第十三章 函数列与函数项级数

- 一、基本内容
- 1、函数列与函数项级数一致收敛性的定义
- 2、函数列与函数项级数一致收敛性的判别法
- 3、一致收敛函数列与函数项级数的性质
- 二、目的与要求
- 理解函数列的基本概念，能够利用ε-N语言讨论函数列的一致收敛性；掌握关于函数列的一致收敛性的判别法；熟练掌握一致收敛的函数列与其极限函数的连续性、可积性之间的关系；熟练掌握函数项级数的一致收敛性的判别法；熟练掌握一致收敛的函数项级数与其和函数的连续性、可积性之间的关系
- 三、重点与难点
- 重点：函数列一致收敛的概念、性质
- 难点：一致收敛的概念、判别及应用

一致收敛性

§13.1 一致收敛性

1、函数列及其收敛的定义

$$f_1,\ f_2,\cdots,\ f_n,\cdots \tag{1}$$

是一列定义在同一数集 E 上的函数, 称为定义在E上的函数列. (1) 也可记为

$$\{f_n\} \text{或 } f_n,\ n=1,2,\cdots.$$

以 $x_0\in E$ 代入 (1), 可得数列

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0),\cdots,\ f_n(x_0),\cdots. \tag{2}$$

如果数列(2)收敛, 则称函数列(1)在点 x_0 收敛, x_0 称为函数列(1)的收敛点. 如果数列(2)发散, 则称函数列(1)在点 x_0 发散. 当函数列(1)在数集 $D \subset E$ 上每一点都收敛时, 就称(1)在数集 D 上收敛. 这时 D 上每一点 x 都有数列 $\{f_n(x)\}$ 的一个极限值与之相对应, 根据这个对应法则所确定的 D 上的函数, 称为函数列(1)的极限函数. 若将此极限函数记作 f, 则有

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in D$$

或

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty),\ x \in D.$$

函数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义: 对每一固定的 $x \in D$, 任给正数 ε, 总存在正数N(注意: 一般说来N值与 ε 和 x 的值都有关, 所以有时也用$N(\varepsilon, x)$表示三者之间的依赖关系), 使当 $n > N$ 时, 总有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

使函数列 $\{f_n\}$ 收敛的全体收敛点集合, 称为函数列 $\{f_n\}$ 的收敛域.

2、函数列一致收敛的定义

定义1 设函数列$\{f_n\}$与函数 f 定义在同一数集 D 上，若对任给的正数ε，总存在某一正整数 N，使当 $n > N$ 时，对一切 $x \in D$，都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

则称函数列$\{f_n\}$在 D 上一致收敛于 f，记作

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x)(n\to\infty),\ x\in D.$$

函数列$\{f_n\}$在 D 上不一致收敛于 f 的正面陈述是:

存在某正数 ε_0, 对任何正数 N, 都有某一点 $x_0\in D$ 和某一正整数 $n_0>N$(注意: x_0 与 n_0 的取值与 N 有关), 使得

$$\left| f_{n_0}(x_0)-f(x_0)\right| \ge \varepsilon_0.$$

前页 后页 返回

3、函数列一致收敛判别法

定理13.1 (函数列一致收敛的柯西准则) 函数列 $\{f_n\}$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件是: 对任给正数 ε, 总存在正数N, 使当 $n, m > N$, 对一切 $x \in D$, 都有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \qquad (3)$$

定理13.2（余项准则） 函数列$\{f_n\}$在区间 D 上一致收敛于 f 的充分必要条件是:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0. \qquad (4)$$

注 柯西准则的特点是不需要知道极限函数是什么，只是根据函数列本身的特性来判断函数列是否一致收敛，而使用余项准则需要知道极限函数，但使用

设 $\{u_n(x)\}$ 是定义在数集 E 上的一个函数列, 表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,\ x\in E \qquad (5)$$

称为定义在E上的函数项级数，简记为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 或 $\sum u_n(x)$. 称

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\quad x\in E, n=1,2,\cdots \qquad (6)$$

为函数项级数(9)的部分和函数列.

若 $x_0 \in E$, 数项级数

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots \tag{7}$$

收敛，即部分和 $S_n(x_0)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x_0)$ 当 $n\to\infty$ 时极限存在, 则称级数(5)在点 x_0 收敛， x_0 称为级数(5)的收敛点. 若级数(7)发散, 则称级数(5)在点 x_0 发散. 若级数(7)在 E 的某个子集 D 上每点都收敛, 则称级数(5)在 D 上收敛. 若 D 为级数(5)全体收敛点的集合, 这时就称 D为级数(5)的收敛域. 级数(5)在 D上每一

点 x 与其所对应的数项级数(7)的和 $S(x)$ 构成一个定义在 D 上的函数，称为级数(5)的和函数，并记作

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=S(x),\quad x\in D,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x),\quad x\in D. \qquad (8)$$

也就是说, 函数项级数(5)的收敛性就是指它的部分和函数列(6)的收敛性.

4、函数项级数一致收敛的定义

定义2 设$\{S_n(x)\}$是函数项级数$\sum u_n(x)$的部分和函数列. 若$\{S_n(x)\}$在数集D上一致收敛于$S(x)$, 则称函数项级数$\sum u_n(x)$在D上一致收敛于函数$S(x)$, 或称$\sum u_n(x)$在D上一致收敛.

由于函数项级数的一致收敛性是由它的部分和函数列来确定, 所以得到的有关函数项级数的定理.

前页 后页 返回

5、函数项级数一致收敛的判别法

定理 13.3（一致收敛的柯西准则）函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件为: 对任给的正数 ε, 存在正整数 N，使当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in D$ 和一切正整数 p, 都有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

或 $|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon.$

此定理中当 $p=1$ 时, 得到函数项级数一致收敛的一个必要条件.

前页 后页 返回

推论 (函数项级数一致收敛的必要条件) 函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的必要条件是函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于零.

设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上的和函数为 $S(x)$, 称

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

为函数项级数 $\sum u_n(x)$ 的余项.

定理13.4 (余项法则) 函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |S(x) - S_n(x)| = 0.$$

例4 讨论函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)^2$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛性.

定理13.5 **(魏尔斯特拉斯判别法，或优级数判别法)**

设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 定义在数集 D 上, $\sum M_n$ 为收敛的正项级数, 若对一切 $x \in D$, 有

$$|u_n(x)| \le M_n, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{9}$$

则函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

前页 后页 返回

当级数$\sum u_n(x)$与级数$\sum M_n$ 在区间$[a,b]$上成立关系式(13)时，则称级数$\sum M_n$在区间$[a,b]$上优于级数$\sum u_n(x)$, 或称 $\sum M_n$为$\sum u_n(x)$的优级数. 优级数判别法也称为M判别法.

设有定义在区间I上形如

$$\sum u_n(x)v_n(x) = u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x) + \cdots + u_n(x)v_n(x) + \cdots \quad (10)$$

的函数项级数. 对级数(12)有:

定理13.6 (阿贝耳判别法) 设

(i) $\sum u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛;

(ii) 对于每一个 $x \in I, \{v_n(x)\}$ 是单调的;

(iii) $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界, 即对一切 $x \in I$ 和正整数 n, 存在正数 M, 使得

$$|v_n(x)| \le M,$$

则级数(14)在 I 上一致收敛.

定理13.7 (狄利克雷判别法) 设

(i) $\sum u_n(x)$ 的部分和数列

$$U_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\quad (n=1,2,\cdots)$$

在 I 上一致有界;

(ii) 对于每一个 $x\in I$, $\{v_n(x)\}$ 是单调的;

(iii)在 I 上 $v_n(x)\rightrightarrows 0(n\to\infty)$,

则级数(12)在I上一致收敛.

例5 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}}$$

在[0, 1]上一致收敛.

记 $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n}, v_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$,于是$\sum u_n$在[0, 1]上一致收敛，$v_n(x)$在[0,1]上单调增且一致有界，由阿贝耳判别法就能得到结果.

例6 若数列 $\{a_n\}$单调且收敛于零, 则级数

$$\sum a_n \cos nx \tag{11}$$

在$[\alpha, 2\pi-\alpha](0<\alpha<\pi)$ 上一致收敛.

- 小结
- 1、 函数列一致收敛的定义
- 2、 函数项级数一致收敛的定义
- 3、 函数项级数一致收敛的判别法

§ 13.2 一致收敛函数列与函数项级数的性质

一致收敛性的重要性在于可以将通项函数的许多解析性质遗传给和函数，如连续性、可积性、可微性等，这在理论上非常重要.

1、一致收敛函数列的性质

定理13.8 （极限交换定理）设函数列 $\{f_n\}$ 在 $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 上一致收敛于 $f(x)$，且对每个 n，$\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=a_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 均存在且相等. 即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x). \qquad (1)$$

前页 后页 返回

定理指出: 在一致收敛的条件下, $\{f_n(x)\}$中关于独立变量 x 与 n 的极限可以交换次序, 即(1)式成立.

类似地, 若 $f_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛, 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f_n(x)$ 存在, 则有 $\lim\limits_{x\to a^+}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to a^+} f_n(x)$;

若 $f_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛, 且 $\lim\limits_{x\to b^-} f_n(x)$ 存在, 则有

$$\lim_{x\to b^-}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to b^-} f_n(x).$$

定理13.9 (连续性) 若函数列$\{f_n\}$在区间 I上一致收敛, 且每一项都连续, 则其极限函数 f 在 I 上也连续.

定理13.9的等价命题：若各项为连续函数的函数列在区间 I 上其极限函数不连续，则此函数列在区间 I 上一定不一致收敛.

例如: 函数列$\{x^n\}$的各项在$(-1,1]$上都是连续的, 但其极限函数 $f(x)=\begin{cases} 0, & -1<x<1, \\ 1, & x=1 \end{cases}$ 在 $x=1$时不连续, 所以$\{x^n\}$在$(-1,1]$上不一致收敛.

前页 后页 返回

定理13.10 (可积性) 若函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛，且每一项都连续，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

这个定理指出：在一致收敛的条件下，极限运算与积分运算的顺序可以交换.

前页 后页 返回

定理13.11(可微性) 设$\{f_n\}$为定义在$[a,b]$上的函数列，若$x_0\in[a,b]$为$\{f_n\}$的收敛点，$\{f_n\}$的每一项在$[a,b]$上有连续的导数，且$\{f_n'\}$在$[a,b]$上一致收敛，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x). \tag{3}$$

注 请注意定理中的条件 x_0 为 $\{f_n\}$ 的收敛点的作用. 在定理的条件下, 还可推出在 $[a, b]$ 上函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f, 请读者自己证明.

与前面两个定理一样, 一致收敛是极限运算与求导运算交换的充分条件, 而不是必要条件, 请看下例.

例2 函数列

$$f_n(x)=\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2),\quad n=1,2,\cdots$$

与

$$f_n'(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\quad n=1,2,\cdots$$

在 $[0,1]$ 上都收敛于0，由于

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[0,1]}|f_n'(x)-f'(x)|=\frac{1}{2},$$

所以导函数列 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛，但有

$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=0=[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'.$$

在上述三个定理中，我们都可举出函数列不一致收敛但定理结论成立的例子．在今后的进一步学习中(如实变函数论)将讨论使上述定理成立的较弱条件，但在目前情况下，只有满足一致收敛的条件，才能保证定理结论的成立.

下面讨论定义在区间 $[a,b]$ 上函数项级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{4}$$

的连续性、逐项求积与逐项求导的性质，这些性质可根据函数列的相应性质推出.

2、一致收敛函数项级数的性质

定理13.12(极限交换定理、连续性定理)

1. 若函数项级数$\sum u_n(x)$在$U^{\circ}(x_0)$一致收敛, 且对每个n, $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x)=a_n$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}\sum u_n(x)=\sum\lim_{x\to x_0}u_n(x)=\sum a_n. \tag{5}$$

2. 若$\sum u_n(x)$区间$[a,b]$上一致收敛, 且每一项都连续, 则其和函数在$[a,b]$上也连续.

利用连续性定理(或极限交换定理)建立一个判别法:

若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 的每一项在 $[a,b)$ 上有定义, 且

(i) $\forall n, u_n(x)$ 在点 a 右连续;

(ii) $\forall x \in (a,b)$, $\sum u_n(x)$ 收敛;

(iii) 级数 $\sum u_n(a)$ 发散,

则 $\sum u_n(x)$ 在 (a,b) 上不一致收敛.

定理13.13 (逐项求积定理) 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，且每一项 $u_n(x)$ 都连续，则

$$\sum \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum u_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

定理13.14 (逐项求导定理) 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一项都有连续的导函数，$x_0 \in [a,b]$ 为 $\sum u_n(x)$ 的收敛点，且 $\sum u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则

$$\sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sum u_n(x)\Big). \tag{7}$$

定理 13.13 和 13.14 指出，在一致收敛条件下，逐项求积或求导后求和等于求和后再求积或求导.

注　本节六个定理的意义不只是检验函数列或函数项级数是否满足关系式(2)~(4), (5)~(7), 更重要的是根据定理的条件, 即使没有求出极限函数或和函数, 也能由函数列或函数项级数本身获得极限函数或和函数的解析性质.

例3 设 $u_n(x)=\dfrac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$. $\quad n=1,2,\cdots$

证明函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 并讨论和函数在 $[0,1]$ 上的连续性、可积性与可微性.

前页 后页 返回

- 小结
- 1、一致收敛函数列的极限函数的性质
- 2、一致收敛函数项级数的和函数的性质