, 且

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad (x, y) \in I \times J. \quad (2)$$

(注: 其中

$$I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \text{ 与 } J = (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$$

示于定理18.1 的证明 (d)).

证 设 $x, x + \Delta x \in I$, 则

$$y = f(x), y + \Delta y = f(x + \Delta x) \in J.$$

由条件易知 F 可微, 并有

$$F(x, y) = 0, F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

使用微分中值定理, $\exists \theta (0 < \theta < 1)$, 使得

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) \\ &= F_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y) \Delta x \\ &\quad + F_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y) \Delta y, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{F_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{F_y(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}.$$

因 f, F_x, F_y 都是连续函数, 故 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 $\Delta y \rightarrow 0$, 并有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{F_y(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)} \\ &= - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad (x, y) \in I \times J. \end{aligned}$$

显然 $f'(x)$ 也是连续函数.

注1 当 $F(x, y)$ 存在二阶连续偏导数时, 所得隐函数也二阶可导. 应用两次复合求导法, 得

$$F_x(x, y) + F_y(x, y)y' = 0,$$

$$F_{xx} + F_{xy}y' + (F_{yx} + F_{yy}y')y' + F_y y'' = 0.$$

将 (2) 式代入上式, 经整理后得到

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{1}{F_y}(F_{xx} + 2F_{xy}y' + F_{yy}y'^2) \\ &= \frac{2F_x F_y F_{xy} - F_y^2 F_{xx} - F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}. \end{aligned} \quad (3)$$

注2 利用公式 (2), (3) 求隐函数的极值:

(a) 求 $\begin{cases} F = 0 \\ F_x = 0 \end{cases}$ 的解.

(b) 在点 A 处因 $F_x = 0$, 而使 (3) 式化简为

$$y''|_A = - \frac{F_{xx}}{F_y} \Big|_A . \quad (4)$$

(c) 由极值判别法, 当 $y''|_A < 0$ (或 > 0) 时, 隐函数 $y = f(x)$ 在 \tilde{x} 取得极大值(或极小值) \tilde{y} .

注3 由方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (5)$$

确定隐函数 $z = f(x, y)$ 的相关定理简述如下:

设在以点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为内点的某区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上,

F 的所有一阶偏导数都连续, 并满足

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

则存在某邻域 $U(P_0) \subset D$, 在其内存在惟一的、连续可微的隐函数 $z = f(x, y)$, 且有

前页

后页

返回

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}. \quad (6)$$

更一般地，我们可以理解由方程

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$$

确定 n 元隐函数的相关定理，见教材下册

p.149 上的**定理18.3**。

前页

后页

返回

四、隐函数求导数举例

例1 讨论笛卡儿叶形线(图18-4)

$$x^3 + y^3 = 3axy \quad (a > 0) \quad (7)$$

所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的存在性, 并求其一阶、二阶导数.

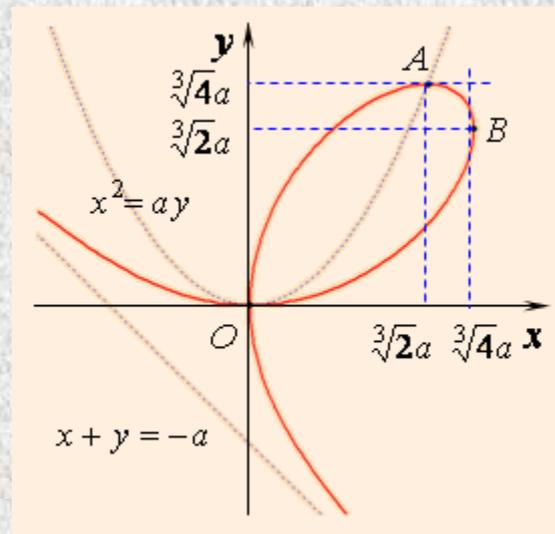


图 18-4

解 令 $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$.

先求出在曲线 (7) 上使 $F_y = 3(y^2 - ax) = 0$ 的点为 $O(0,0)$, $B(\sqrt[3]{4a}, \sqrt[3]{2a})$. 除此两点外, 方程 (7) 在其他各点处都能确定局部的隐函数 $y = f(x)$.

由公式 (2) 求得

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3(x^2 - ay)}{3(y^2 - ax)} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

为了使用公式 (3)，先算出：

$$2F_x F_y F_{xy} = -54a(y^2 - ax)(x^2 - ay),$$

$$F_y^2 F_{xx} = 54x(y^2 - ax)^2,$$

$$F_x^2 F_{yy} = 54y(x^2 - ay)^2.$$

然后再算出：

前页

后页

返回

$$\begin{aligned}
 y'' &= \frac{2F_x F_y F_{xy} - F_y^2 F_{xx} - F_x^2 F_{yy}}{F_y^3} \\
 &= \frac{-54[a(y^2 - ax)(x^2 - ay) + x(y^2 - ax)^2 + y(x^2 - ay)^2]}{27(y^2 - ax)^3} \\
 &= \frac{-2[-3ax^2y^2 + xy(x^3 + y^3 + a^3)]}{(y^2 - ax)^3} \\
 &= \frac{-2[-3ax^2y^2 + xy(3axy + a^3)]}{(y^2 - ax)^3} \\
 &= -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3} .
 \end{aligned}$$

前页

后页

返回

类似于例1的方法, 求出曲线上使 $y' = 0$ 的点为 $A(\sqrt[3]{2a}, \sqrt[3]{4a})$. 在几何上, 它是两条曲线

$$F(x, y) = 0 \text{ 和 } F_x(x, y) = 0$$

的交点 (见图). 容易验证 $y''|_A = -\frac{4}{\sqrt[3]{2a}} < 0$, 所以

隐函数 $y = f(x)$ 在点 A 取得极大值 $\sqrt[3]{4a}$.

以上讨论同时说明, 该曲线在点 A 和 B 分别有水平切线和垂直切线.

例2 试求由方程 $xyz^3 + x^2 + y^3 - z = 0$ 所确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(0, 1, 1)$ 处的全微分.

解 设

$$F(x, y, z) = xyz^3 + x^2 + y^3 - z.$$

由于 $F(0, 1, 1) = 0$, F_x, F_y, F_z 在 \mathbf{R}^3 上处处连续, 而

$$F_z(0, 1, 1) = (3xyz^2 - 1)|_P = -1 \neq 0,$$

因此在点 P 附近能唯一地确定连续可微的隐函数

$z = z(x, y)$; 且可求得它的偏导数如下:

前页

后页

返回

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz^3 + 2x}{1 - 3xyz^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz^3 + 3y^2}{1 - 3xyz^2}.$$

以 $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ 代入, 便得到

$$z_x|_P = 1, \quad z_y|_P = 3, \quad dz|_P = dx + 3dy.$$

例3 用隐函数方法处理反函数的存在性及其导数.

解 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有连续的导函数 $f'(x)$, 且 $f(x_0) = y_0$. 现在来考察方程

$$F(x, y) = y - f(x) = 0. \quad (8)$$

由于 $F(x_0, y_0) = 0$, $F_y = 1$, $F_x(x_0, y_0) = -f'(x_0)$,
因此只要 $f'(x_0) \neq 0$, 就能满足隐函数定理的所有
条件, 由方程 (8) 便能确定连续可微的隐函数

$$x = g(y), \quad y \in U(y_0).$$

因它满足 $F(y, g(y)) = y - f(g(y)) \equiv 0$, 故它就是
 $y = f(x)$ 的反函数. 应用隐函数求导公式, 可得

$$g'(y) = \frac{dx}{dy} = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{1}{-f'(x)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

前页

后页

返回

例 4 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(x - z, y - z) = 0$ 所确定的隐函数, 其中 F 具有连续的二阶偏导数, 试证: $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$.

证 易知 $F_x = F_1, F_y = F_2, F_z = -(F_1 + F_2)$, 于是有

$$z_x = \frac{F_1}{F_1 + F_2}, \quad z_y = \frac{F_2}{F_1 + F_2}.$$

由此得到 $z_x + z_y = 1$, 再分别对 x 与 y 求偏导数, 又得 $z_{xx} + z_{yx} = 0, z_{xy} + z_{yy} = 0$. 因在假设条件下, $z_{xy} = z_{yx}$, 故将此两式相加便得所需结果.

§ 2 隐函数组

隐函数组的存在性、连续性与可微性是函数方程组求解问题的理论基础. 利用隐函数组的一般思想, 又可进而讨论反函数组与坐标变换等特殊问题.

一、隐函数组概念

二、隐函数组定理

三、反函数组与坐标变换

一、隐函数组概念

设有一组方程

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 F 与 G 定义在 $V \subset \mathbf{R}^4$. 若存在 $D, E \subset \mathbf{R}^2$, 使得对于任给的 $(x, y) \in D$, 有惟一的 $(u, v) \in E$ 与之对应, 能使 $(x, y, u, v) \in V$, 且满足方程组 (1), 则称由 (1) 确定了隐函数组

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in D, (u, v) \in E,$$

并有

$$\begin{cases} F(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0, \\ G(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0, \end{cases} \quad (x, y) \in D.$$

关于隐函数组的一般情形 (含有 $m + n$ 个变量的 m 个方程所确定的 n 个隐函数), 以后详细讨论.

前页

后页

返回

首先来看看, 若由方程组 (1) 能确定两个可微的隐函数 $u = u(x, y)$ 与 $v = v(x, y)$, 则函数 F, G 应满足何种条件呢?

不妨先设 F, G 都可微, 由复合求导法, 通过对 (1) 分别求关于 x 与关于 y 的偏导数, 得到

$$\begin{cases} F_x + F_u u_x + F_v v_x = 0, \\ G_x + G_u u_x + G_v v_x = 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} F_y + F_u u_y + F_v v_y = 0, \\ G_y + G_u u_y + G_v v_y = 0. \end{cases} \quad (3)$$

前页

后页

返回

能由 (2) 与 (3) 惟一解出 (u_x, v_x) 与 (u_y, v_y) 的充要条件是雅可比 (Jacobi) 行列式不等于零, 即

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4)$$

由此可见, 只要 F, G 具有连续的一阶偏导数, 且 $J|_{P_0} \neq 0$, 其中 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 是满足 (1) 的某一初始点, 则由保号性定理, $\exists U(P_0)$, 使得在此邻域内 (4) 式成立.

根据以上分析, 便有下列隐函数组定理.

前页

后页

返回

二、隐函数组定理

定理 18.4 (隐函数组定理) 设方程组 (1) 中的函数

F 与 G 满足下列条件:

(i) 在以点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 为内点的某区域 $V \subset \mathbf{R}^4$ 上连续;

(ii) $F(P_0) = G(P_0) = \mathbf{0}$ (初始条件);

(iii) 在 V 内存在连续的一阶偏导数;

(iv) $J \Big|_{P_0} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \Big|_{P_0} \neq \mathbf{0}$.

则有如下结论成立:

1° 必定存在邻域 $U(P_0) = U(Q_0) \times U(W_0) \subset V$, 其中 $Q_0 = (x_0, y_0)$, $W_0 = (u_0, v_0)$, 使得

$$\forall (x, y) \in U(Q_0), \exists! (u, v) \in U(W_0),$$

$$\text{即有 } \begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in U(Q_0), (u, v) \in U(W_0);$$

且满足 $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$ 以及

$$\begin{cases} F(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0, \\ G(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0, \end{cases} \quad (x, y) \in U(Q_0).$$

前页

后页

返回

2° $u(x, y), v(x, y)$ 在 $U(Q_0)$ 上连续.

3° $u(x, y), v(x, y)$ 在 $U(Q_0)$ 上存在一阶连续偏导数, 且有

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}; \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}. \end{cases}$$

第二十三章有一般隐函数定理及其证明.

前页

后页

返回

例1 设有方程组

$$\begin{cases} xy + yz^2 + 4 = 0, \\ x^2y + yz - z^2 + 5 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

试讨论在点 $P_0(1, -2, 1)$ 的近旁能确定怎样的隐函数组？并计算各隐函数在点 P_0 处的导数。

解 易知点 P_0 满足方程组 (5)。设

$$\begin{cases} F(x, y, z) = xy + yz^2 + 4, \\ G(x, y, z) = x^2y + yz - z^2 + 5, \end{cases}$$

它们在 \mathbf{R}^3 上有连续的各阶偏导数. 再考察 F, G 在点 P_0 关于所有变量的雅可比矩阵

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix}_{P_0} &= \begin{bmatrix} y & x+z^2 & 2yz \\ 2xy & x^2+z & y-2z \end{bmatrix}_{P_0} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由于

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_{P_0} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

前页

后页

返回

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_{P_0} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,$$

因此由隐函数组定理可知，在点 P_0 近旁可以唯一地确定隐函数组：

$$\begin{cases} x = x(z), \\ y = y(z), \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} z = z(y), \\ x = x(y); \end{cases}$$

但不能肯定 y, z 可否作为 x 的两个隐函数。

运用定理 18.4 的结论 3°, 可求得隐函数在点 P_0 处的导数值:

$$\begin{cases} \left. \frac{dx}{dz} \right|_{P_0} = - \left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)} / \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \right)_{P_0} = - \frac{0}{4} = 0, \\ \left. \frac{dy}{dz} \right|_{P_0} = - \left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} / \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \right)_{P_0} = - \frac{(-8)}{4} = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left. \frac{dz}{dy} \right|_{P_0} = - \left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)} / \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} \right)_{P_0} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \\ \left. \frac{dx}{dy} \right|_{P_0} = - \left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)} / \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} \right)_{P_0} = \frac{0}{8} = 0. \end{cases}$$

例 2 设函数 $f(x, y), g(x, y)$ 具有连续的偏导数,
 $u = u(x, y)$ 与 $v = v(x, y)$ 是由方程组

$$u = f(ux, v + y), \quad g(u - x, v^2 y) = 0$$

所确定的隐函数组. 试求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

解 设 $F = u - f(ux, v + y), G = g(u - x, v^2 y)$, 则有

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y & F_u & F_v \\ G_x & G_y & G_u & G_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -uf_1 & -f_2 & 1 - xf_1 & -f_2 \\ -g_1 & v^2 g_2 & g_1 & 2vyg_2 \end{bmatrix}.$$

由此计算所需之雅可比行列式:

$$J_{uv} = \begin{vmatrix} 1 - x f_1 & -f_2 \\ g_1 & 2v y g_2 \end{vmatrix} = 2v y g_2 - 2x y v f_1 g_2 + f_2 g_1,$$

$$J_{xv} = \begin{vmatrix} -u f_1 & -f_2 \\ -g_1 & 2v y g_2 \end{vmatrix} = -2y u v f_1 g_2 - f_2 g_1,$$

$$J_{uy} = \begin{vmatrix} 1 - x f_1 & -f_2 \\ g_1 & v^2 g_2 \end{vmatrix} = v^2 g_2 - x v^2 f_1 g_2 + f_2 g_1.$$

于是求得

前页

后页

返回

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{J_{xv}}{J_{uv}} = \frac{2yuvf_1g_2 + f_2g_1}{2yvg_2 - 2xyvf_1g_2 + f_2g_1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{J_{uy}}{J_{uv}} = \frac{xv^2f_1g_2 - f_2g_1 - v^2g_2}{2yvg_2 - 2xyvf_1g_2 + f_2g_1}.$$

前页

后页

返回

三、反函数组与坐标变换

设有一函数组

$$u = u(x, y), v = v(x, y), (x, y) \in B(\subset \mathbf{R}^2), \quad (6)$$

它确定了一个映射 (或变换) :

$$T: B \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ P(x, y) \mapsto Q(u, v).$$

写成点函数形式, 即为 $Q = T(P), P \in B$; 并记 B 的象集为 $B' = T(B)$. 现在的问题是: 函数组 (6) 满足何种条件时, T 存在逆变换 T^{-1} ? 即存在

$$T^{-1}: B' \rightarrow B,$$

$$Q(u, v) \mapsto P(x, y)$$

$$(\text{或 } P = T^{-1}(Q), Q \in B'),$$

亦即存在一个函数组

$$x = x(u, v), y = y(u, v), (u, v) \in B', \quad (7)$$

使得满足

$$u \equiv u(x(u, v), y(u, v)), v \equiv v(x(u, v), y(u, v)).$$

这样的函数组 (7) 称为函数组 (6) 的**反函数组**. 它的存在性问题可化为隐函数组的相应问题来处理.

前页

后页

返回

为此, 首先把方程组 (6) 改写为

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = u - u(x, y) = 0, \\ G(x, y, u, v) = v - v(x, y) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

然后将定理 18.4 应用于 (8), 即得下述定理.

定理 18.5 (反函数组定理) 设 (6) 中函数在某区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上具有连续的一阶偏导数, $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点, 且

$$u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0), \left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} \neq 0.$$

前页

后页

返回

则在点 $P_0'(u_0, v_0)$ 的某邻域 $U(P_0')$ 内, 存在惟一的一组反函数 (7), 使得

$$x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0);$$

$$(x(u, v), y(u, v)) \in U(P_0);$$

$$u \equiv u(x(u, v), y(u, v)), v \equiv v(x(u, v), y(u, v)).$$

此外, 反函数组 (7) 在 $U(P_0')$ 内存在连续的一阶偏导数; 若记

$$J_{xy} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)},$$

前页

后页

返回

则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} \bigg/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \\ &= -\frac{1}{J_{xy}} \begin{vmatrix} 1 & -u_y \\ 0 & -v_y \end{vmatrix} = \frac{v_y}{J_{xy}}, \end{aligned} \right\} (9)$$

同理又有

$$\left. \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u_y}{J_{xy}}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{v_x}{J_{xy}}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u_x}{J_{xy}} \right\}$$

由 (9) 式进一步看到:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \frac{1}{J_{xy}^2} \begin{vmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{vmatrix} \\ &= \frac{u_x v_y - u_y v_x}{J_{xy}^2} = \frac{J_{xy}}{J_{xy}^2} = \mathbf{1} / \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.\end{aligned}$$

此式表示: 互为反函数组的 (6) 与 (7), 它们的雅可比行列式互为倒数, 这和以前熟知的反函数求导公式相类似. 于是可把一元函数的导数和函数组 (6) 的雅可比行列式看作对应物.

前页

后页

返回

例3 平面上点的直角坐标 (x, y) 与极坐标 (r, θ) 之间的坐标变换为

$$T: x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

试讨论它的逆变换.

解 由于

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r,$$

因此除原点 $(r = 0)$ 外, 在其余一切点处, T 存在逆变换 T^{-1} :

前页

后页

返回

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0, \end{cases}$$

$$\text{或 } \theta = \begin{cases} \operatorname{arccot} \frac{x}{y}, & y > 0, \\ \pi + \operatorname{arccot} \frac{x}{y}, & y < 0. \end{cases}$$

例4 空间直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (ρ, φ, θ) 之间的坐标变换为 (见图18-5)

$$T : \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

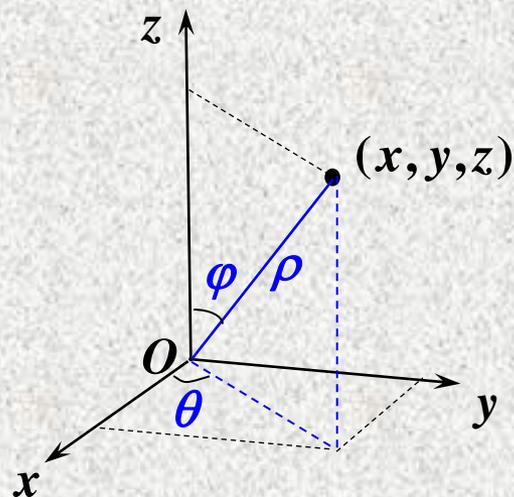


图 18-5

由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} &= \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 \sin \varphi, \end{aligned}$$

前页

后页

返回

因此在 $\rho^2 \sin \varphi \neq 0$ (即除去 Oz 轴上的一切点) 时,
 T 存在逆变换 T^{-1} :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arccos \frac{z}{\rho}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

例5 设 $\varphi(x, t)$ 二元连续可微函数, 对

$T: u = x + at, v = x - at$ 试把弦振动方程

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (a > 0), \quad (10)$$

变成以 u, v 为自变量的种形

解 据题意, 是要把方程 (10) 变换成以 u, v 作为自变量的形式. 现在按此目标计算如下: 首先有

$$u_x = v_x = 1, \quad u_t = -v_t = a, \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, t)} = -2a \neq 0,$$

故 T 的逆变换存在, 而且又有

$$du = u_x dx + u_t dt = dx + a dt, \quad dv = dx - a dt.$$

依据一阶微分形式不变性, 得到

$$d\varphi = \varphi_u du + \varphi_v dv = (\varphi_u + \varphi_v) dx + a(\varphi_u - \varphi_v) dt,$$

并由此推知

$$\varphi_x = \varphi_u + \varphi_v, \quad \varphi_t = a(\varphi_u - \varphi_v).$$

继续求以 u, v 为自变量的 φ_{xx} 与 φ_{tt} 的表达式:

$$\begin{aligned}\varphi_{xx} &= \frac{\partial}{\partial u}(\varphi_u + \varphi_v)u_x + \frac{\partial}{\partial v}(\varphi_u + \varphi_v)v_x \\ &= \varphi_{uu} + \varphi_{vu} + \varphi_{uv} + \varphi_{vv} = \varphi_{uu} + 2\varphi_{uv} + \varphi_{vv}, \\ \varphi_{tt} &= a \frac{\partial}{\partial u}(\varphi_u - \varphi_v)u_t + a \frac{\partial}{\partial v}(\varphi_u - \varphi_v)v_t \\ &= a^2(\varphi_{uu} - 2\varphi_{uv} + \varphi_{vv}).\end{aligned}$$

最后得到以 u, v 为自变量的 微分方程为

$$a^2\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = 4a^2\varphi_{uv} = 0, \quad \text{即} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} = 0.$$

前页

后页

返回

§3 几何应用

在本节中所讨论的曲线和曲面，由于它们的方程是以隐函数(组)的形式出现的，因此在求它们的切线或切平面时，都要用到隐函数(组)的微分法.

一、平面曲线的切线与法线

二、空间曲线的切线与法平面

三、曲面的切平面与法线

前页

后页

返回

一、平面曲线的切线与法线

曲线 $L: F(x, y) = 0$;

条件: $P_0(x_0, y_0)$ 为 L 上一点, 在 P_0 近旁, F 满足
隐函数定理条件, 可确定可微的隐函数:

$$y = y(x) \quad (\text{或 } x = x(y));$$

L 在 P_0 处的切线:

$$y - y_0 = - \left[F_x(P_0) / F_y(P_0) \right] (x - x_0)$$

$$\left(\text{或 } x - x_0 = - \left[F_y(P_0) / F_x(P_0) \right] (y - y_0) \right).$$

总之, 当 $(F_x(P_0), F_y(P_0)) \neq (0, 0)$ 时, 就有

法向量: $\vec{n} = (F_x(P_0), F_y(P_0));$

切线方程: $F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) = 0;$

法线方程: $F_y(P_0)(x - x_0) - F_x(P_0)(y - y_0) = 0.$

(1)

例1 求笛卡儿叶形线

$$2(x^3 + y^3) - 9xy = 0$$

在点 $P_0(2, 1)$ 处的切线与法线.

解 设 $F(x, y) = 2(x^3 + y^3) - 9xy$. 由 § 1 例 2 的讨论(这里 $a = 3/2$), F 在点 P_0 近旁满足隐函数定理

的条件. 容易算出

$$(F_x(P_0), F_y(P_0)) = (15, -12),$$

于是所求的切线与法线分别为

$$15(x - 2) - 12(y - 1) = 0, \text{ 即 } 5x - 4y - 6 = 0;$$

$$12(x - 2) + 15(y - 1) = 0, \text{ 即 } 4x + 5y - 13 = 0.$$

前页

后页

返回

例2 设一般二次曲线为

$$L: Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$P_0(x_0, y_0) \in L$. 试证 L 在点 P_0 处的切线方程为

$$Ax_0x + B(y_0x + x_0y) + Cy_0y \\ + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0.$$

证 令 $G(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$,

则有
$$\begin{cases} G_x(P_0) = 2Ax_0 + 2By_0 + 2D, \\ G_y(P_0) = 2Bx_0 + 2Cy_0 + 2E. \end{cases}$$

由此得到所求切线为

$$(Ax_0 + By_0 + D)(x - x_0) \\ + (Bx_0 + Cy_0 + E)(y - y_0) = 0,$$

利用 (x_0, y_0) 满足曲线 L 的方程, 即

$$F = -(Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0),$$

整理后便得到

$$Ax_0x + B(y_0x + x_0y) + Cy_0y \\ + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0.$$

前页

后页

返回

二、空间曲线的切线与法平面

先从参数方程表示的曲线开始讨论.

在第五章 § 3 已学过, 对于平面曲线

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

若 $P_0(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ 是其上一点, 则曲线

在点 P_0 处的切线为

$$y - y_0 = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x_0), \quad \text{或} \quad \frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)}.$$

下面讨论空间曲线.

(A) 用参数方程表示的空间曲线:

$$L: x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta.$$

若 $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in L$, 且有

$$x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0) \neq 0,$$

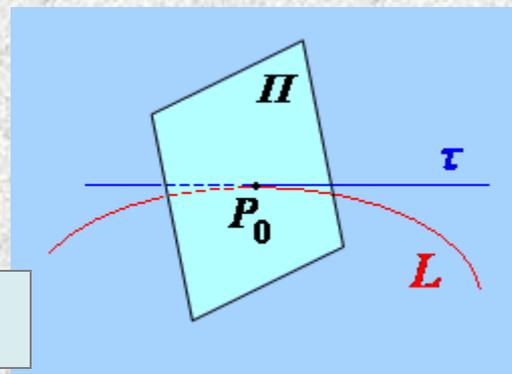
类似于平面曲线的情形, 不难求得 P_0 处的切线为

$$\tau: \frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \quad (2)$$

过点 P_0 且垂直于切线 τ 的平面 Π , 称为曲线 L 在点 P_0 处的法平面 (见图18-7).

因为切线 τ 的方向向量即为法平面 Π 的法向量, 所以法平面的方程为

图 18-7



$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0. \quad (3)$$

(B) 用直角坐标方程表示的空间曲线:

$$L: \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

设 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in L$; F, G 在点 P_0 近旁具有连续的一阶偏导数, 且

$$(J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}) \Big|_{P_0} \neq (0, 0, 0),$$

$$\text{其中 } J_{xy} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}, J_{yz} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, J_{zx} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}.$$

不妨设 $J_{xy}(P_0) \neq 0$, 于是存在隐函数组

$$x = x(z), \quad y = y(z), \quad z = z.$$

这也就是曲线 L 以 z 作为参数的一个参数方程.

根据公式 (2), 所求切线方程为

$$\tau: \quad \frac{x - x_0}{x'(z_0)} = \frac{y - y_0}{y'(z_0)} = \frac{z - z_0}{1}.$$

应用隐函数组求导公式, 有

$$x'(z_0) = -J_{zy}(P_0)/J_{xy}(P_0),$$

$$y'(z_0) = -J_{xz}(P_0)/J_{xy}(P_0).$$

于是最后求得切线方程为

$$\tau: \frac{x - x_0}{J_{yz}(P_0)} = \frac{y - y_0}{J_{zx}(P_0)} = \frac{z - z_0}{J_{xy}(P_0)}. \quad (5)$$

相应于 (3) 式的法平面方程则为

$$\begin{aligned} \Pi: J_{yz}(P_0)(x - x_0) + J_{zx}(P_0)(y - y_0) \\ + J_{xy}(P_0)(z - z_0) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

前页

后页

返回

例3 求曲线

$$L: x^2 + y^2 + z^2 = 50, \quad x^2 + y^2 = z^2$$

在点 $P_0(3,4,5)$ 处的切线与法平面.

解 曲线 L 是一球面与一圆锥面的交线. 令

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 50,$$

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

根据公式 (5) 与 (6), 需先求出切向向量. 为此计算

F, G 在点 P_0 处的雅可比矩阵:

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix}_{P_0} = 2 \begin{bmatrix} x & y & z \\ x & y & -z \end{bmatrix}_{P_0} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 6 & 8 & -10 \end{bmatrix}.$$

由此得到所需的雅可比行列式:

$$J_{xy}(P_0) = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$J_{yz}(P_0) = \begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = -160,$$

$$J_{zx}(P_0) = \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 120.$$

故切向量为

$$\vec{\tau} = (-160, 120, 0) // (-4, 3, 0),$$

据此求得

$$\text{切线: } \begin{cases} \frac{x-3}{-4} = \frac{y-4}{3}, \\ z-5=0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 3x+4y-25=0, \\ z=5; \end{cases}$$

$$\text{法平面: } -4(x-3) + 3(y-4) + 0 \cdot (z-5) = 0,$$

$$\text{即 } -4x + 3y = 0 \quad (\text{平行于 } z \text{ 轴}).$$

三、曲面的切平面与法线

以前知道, 当 f 为可微函数时, 曲面 $z = f(x, y)$

在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面为

$$z - z_0 = f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0).$$

现在的新问题是: 曲面 S 由方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (7)$$

给出. 若点 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, $F(x, y, z)$ 在 P_0 近旁具有连续的一阶偏导数, 而且

$$(F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)) \neq (0, 0, 0), \quad (8)$$

前页

后页

返回

不妨设 $F_z(P_0) \neq 0$, 则由方程 (7) 在点 P_0 近旁唯一地确定了连续可微的隐函数 $z = f(x, y)$.

因为

$$f_x(P_0) = -\frac{F_x(P_0)}{F_z(P_0)}, \quad f_y(P_0) = -\frac{F_y(P_0)}{F_z(P_0)},$$

所以 S 在 P_0 处的切平面为

$$z - z_0 = -\frac{F_x(P_0)}{F_z(P_0)}(x - x_0) - \frac{F_y(P_0)}{F_z(P_0)}(y - y_0).$$

又因 (8) 式中非零元素的不指定性, 故切平面方程

一般应写成

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0. \quad \dots\dots (9)$$

随之又得到所求的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(P_0)}. \quad (10)$$

§4 条件极值

条件极值问题的特点是：极值点的搜索范围要受到各自不同条件的限制. 解决这类极值问题的方法叫做拉格朗日乘数法. 条件极值问题的实际应用非常广泛, 而且还能用来证明或建立不等式.

一、问题引入

二、拉格朗日乘数法

三、应用举例

[前页](#)

[后页](#)

[返回](#)

一、问题引入

很多极值问题，目标函数的自变量不能在其定义域上自由变化，而是要受到某些条件的约束。

要设计一个容积为 V 的长方形无盖水箱，试问长、宽、高各等于多少时，可使得表面积达到最小？

若设长、宽、高各等于 x, y, z ，则

目标函数： $S = 2z(x + y) + xy$ ；

约束条件： $xyz = V$ 。

例1 设曲线 $z = x^2 + y^2$, $x + y + z = 1$. 求此曲线上的

的点到原点距离之最大、最小值. 对此问题有

目标函数: $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

约束条件: $z = x^2 + y^2$, $x + y + z = 1$.

还可举出很多这种带有约束条件的极值问题.

定义 设目标函数为

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbf{R}^n;$$

约束条件为如下一组方程:

$$\Phi: \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, k = 1, 2, \dots, m \quad (m < n).$$

为简便起见, 记 $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 并设

$$\Omega = \{ P \mid P \in D, \varphi_k(P) = 0, k = 1, 2, \dots, m \}.$$

若存在 $P_0 \in \Omega$, $\delta > 0$, 使得

$$f(P_0) \leq f(P), \quad \forall P \in \Omega \cap U(P_0; \delta) \quad (\text{或 } \forall P \in \Omega),$$

则称 $f(P_0)$ 是 $f(P)$ 在约束条件 Φ 之下的极小值 (或最小值), 称 P_0 是相应的极小值点 (或最小值点). 类似地又可定义条件极大 (或最大) 值.

二、拉格朗日乘数法

引入辅助函数

$$\begin{aligned} & L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1) \end{aligned}$$

称此函数为拉格朗日函数，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 称为拉格朗日乘数。

定理 18.6 设上述条件极值问题中的函数 f 与 φ_k ($k = 1, 2, \dots, m$) 在区域 D 上有连续一阶偏导数。若

D 的内点 $P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ 是该条件极值问题的极值点, 且

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{P_0} = m,$$

则存在 m 个常数 $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}$, 使得

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$$

为拉格朗日函数 (3) 的稳定点, 即它是如下 $n + m$ 个方程的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, k = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

说明 对于 $n = 2, m = 1$ 的情形, 已在前面作了说明; 对一般情形的证明, 将放到二十三章的**定理 23.19** 中去进行.

三、应用举例

定理 18.6 指出的方法称为拉格朗日乘数法. 下面用这种方法先来求解本节开头给出的两个例题.

例1 解 此例以往的解法是从条件式解出显函数,

例如 $z = \frac{V}{xy}$, 代入目标函数后, 转而求解

$$S = \frac{2V}{xy}(x + y) + xy$$

的普通极值问题. 可是这样做并不总是方便的, 而且往往无法将条件式作显化处理, 更不用说多个条

前页

后页

返回

件式的情形了. 现在的新办法是设辅助函数

$$L = 2(xz + yz) + xy + \lambda(xyz - V),$$

并求解以下方程组:

$$\begin{cases} L_x = 2z + y + \lambda yz = 0, \\ L_y = 2z + x + \lambda xz = 0, \\ L_z = 2(x + y) + \lambda xy = 0, \\ L_\lambda = xyz - V = 0. \end{cases}$$

为消去 λ , 将前三式分别乘以 x, y, z , 则得

$$\begin{cases} 2xz + xy = -\lambda xyz, \\ 2yz + xy = -\lambda xyz, \\ 2z(x + y) = -\lambda xyz. \end{cases}$$

两两相减后立即得出 $x = y = 2z$, 再代入第四式, 便求得

$$\frac{x^3}{2} = V \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V} = y, z = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}.$$

注 由以上结果还可以得到一个不等式 (这是获得不等式的一种好方法). 那就是具体算出目标函数

(表面积) 的最小值:

$$S_{\min} = 2 \cdot \frac{\sqrt[3]{2V}}{2} (\sqrt[3]{2V} + \sqrt[3]{2V}) + (\sqrt[3]{2V})^2 = 3 \sqrt[3]{4V^2},$$

于是有 $2z(x+y) + xy \geq 3 \sqrt[3]{4V^2}$, 其中 $V = xyz$. 消去 V 后便得不等式

$$2z(x+y) + xy \geq 3 \sqrt[3]{4(xyz)^2}, \quad x > 0, y > 0, z > 0.$$

例2 解 这里有两个条件式, 需要引入两个拉格朗日常数; 而且为了方便计算, 把目标函数改取距离

的平方 (这是等价的), 即设

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 1).$$

求解以下方程组:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ L_y &= 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \\ L_z &= 2z - \lambda + \mu = 0, \\ L_\lambda &= x^2 + y^2 - z = 0, \\ L_\mu &= x + y + z - 1 = 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2(x + \lambda x) \\ = 2(y + \lambda y) \\ = 2z - \lambda. \end{cases}$$

由此又得 $(1 + \lambda)(x - y) = 0 \Rightarrow x = y$. 再代入条件

式, 继而求得: (这里 $\lambda \neq -1$, 否则将无解)

$$\left. \begin{array}{l} z = 2x^2 \\ z = 1 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, \\ z = 1 - (-1 \pm \sqrt{3}) = 2 \mp \sqrt{3}. \end{cases}$$

最后得到

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2(-1 \pm \sqrt{3})^2}{4} + (2 \mp \sqrt{3})^2$$

前页

后页

返回

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - 2\sqrt{3} + 3) + 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 9 - 5\sqrt{3}, \\ \frac{1}{2}(1 + 2\sqrt{3} + 3) + 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 9 + 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

故原点至已知曲线上点的最小距离与最大距离分别为

$$d_{\min} = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}, \quad d_{\max} = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}.$$

例3 已知圆柱面

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - 1 = 0, \quad (2)$$

前页

后页

返回

它与平面 $x + y - z = 0$ 相交得一椭圆，试求此椭圆的面积。

分析 (i) 如果能求得该椭圆的长、短半轴 a 与 b ，则椭圆面积为 πab ；

(ii) 由方程 (4) 看到，此圆柱面关于坐标原点对称的，故此圆柱面的中心轴是通过坐标原点的某一直线；

(iii) 因为所给平面也是通过坐标原点的，所以此平面上的椭圆截线必以坐标原点为其中心点。

解 由以上分析, 自原点至椭圆上任意点 (x, y, z) 的距离 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 之最大、小值, 就是该椭圆的长、短半轴. (说明: 本例的题型与例2 相类似, 但在具体计算策略上将有较大差异.)

设拉格朗日函数为

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y - z) - \mu(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - 1),$$

并令

$$\left\{ \begin{array}{l} L_x = 2x + \lambda - \mu(2x - y - z) = 0, \quad (3) \\ L_y = 2y + \lambda - \mu(2y - z - x) = 0, \quad (4) \\ L_z = 2z - \lambda - \mu(2z - x - y) = 0, \quad (5) \\ L_\lambda = x + y - z = 0, \quad (6) \\ L_\mu = -(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - 1) = 0. \quad (7) \end{array} \right.$$

对 (3), (4), (5) 三式分别乘以 x, y, z 后相加, 得到

$$\begin{aligned} & 2(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda(x + y - z) \\ & - 2\mu(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0, \end{aligned}$$

借助 (6), (7) 两式进行化简, 又得

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \mu.$$

这说明 d^2 的极值就是这里的 μ (即 d 的极值就是 $\sqrt{\mu}$), 问题便转而去计算 μ . 为此先从 (3)–(5) 式消去 λ , 得到一个线性方程组:

$$\begin{cases} (2 - \mu)x + 2\mu y + (2 - \mu)z = 0, \\ 2\mu x + (2 - \mu)y + (2 - \mu)z = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

它有非零解 (x, y, z) 的充要条件是

$$\begin{vmatrix} 2-\mu & 2\mu & 2-\mu \\ 2\mu & 2-\mu & 2-\mu \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\mu^2 + 20\mu - 12 = 0,$$

$$\text{即 } \mu^2 - \frac{20}{3}\mu + 4 = 0. \quad (8)$$

由前面讨论知道, 方程 (8) 的两个根 μ_1, μ_2 就是 d^2 的最大、小值, 即 a^2 与 b^2 ; 而 $\mu_1\mu_2 = 4$, 于是

$$S = \pi ab = \pi\sqrt{\mu_1\mu_2} = 2\pi.$$