高等数学（下册）

同济六版

南阳师范学院——数学与统计学院

李婧　制

第十章

重 积 分

一元函数积分学

↓

多元函数积分学 $\begin{cases} \text{重积分} \\ \text{曲线积分} \\ \text{曲面积分} \end{cases}$

第一节　二重积分的概念与性质

一、引例

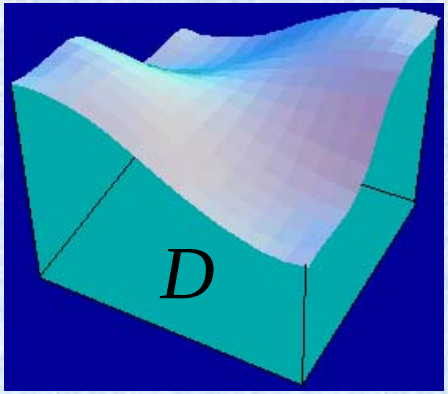
二、二重积分的定义

三、二重积分的性质

一、引例

1.曲顶柱体的体积

$z = f(x, y)$



给定曲顶柱体:

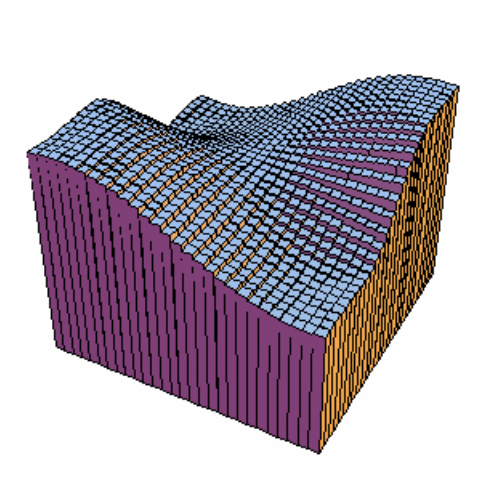
底: xoy 面上的闭区域 D

顶: 连续曲面 $z = f(x, y) \geq 0$

侧面: 以 D 的边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面

求其体积.

解法: 类似定积分解决问题的思想:



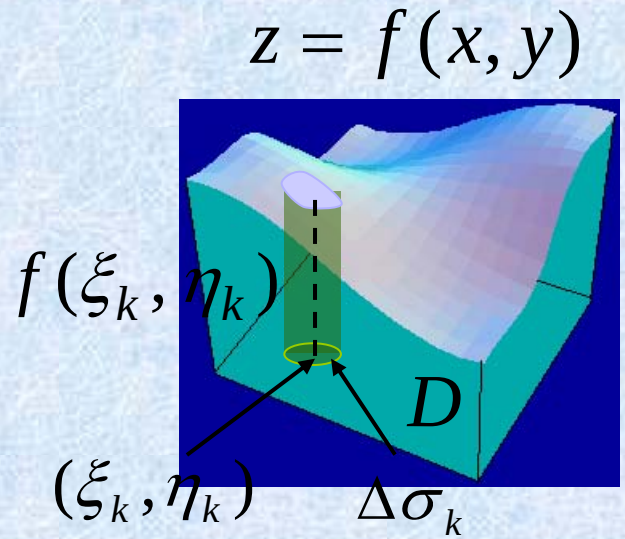
"分割，近似代替，求和，取极限"

1)“分割”

用任意曲线网分D为 n 个区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$$

以它们为底把曲顶柱体分为 n 个小曲顶柱体



2)“近似代替”

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点 (ξ_k, η_k), 则

$$\Delta V_k \approx f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

3) “求和”

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

4) “取极限”

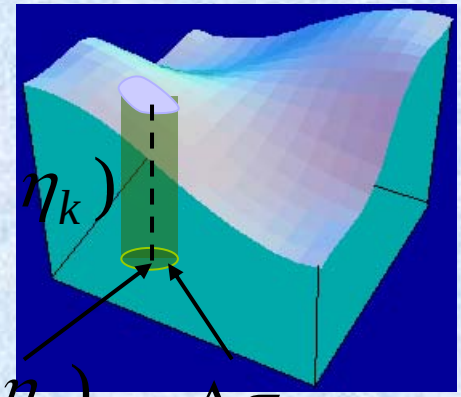
定义$\Delta\sigma_k$的直径为

$$\lambda(\Delta\sigma_k)=\max\{|P_1P_2|\,|\,P_1,P_2\in\Delta\sigma_k\}$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\{\ \lambda(\Delta\sigma_k)\ \}$

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

$z=f(x,y)$

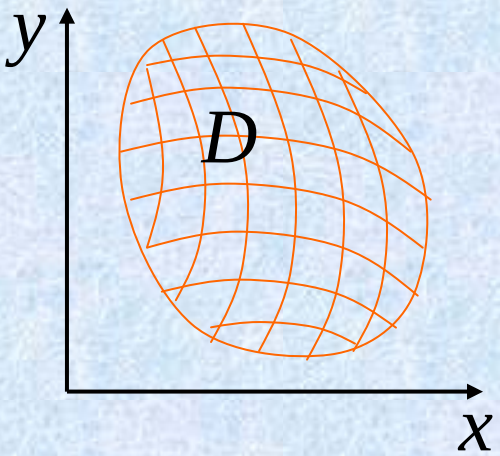


2. 平面薄片的质量

有一个平面薄片, 在 xoy 平面上占有区域 D, 其面密度为 $\mu(x,y)\in C$, 计算该薄片的质量 M.

若 $\mu(x,y)\equiv\mu$ (常数), 设 D 的面积为 σ, 则

$$M=\mu\cdot\sigma$$



若 $\mu(x,y)$ 非常数, 用

"分割, 近似代替, 求和, 取极限"

解决.

1)"分割"

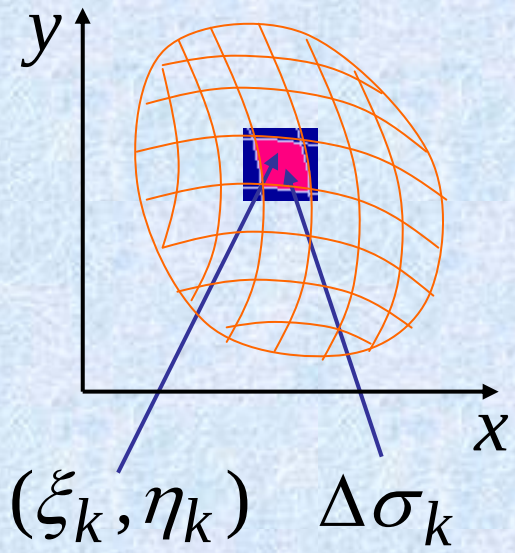
用任意曲线网分 D 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$,

相应把薄片也分为小区域.

2)“近似代替”

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点 (ξ_k, η_k), 则第 k 小块的质量

$$\Delta M_k \approx \mu(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$



3)“求和”

$$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

4)“取极限”

令 $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \{\lambda(\Delta\sigma_k)\}$

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

两个问题的**共性**:

(1) 解决问题的步骤相同

“大化小, 常代变, 近似和,取极限”

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

平面薄片的质量:

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

二、二重积分的定义及可积性

定义: 设 $f(x,y)$ 是定义在有界区域 D 上的有界函数，将区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$，任取一点 $(\xi_k,\eta_k)\in\Delta\sigma_k$，若存在一个常数 I，使

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k}_{\text{积分和}}\overset{\text{记作}}{=\!=\!=}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

则称 $f(x,y)$ 可积，称 I 为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**.

$$\iint_{\underbrace{D}_{\text{积分域}}}\boxed{\underbrace{f(x,y)}_{\text{被积函数}}\,\underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{\text{面积元素}}}$$

积分表达式

x,y 称为积分变量

如果 $f(x,y)$ 在D上可积，可用平行坐标轴的直线来划分区域D，这时 $\Delta\sigma_k = \Delta x_k \Delta y_k$，因此面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 也常记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，二重积分记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

引例1中曲顶柱体体积:

$$V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

引例2中平面薄板的质量:

$$M = \iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

二重积分的几何意义

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \begin{cases} f(x,y)\geq 0, & \text{表示曲顶柱体的体积} \\ f(x,y)\leq 0, & \text{表示曲顶柱体体积的负值} \\ f(x,y)\text{有正有负}, & \text{表示曲顶柱体体积的代数和} \end{cases}$$

三、二重积分的性质

1. $\iint_D k f(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ （k 为常数）

2. $\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma$

$$= \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

3. $\boxed{\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma}$

（$D = D_1 \cup D_2$，D_1，D_2无公共内点）

积分区域的可加性

4. 若在D上 $f(x,y) \equiv 1$，σ 为D 的面积，则

$$\sigma = \iint_D 1 \cdot \mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma$$

5. 若在D上 $f(x,y)\le\varphi(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

特别，由于 $-|f(x,y)|\le f(x,y)\le|f(x,y)|$

$$\boxed{\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma}$$

6. 设 $M=\max\limits_D f(x,y),\ m=\min\limits_D f(x,y)$, D 的面积为σ,

则有 $$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\sigma$$

例. 设D 是第二象限的一个有界闭域，且 $0<y<1$, 则

$$I_1=\iint_D yx^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2=\iint_D y^2x^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3=\iint_D y^{1/2}x^3\,\mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为 (D)

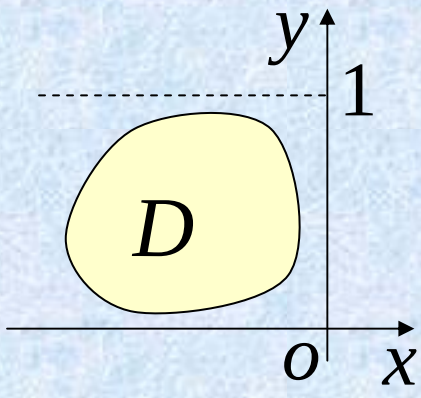
$(A)\ I_1\le I_2\le I_3;\qquad (B)\ I_2\le I_1\le I_3;$

$(C)\ I_3\le I_2\le I_1;\qquad (D)\ I_3\le I_1\le I_2.$

提示: 因 $0<y<1$, 故 $y^2\le y\le y^{1/2}$;

又因 $x^3<0$, 故在D上有

$$y^{1/2}x^3\le yx^3\le y^2x^3$$



7.(二重积分的中值定理) 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域D上连续, σ 为D 的面积 ,则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$, 使

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

证: 由性质6 可知,

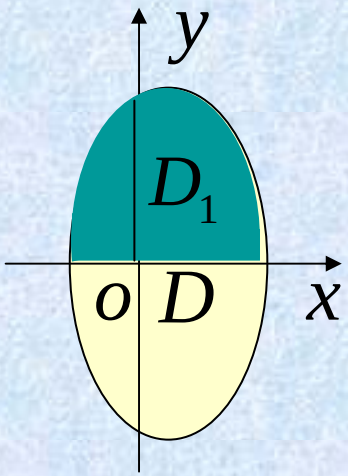
$$m \le \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M$$

由连续函数介值定理, 至少有一点 $(\xi,\eta)\in D$ 使

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

因此 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

8. 设函数 $f(x,y)$在闭区域上连续, 域D 关于x 轴对称, D 位于 x 轴上方的部分为D_1, 在 D 上



(1) $f(x,-y)=f(x,y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

(2) $f(x,-y)=-f(x,y)$, 则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$

当区域关于 y 轴对称, 函数关于变量 x 有奇偶性时, 仍有类似结果.

如, D_1 为圆域 $D: x^2+y^2 \le 1$ 在第一象限部分, 则有

$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{D_1} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

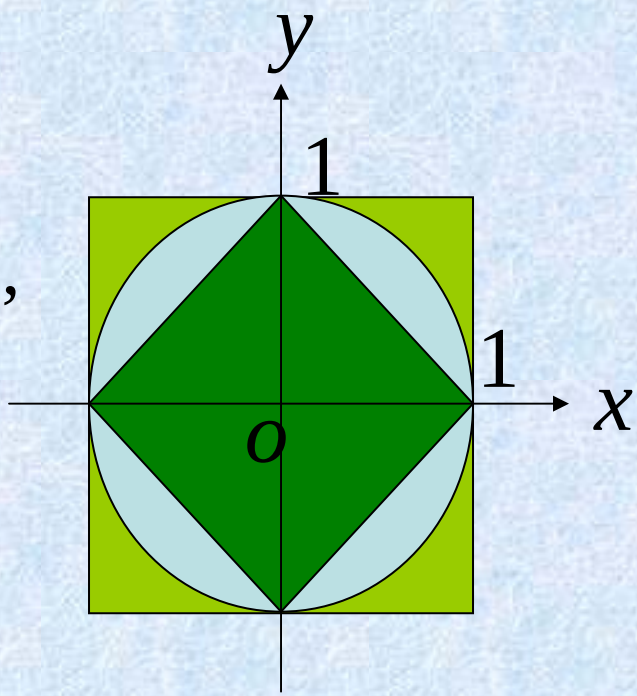
$$= \iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

思考与练习

1. 比较下列积分值的大小关系:

$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad I_2 = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



解: I_1, I_2, I_3 被积函数相同, 且非负,

由它们的积分域范围可知

$$I_2 < I_1 < I_3$$

第二节　二重积分的计算法

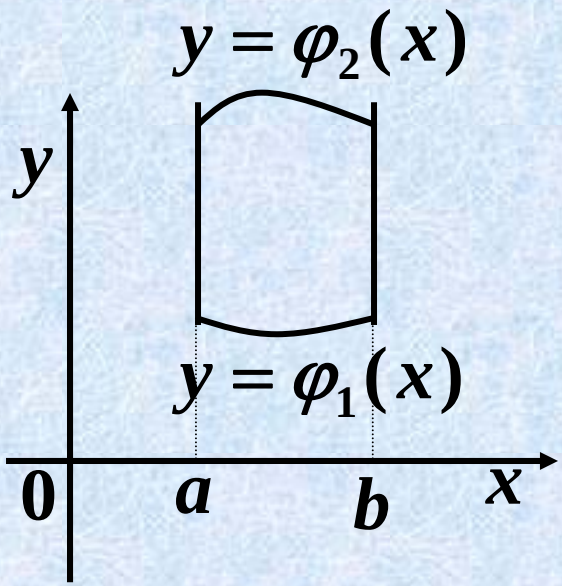
一、利用直角坐标计算二重积分

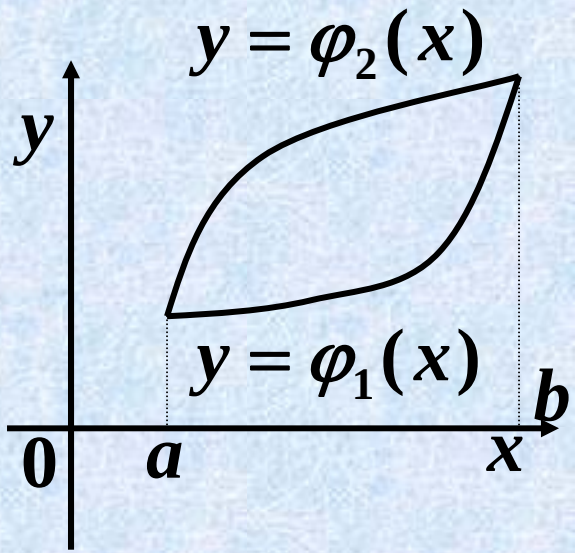
二、利用极坐标计算二重积分

一、利用直角坐标计算二重积分

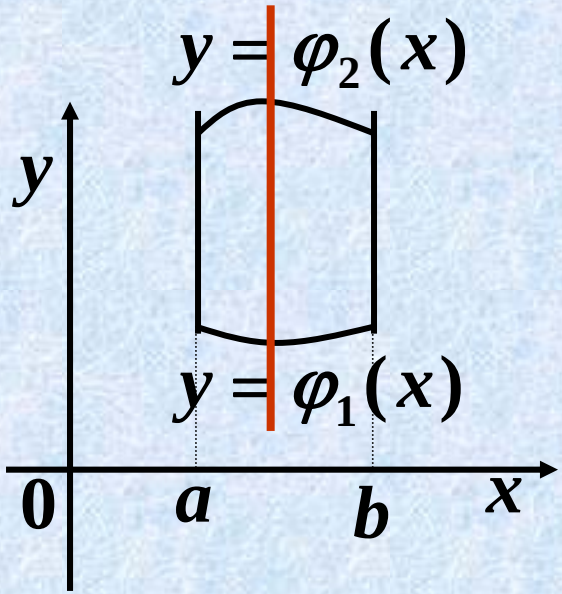
X型区域

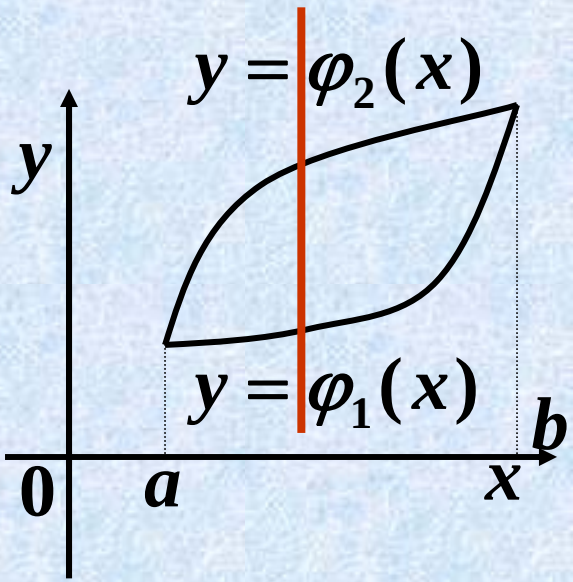
设D： $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$





$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$在$[a,b]$连续

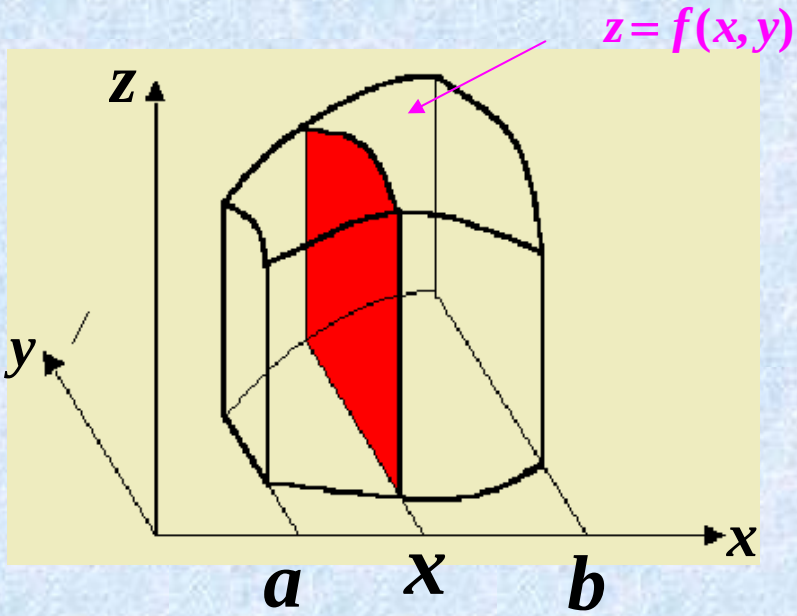




X型区域的特点:

穿过区域D的内部且平行于Y轴的直线与D的边界相交不多于两点.

下面用几何观点来讨论$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$的计算，并假定 $f(x,y)\geq 0$.



将曲顶柱体看作是平行截面体

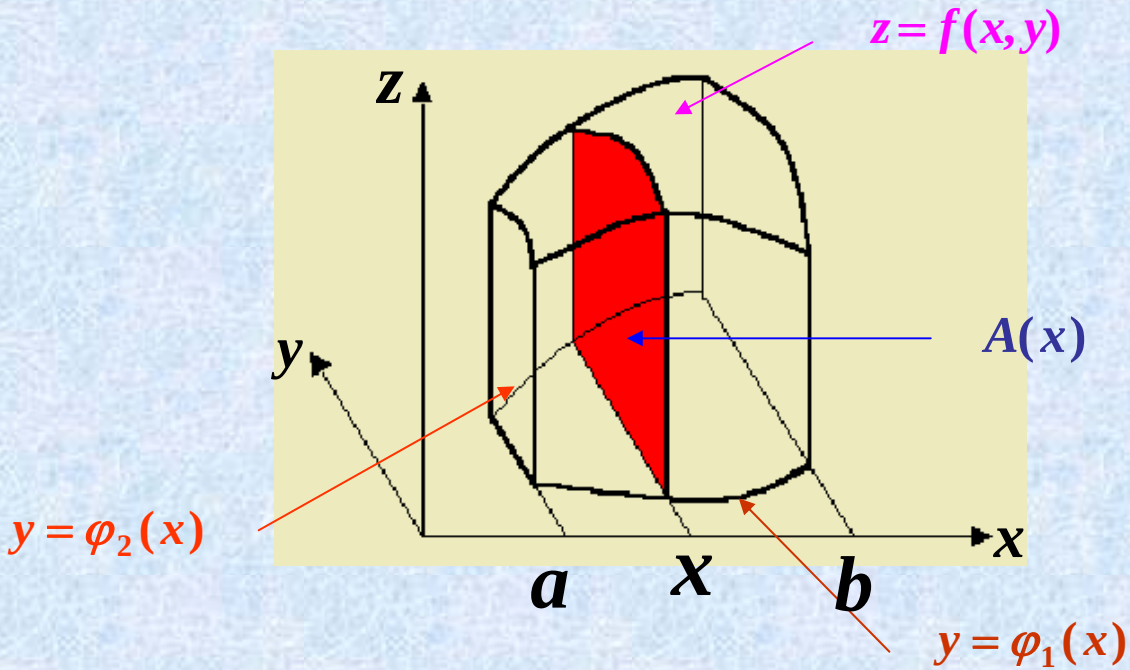
$$V=\{A(x): a\leq x\leq b\}$$

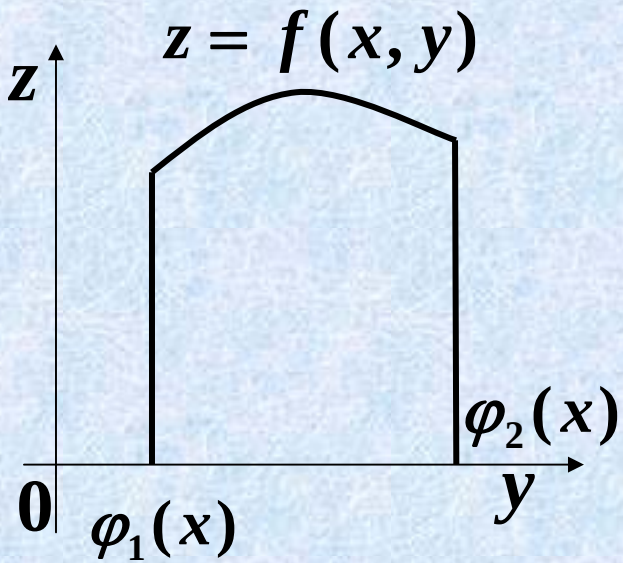
来求其体积。

$$\iint_D f(x,y)dxdy = V = \int_a^b A(x)dx$$

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$





设D： $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \quad a \le x \le b$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

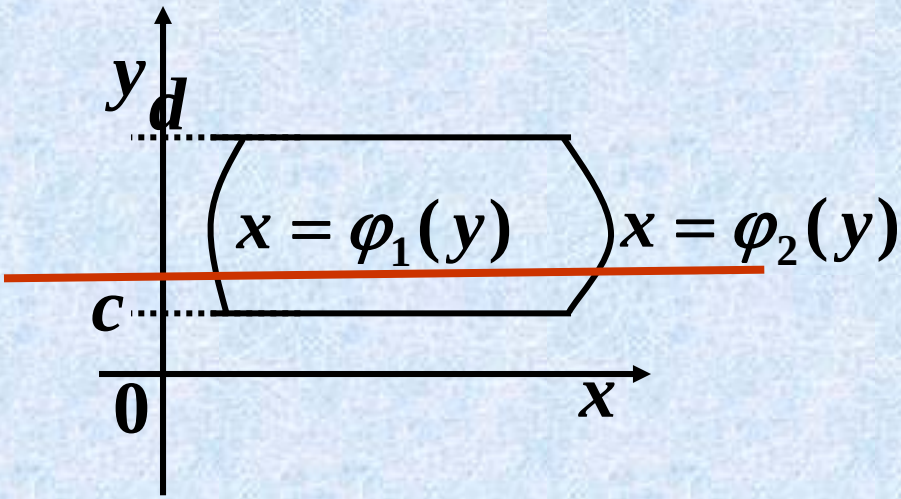
$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

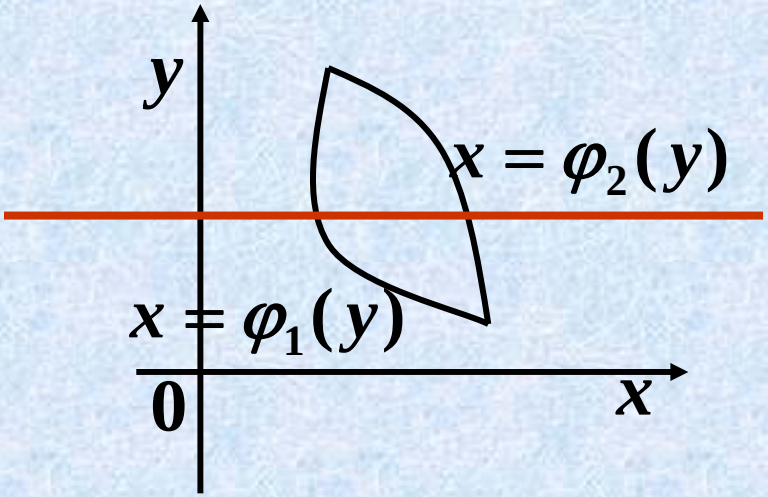
计算顺序： 先对 y 求定积分（x 看作常数）

然后把所得结果对 x 求定积分。

Y型区域

若D：$\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y),\ c \le y \le d$





Y型区域的特点:

穿过区域D的内部且平行于X轴的直线与D的边界相交不多于两点.

D为Y型区域

即D： $\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y), c \le y \le d$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

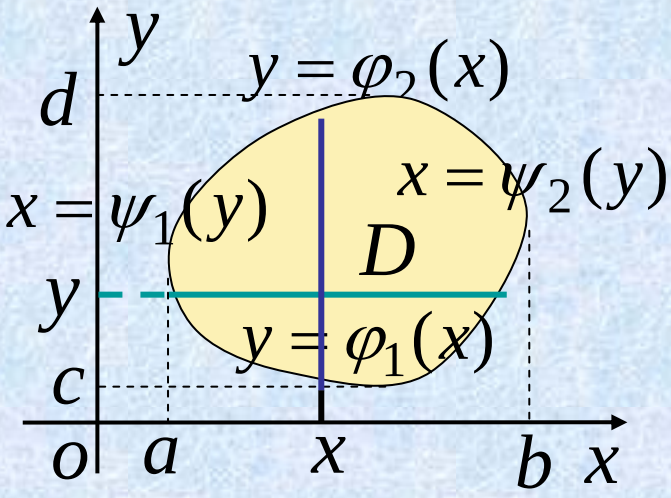
$$= \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$$

说明: (1) 若积分区域既是X型区域又是Y 型区域，

则有 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

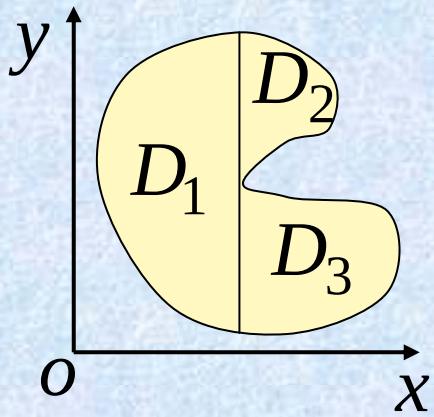
$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$



为计算方便,可选择积分序, 必要时还可以交换积分序.

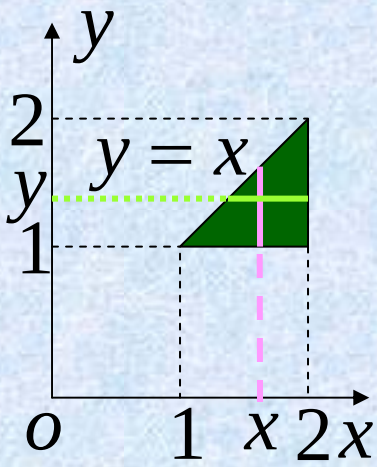
(2)若积分域较复杂,可将它分成若干X型域或Y型域，则

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$$



例1. 计算 $I=\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是直线 $y=1, x=2$, 及 $y=x$ 所围的闭区域.

解法1. 将D看作X–型区域, 则$D:\begin{cases}1\le y\le x\\1\le x\le 2\end{cases}$



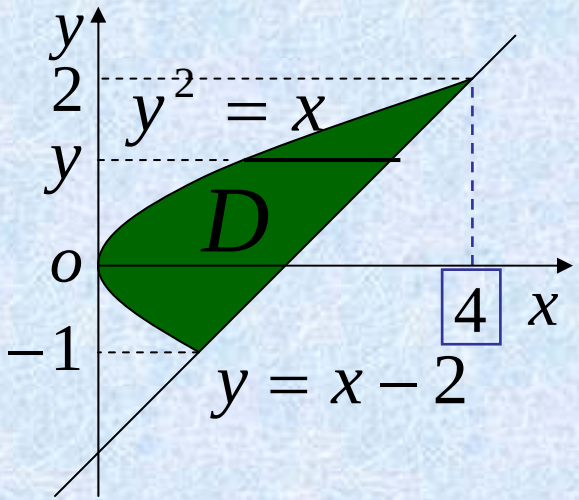
$$I=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^x xy\,\mathrm{d}y=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}xy^2\right]_1^x\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{1}{2}x\right]\mathrm{d}x=\frac{9}{8}$$

解法2. 将D看作Y–型区域, 则 $D:\begin{cases}y\le x\le 2\\1\le y\le 2\end{cases}$

$$I=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_y^2\mathrm{d}y=\int_1^2\left[2y-\tfrac{1}{2}y^3\right]\mathrm{d}y=\frac{9}{8}$$

例2. 计算 $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域.



解: 为计算简便, 先对 x 后对 y 积分,

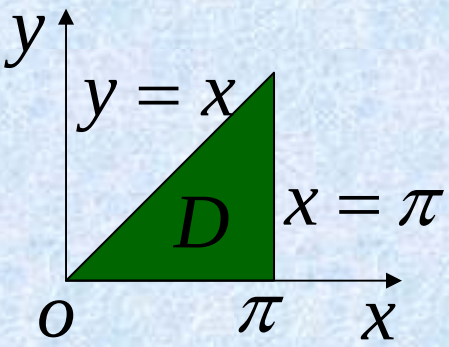
则 $$D: \begin{cases} y^2 \le x \le y + 2 \\ -1 \le y \le 2 \end{cases}$$

$$\therefore \iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{2} \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{2} \left[\tfrac{1}{2}x^2 y\right]_{y^2}^{y+2} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} [y(y+2)^2 - y^5]\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4} + \frac{4}{3}y^3 + 2y^2 - \frac{1}{6}y^6\right]_{-1}^{2} = \frac{45}{8}$$

例3. 计算 $\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是直线 $y=x$, $y=0$, $x=\pi$ 所围成的闭区域.



解: 由被积函数可知, 先对 x 积分不行, 因此取 D 为 $X-$ 型域:

$$D:\begin{cases}0\le y\le x\\ 0\le x\le\pi\end{cases}$$

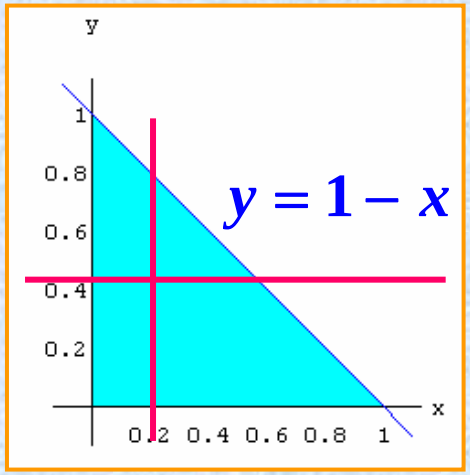
$$\therefore\quad \iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2$$

说明: 有些二次积分为了积分方便, 还需交换积分顺序.

练习 改变积分 $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$ 的次序.

解 积分区域如图



原式 $= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y)dx.$

二、利用极坐标计算二重积分

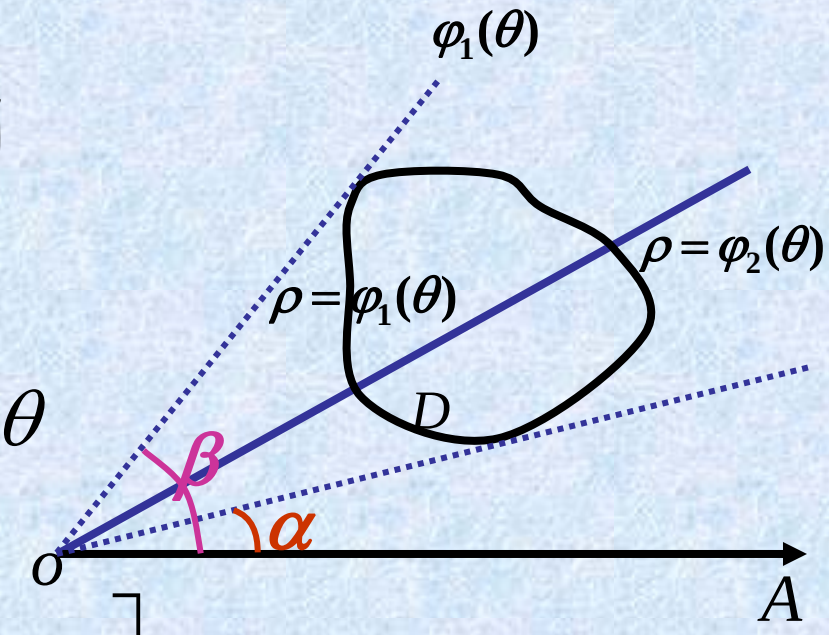
设$f(x,y)$在D上可积

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}}$$

$$dxdy = \rho d\rho d\theta$$

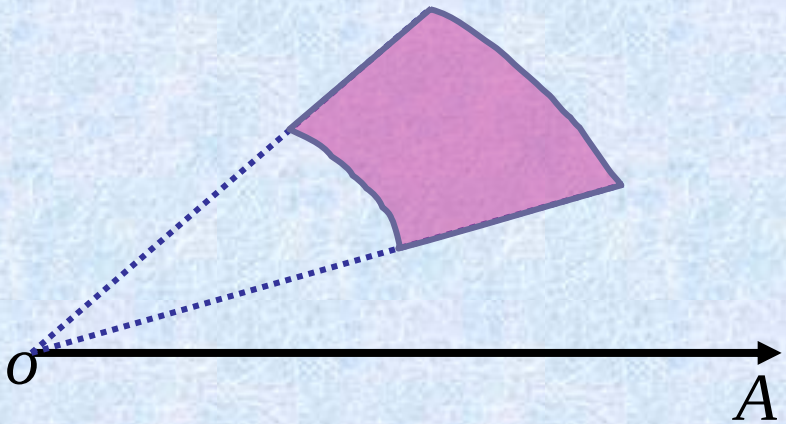
设 $D:\begin{cases}\phi_1(\theta)\le\rho\le\phi_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{cases}$，则

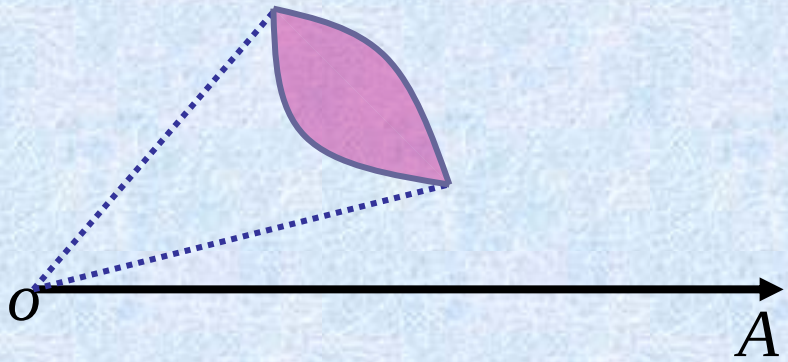


$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

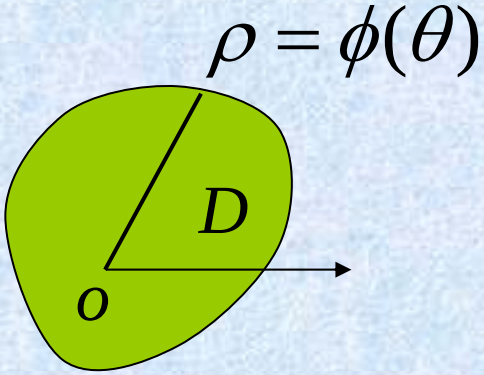




特别, 对 $D:\begin{cases} 0 \le \rho \le \phi(\theta) \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

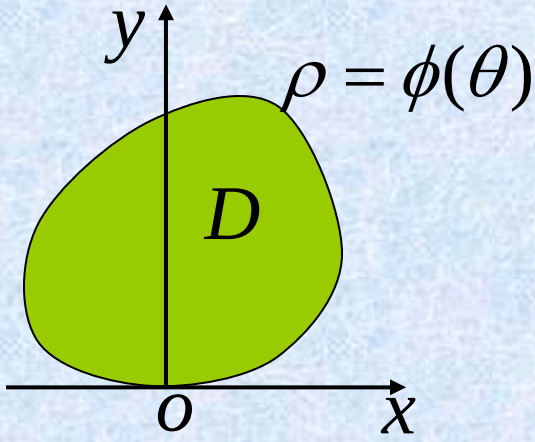
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\phi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$



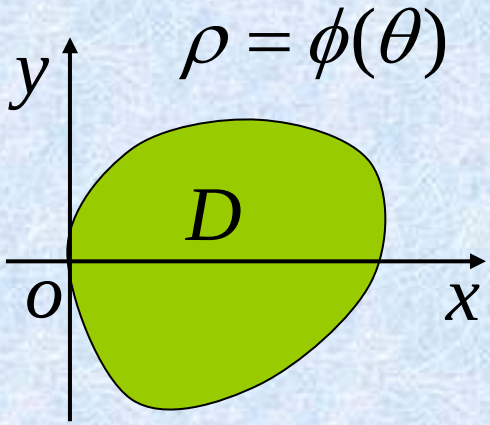
注: 如果积分区域的边界方程用极坐标表示比较方便, 如积分区域为圆形、扇形、圆环 等, 且被积函数含有 $x^2 + y^2$ 可考虑用极坐标计算法.

思考: 下列各图中域 D 分别与 x , y 轴相切于原点,试问 θ 的变化范围是什么?

(1)



(2)



答: (1) $0 \le \theta \le \pi$; (2) $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

例4. 计算$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D: x^2+y^2\le a^2$.

解: 在极坐标系下$D:\begin{cases}0\le\rho\le a\\0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$,故

$$原式=\iint_D e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\left[\frac{-1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^a=\pi(1-e^{-a^2})$$

由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数，故本题无法用直角坐标计算.

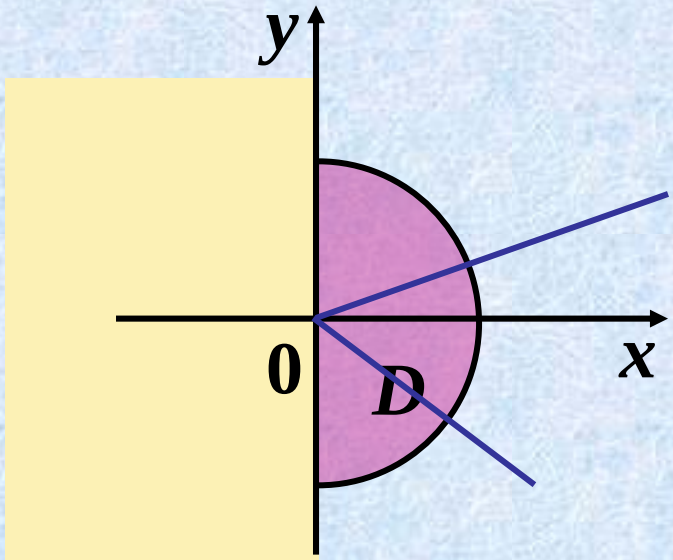
注: 利用例4可得到一个在概率论与数理统计及工程上非常有用的反常积分公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

练习　求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$　　$D: x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0$

解　$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

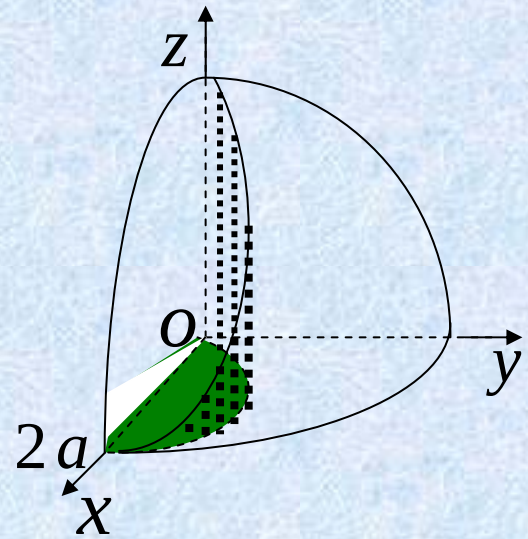
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho\,\rho d\rho = \pi \cdot \frac{1}{3}$$



例5. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 所截得的(含在柱面内的)立体的体积.

解: 设 $D: 0\le r\le 2a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

由对称性可知



$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

作业

- 2（2）（4）
- 6（1）（2）
- 13（1）（2）
- 14 (1)
- 18

第三节　三重积分

一、三重积分的概念

二、三重积分的计算

一、三重积分的概念

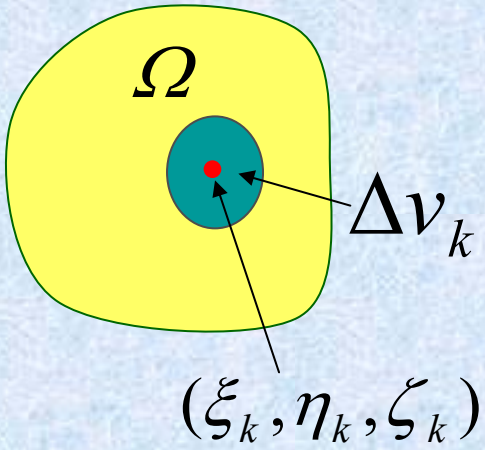
引例: 设在空间有限闭区域 Ω 内分布着某种不均匀的物质,密度函数为 $\mu(x,y,z)\in C$,求分布在 Ω 内的物质的质量 M.

解决方法: 类似二重积分解决问题的思想, 采用

"分割, 近似代替, 求和, 取极限"

可得

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k$$



定义. 设 $f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Omega$, 若对 Ω 作任意分割: $\Delta v_k\,(k=1,2,\cdots,n)$, 任意取点 $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta v_k$, 下列"乘积和式"极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k \overset{\text{记作}}{=\!=} \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的**三重积分**. $\mathrm{d}v$ 称为**体积元素**, 在直角坐标系下常写作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

性质: 三重积分的性质与二重积分相似.

二、三重积分的计算

1. 利用直角坐标计算三重积分

方法1．投影法 (“先一后二”)

即把积分区域Ω 投影到某个坐标面上

方法2．截面法 (“先二后一”)

即把积分区域Ω 投影到某条坐标轴上

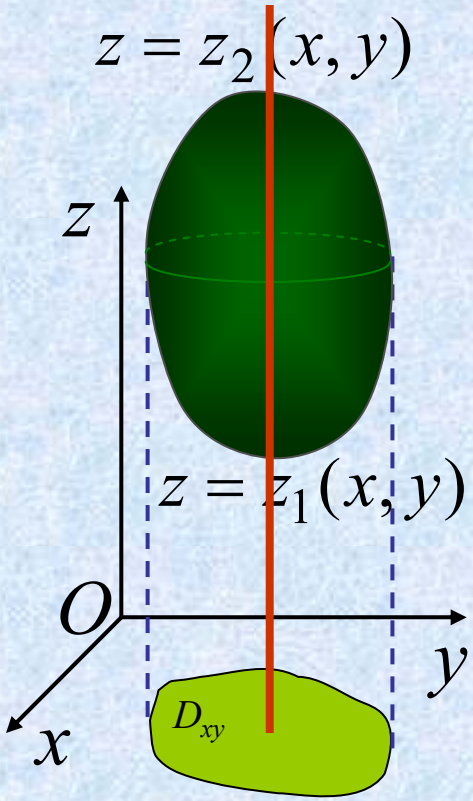
方法1. 投影法 (“先一后二”)

$$\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \\ (x,y)\in D_{xy} \end{cases}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

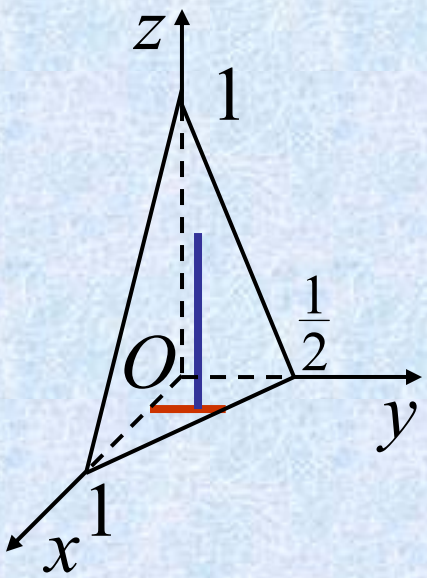
$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)dxdy$$

$$\overset{\text{记作}}{=\!=\!=}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$



把积分区域Ω 投影到xoy坐标面上

例1. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.



解:

$$\Omega:\begin{cases} 0\le z\le 1-x-2y \\ 0\le y\le \frac{1}{2}(1-x) \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$$

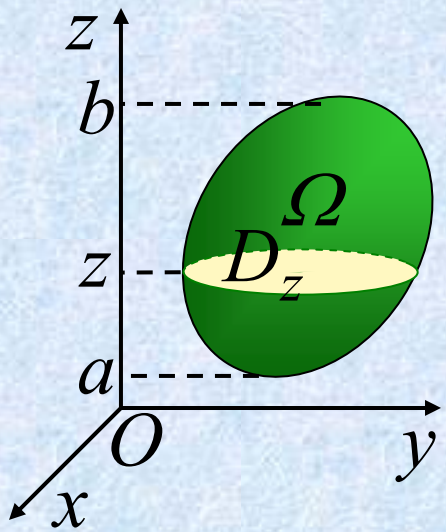
$$\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}(1-x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{48}$$

方法2. 截面法 (“先二后一”)

$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z\\ a\le z\le b\end{cases}$$



$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_a^b\Big(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{记作}}{=\!=}\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

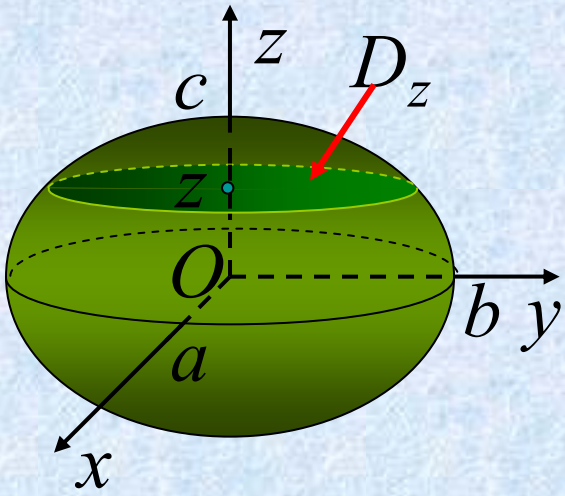
把积分区域Ω 投影到z轴上

截面法的适用范围:(1)被积函数只含一个变量;

(2)截面面积易求。

例2. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，

其中$\Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1.$



分析:

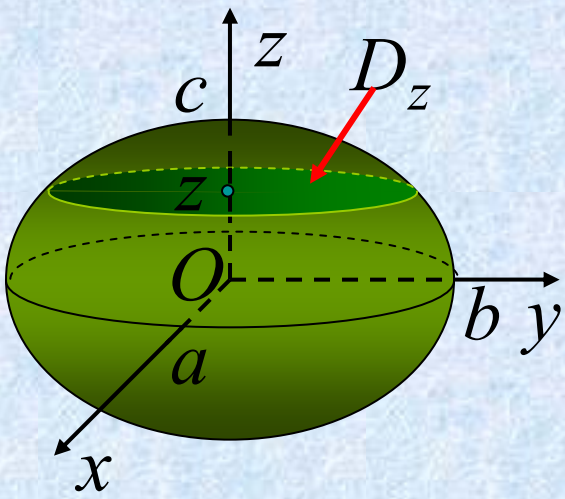
(1) 被积函数只含一个变量 z;

(2) 用平行于xoy面的平面去截Ω，得到截面D_z；

截面是椭圆，面积可以求出。

例2. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，

其中$\Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1.$



解: $\Omega: \begin{cases} -c\le z\le c \\ D_z: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2} \end{cases}$

用“截面法”
（把积分区域Ω 投影到z轴上）

$$\therefore \iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

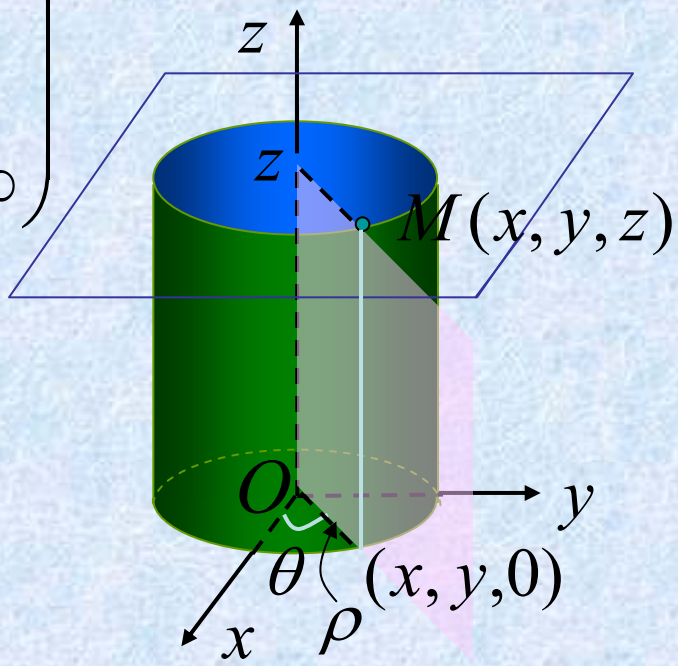
$$=2\int_{-c}^{c} z^2\,\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

练习：P164　1(2)，　3

2. 利用柱坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$,将x,y用极坐标ρ,θ代替, 则(ρ,θ,z)就称为点M的柱坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{pmatrix}$$



坐标面分别为

$\rho=$常数 → 圆柱面

$\theta=$常数 → 半平面

$z=$常数 → 平面

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

$x = \rho\cos\theta$	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$
$y = \rho\sin\theta$	$\mathrm{d}v = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$

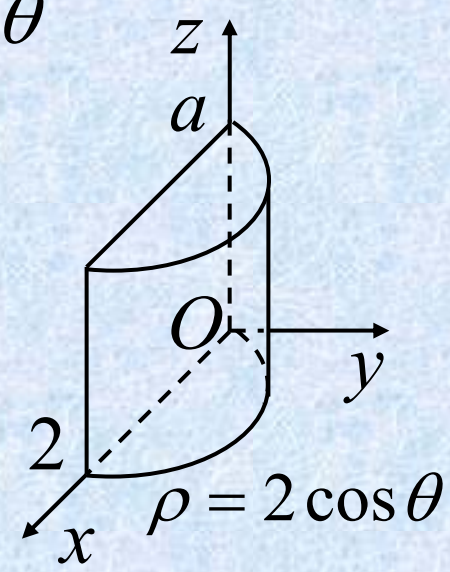
适用范围:

（1） 积分域表面用柱面坐标表示时方程简单；

（2） 被积函数用柱面坐标表示时变量互相分离.

例3. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 为由柱面 $x^2+y^2=2x$ 及平面 $z=0,\ z=a\ (a>0),\ y=0$ 所围成半圆柱体.

解：在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases} 0\le\rho\le 2\cos\theta \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le z\le a \end{cases}$



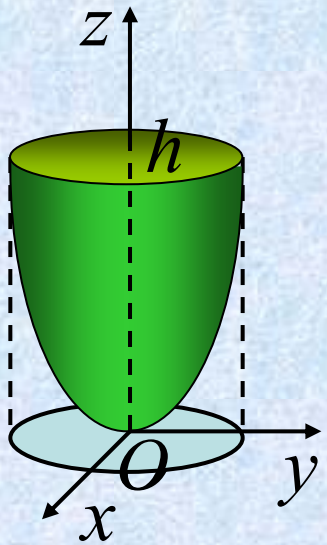
$$\text{原式}=\iiint_{\Omega} z\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^a z\mathrm{d}z\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}a^2$$

$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$

例4. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$，其中 Ω 由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\,(h>0)$ 所围成.



解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}\frac{\rho^2}{4}\le z\le h\\ 0\le\rho\le 2\sqrt{h}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{h}\mathrm{d}z$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$$

$$=2\pi\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\left(h-\frac{\rho^2}{4}\right)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h)-4h]$$

思考与练习

1. 将$I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$用三次积分表示，其中$\Omega$ 由六个平面 $x=0, x=2, y=1, x+2y=4, z=x, z=2$ 所围成，$f(x,y,z)\in C(\Omega)$.

提示: $\Omega:\begin{cases} x\le z\le 2 \\ 1\le y\le 2-\frac{1}{2}x \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_1^{2-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}y\int_x^2 f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

作业

5; 6; 7; 9 (1); 11 (1)

第四节　重积分的应用

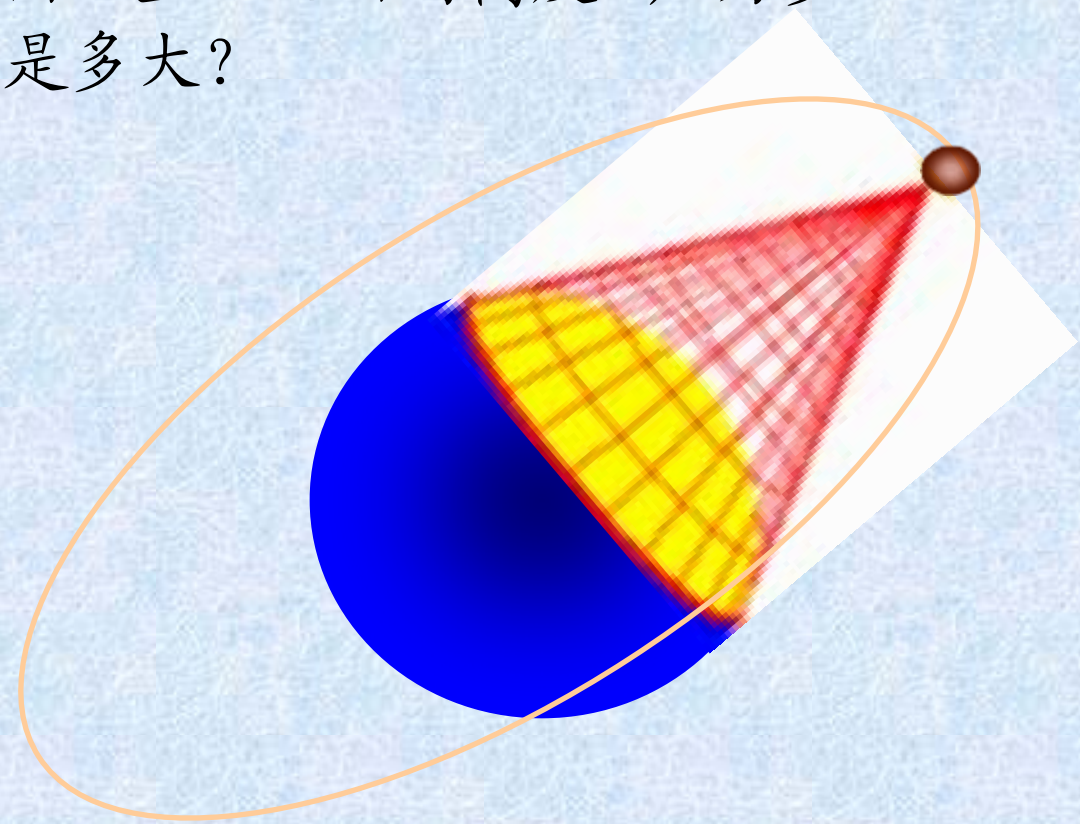
一、曲面的面积

二、质心

三、转动惯量

一、曲面的面积

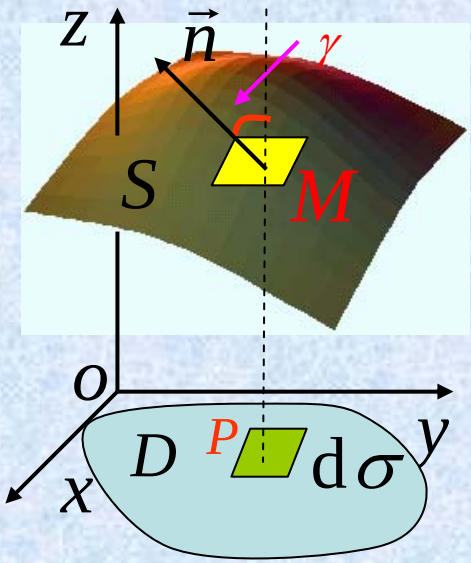
一颗地球的同步轨道通讯卫星的轨道位于地球的赤道平面内，且可近似认为是圆轨道．通讯卫星运行的角速率与地球自转的角速率相同，即人们看到它在天空不动．若地球半径取为R，问卫星距地面的高度h应为多少？通讯卫星的覆盖面积是多大？



1.设曲面的方程为： $z=\boxed{f(x,y)}$ → 在D上偏导数连续

设光滑曲面 $S: z=f(x,y),(x,y)\in D$

则面积 A 可看成曲面上各点 $M(x,y,z)$ 处小切平面的面积 $\mathrm{d}A$ 无限积累而成.

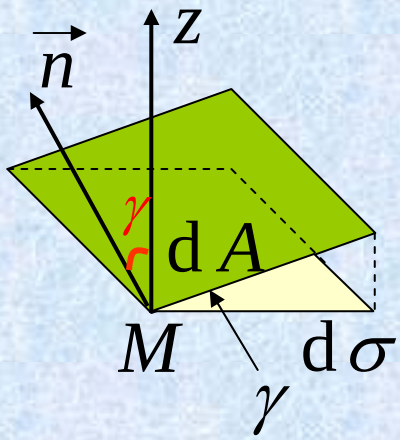


设它在 D 上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$, 则

$$\mathrm{d}\sigma=\cos\gamma\cdot\mathrm{d}A$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^{\,2}(x,y)+f_y^{\,2}(x,y)}}$$

$$\mathrm{d}A=\sqrt{1+f_x^{\,2}(x,y)+f_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma$$



(称为曲面S的面积元素)

故有曲面面积公式 $\therefore A=\iint\limits_{D}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma,$

即 $$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy$$

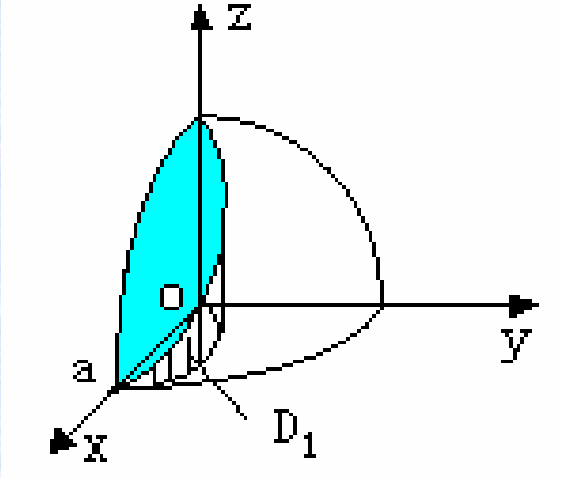
2.若光滑曲面方程为 $x=g(y,z),(y,z)\in D_{yz}$，则有

$$A=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

3.若光滑曲面方程为 $y=h(z,x),(z,x)\in D_{zx}$， 则有

$$A=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial z})^2+(\frac{\partial y}{\partial x})^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

例1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，含在圆柱体 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.



解　由对称性知 $A=4A_1$,

$$D_1:\ x^2+y^2\le ax\quad (x,y\ge 0)$$

曲面方程 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

于是

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

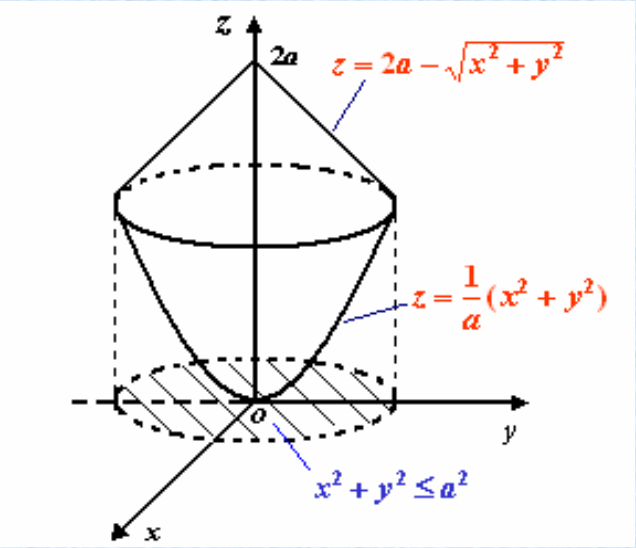
面积 $A = 4\iint\limits_{D_1} \sqrt{1 + z_x^{\ 2} + z_y^{\ 2}}\, dxdy$

$$= 4\iint\limits_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, rdr$$

$$= 2\pi a^2 - 4a^2.$$

例 2.求由曲面 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$ 所围立体的表面积.



解　解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=az \\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases},$$

得两曲面的交线为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=a \end{cases}$,

在 xoy 平面上的投影域为 D_{xy}： $x^2+y^2\le a^2$,

由 $z=\frac{1}{a}(x^2+y^2)$ 得　$z_x=\frac{2x}{a}$,　$z_y=\frac{2y}{a}$,

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2+\left(\frac{2y}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2},$$

由 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 知

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2},$$

故 $S=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4r^2}\cdot rdr+\sqrt{2}\pi a^2$$

$$=\frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1).$$

二、质心

设空间有n个质点,分别位于(x_k, y_k, z_k),其质量分别为m_k ($k=1,2,\cdots,n$),由力学知,该质点系的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k},\quad \bar{y}=\frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k},\quad \bar{z}=\frac{\sum_{k=1}^{n} z_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

设物体占有空间域Ω,有连续密度函数$\rho(x,y,z)$,则采用“分割，近似代替，求和，取极限”可导出其质心公式，即:

将 Ω 分成 n 小块, 在第 k 块上任取一点 (ξ_k,η_k,ζ_k), 将第 k 块看作质量集中于点 (ξ_k,η_k,ζ_k) 的质点, 此质点系的质心坐标就近似该物体的质心坐标. 例如,

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k}$$

令各小区域的最大直径 $\lambda \to 0$,即得

$$\bar{x} = \frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

同理可得 $$\bar{y}=\frac{\iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

当$\rho(x,y,z)\equiv$常数时, 则得形心坐标:

$$\bar{x}=\frac{\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},\quad \bar{y}=\frac{\iiint_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}\quad \left(V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\text{为}\Omega\text{的体积}\right)$$

若物体为占有xoy面上区域D的平面薄片,其面密度为$\mu(x,y)$,则它的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_y}{M}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_x}{M}$$

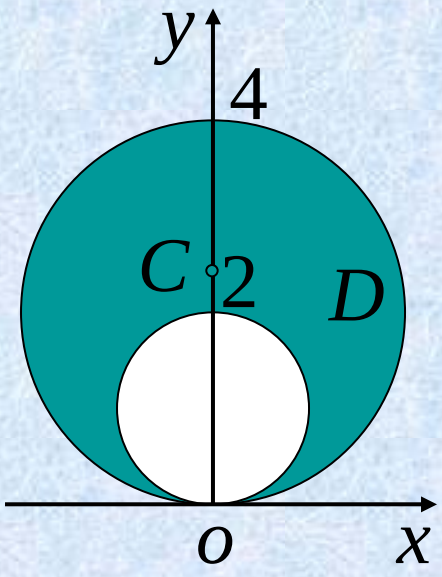
M_x — 对 x 轴的静矩

M_y — 对 y 轴的静矩

$\rho=$常数时, 得D的形心坐标:

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A},\quad \bar{y}=\frac{\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A}\quad (A\text{ 为 }D\text{ 的面积})$$

例3. 求位于两圆 $r=2\sin\theta$ 和 $r=4\sin\theta$ 之间均匀薄片的质心.



解: 利用对称性可知 $\bar{x}=0$

而 $$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3\pi}\iint_D r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

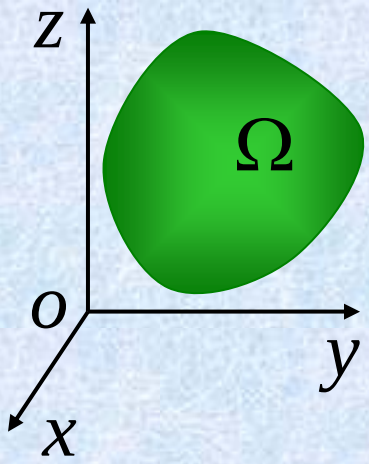
$$=\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{56}{9\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{56}{9\pi}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{56}{9\pi}\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{7}{3}$$

三、转动惯量

因质点系的转动惯量等于各质点的转动惯量之和, 故连续体的转动惯量可用积分计算.

设物体占有空间区域 Ω, 有连续分布的密度函数 $\rho(x,y,z)$. 该物体位于$(x\,,y\,,z)$ 处的微元对 z 轴的转动惯量为



$$\mathrm{d}I_z = (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

因此物体 对 z 轴 的转动惯量:

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

类似可得:

对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iiint_\Omega (y^2 + z^2)\ \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对 y 轴的转动惯量

$$I_y = \iiint_\Omega (x^2 + z^2)\ \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对原点的转动惯量

$$I_o = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\ \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

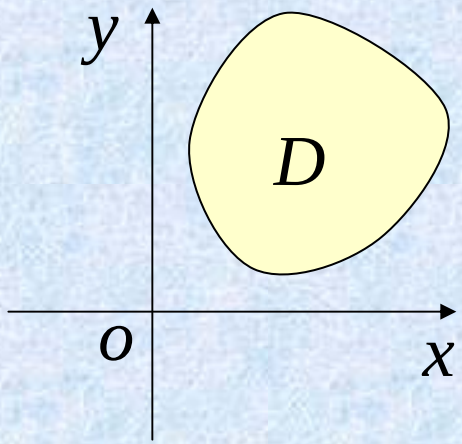
如果物体是平面薄片，面密度为 $\mu(x,y),(x,y)\in D$

则转动惯量的表达式是二重积分.

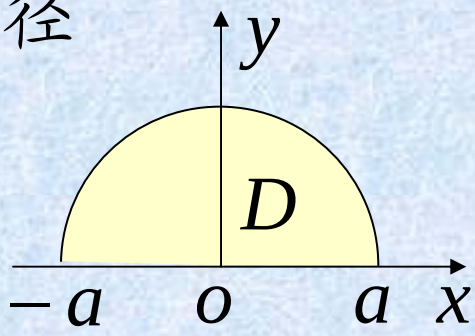
$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_o=\iint_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



例4. 求半径为 a 的均匀半圆薄片对其直径的转动惯量.



解: 建立坐标系如图, $D:\begin{cases} x^2+y^2\le a^2 \\ y\ge 0 \end{cases}$

$$\therefore I_x=\iint_D \mu y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\mu\iint_D r^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\mu\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\mu a^4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

半圆薄片的质量 $M=\frac{1}{2}\pi a^2\mu$

$$=\frac{1}{4}M a^2$$

思考与练习

设有一高度为 $h(t)$(t 为时间) 的雪堆在融化过程中,其侧面满足方程 $z = h(t) - \dfrac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$, 设长度单位为厘米, 时间单位为小时, 已知体积减少的速率与侧面积成正比 (比例系数 0.9), 问高度为130 cm 的雪堆全部融化需要多少小时? **(01年数一考研)**