

第四部分 线性方程组

一、选择题

1. 某五元齐次线性方程组经高斯消元系数矩阵化为 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -4 \\ & & 1 & 5 & -2 \\ & & & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 自变量若取为

- (1) x_4, x_5 , (2) x_3, x_5 , (3) x_1, x_5 , (4) x_2, x_3 , 那么正确的共有
(A) 1个; (B) 2个; (C) 3个; (D) 4个。

2. 已知 α_1, α_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, 那么

$\alpha_1 - \alpha_2, 3\alpha_1 - 2\alpha_2, \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2), \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ 中, 仍是线性方程组 $Ax = b$ 特解的共有

- (A) 4个; (B) 3个; (C) 2个; (D) 1个。

3. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个不同解, 那么下列向量 $\alpha_1 - \alpha_2$,

$\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3, \frac{2}{3}(\alpha_2 - \alpha_1), \alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3$ 中导出组 $Ax = 0$ 解得向量共有

- (A) 4个; (B) 3个; (C) 2个; (D) 1个。

4. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系是

- (A) $(-2, 2, 1, 0)^T, (1, 2, 0, 1)^T$; (B) $(-1, 0, 1, 1)^T, (2, 0, -2, -2)^T$;
(C) $(-2, 2, 1, 0)^T, (2, 2, -3, -4)^T$; (D) $(1, -2, 0, 1)^T$ 。

5. 已知 $\alpha_1 = (1, 1, -1)^T, \alpha_2 = (1, 2, 0)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 那么下列向量中是 $Ax = 0$ 的解向量的是

- (A) $(1, -1, 3)^T$; (B) $(2, 1, -3)^T$;
(C) $(2, 2, -5)^T$; (D) $(2, -2, 6)^T$ 。

6. 设 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 则 $Ax = 0$ 的基础解系还可以是

- (A) $\eta_1 - \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 - \eta_4, \eta_4 + \eta_1$;
(B) $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3 + \eta_1, \eta_1 - \eta_2 + \eta_3$;
(C) $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 + \eta_4, \eta_4 + \eta_1$;
(D) $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 - \eta_3, \eta_3 + \eta_4, \eta_4 + \eta_1$ 。

7. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, A^T 是 A 的转置, 若 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是齐次线性方程组 $A^T x = 0$ 的基础解系, 则秩 $r(A) =$

- (A) t ; (B) $n-t$; (C) $m-t$; (D) $n-m$ 。

8. 要使 $\alpha_1 = (2, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, -2, -1)^T$ 都是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解, 只要系数矩阵 A 为

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$; (B) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ 。

9. $a = 1$ 是齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解的

- (A) 充分必要条件; (B) 充分而非必要条件;
(C) 必要而非充分条件; (D) 既非充分又非必要条件。

10. 已知 η_1, η_2 是 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的 2 个不同的解, 若秩 $r(A) = n-1$, 则 $Ax = 0$ 的通解是

- (A) $k\eta_1$; (B) $k\eta_2$; (C) $k(\eta_1 + \eta_2)$; (D) $k(\eta_1 - \eta_2)$ 。

11. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & a+2 & 4 \\ 5 & a & a+5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 若齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的任一非零解均可以用 α 线性表示, 那么必有 $a =$

- (A) 3; (B) 5; (C) 3 或 -5; (D) 5 或 -3。

12. 设 $Ax = b$ 有通解 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta = k_1(1, 0, 1)^T + k_2(-1, 3, 2)^T + (0, 1, -1)^T$, 则下列向量中不是 $Ax = b$ 的解向量的是

- (A) $\alpha_1 = (3, -5, -4)^T$; (B) $\alpha_2 = (0, 4, 2)^T$;
(C) $\alpha_3 = (3, -2, -1)^T$; (D) $\alpha_4 = (3, 1, -4)^T$ 。

13. 下列非齐次线性方程组中, 无解的方程组是

(A) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$; (B) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$;

$$(C) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}; \quad (D) \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$$

14. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 都是四维列向量, $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, 非齐次线性方程组 $Ax = \alpha_5$

有通解 $k\xi + \eta = k(1, -1, 2, 0)^T + (2, 1, 0, 1)^T$, 则下列关系式中不正确的是

- (A) $2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_5 = 0$; (B) $\alpha_5 - \alpha_4 - 2\alpha_3 - 3\alpha_1 = 0$;
 (C) $\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_5 = 0$; (D) $\alpha_5 - \alpha_4 + 4\alpha_3 - 3\alpha_2 = 0$ 。

15. 已知方程组
$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$$
 有两个不同的解, 则 $\lambda =$

- (A) -1; (B) 10; (C) 1; (D) 2.

16. 齐次方程组 $Ax = 0$ 只有零解的充分必要条件是

- (A) A 是 n 阶可逆矩阵; (B) 非齐次方程组 $Ax = b$ 无解;
 (C) A 的列向量组线性无关; (D) A 的行向量组线性无关。

17. 设 A 为秩是 r 的 $m \times n$ 矩阵, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分条件是

- (A) $r = m$; (B) $m = n$; (C) $r = n$; (D) $m < n$ 。

18. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分条件是

- (A) 秩 $r(A) = \min(m, n)$; (B) A 的行向量组线性无关;
 (C) $m < n$; (D) A 的列向量组线性无关。

19. 设线性方程组 $Ax = b$ 有 m 个方程, n 个未知数且 $m \neq n$, 则正确命题是

- (A) 若 $Ax = 0$ 只有零解, 则 $Ax = b$ 必有唯一解;
 (B) 若 $Ax = 0$ 有非零解, 则 $Ax = b$ 必有无穷多解;
 (C) 若 $Ax = b$ 无解, 则 $Ax = 0$ 只有零解;
 (D) 若 $Ax = b$ 有无穷多解, 则 $Ax = 0$ 必有非零解。

20. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 下列命题中正确的是

- (A) 若 A 中有 n 阶子式不为零, 则 $Ax = 0$ 仅有零解;
 (B) 若 A 中有 n 阶子式不为零, 则 $Ax = b$ 必有唯一解;
 (C) 若 A 中有 m 阶子式不为零, 则 $Ax = 0$ 仅有零解;
 (D) 若 A 中有 m 阶子式不为零, 则 $Ax = b$ 必有唯一解。

21. 已知 4 阶方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为四维列向量, 其中 α_1, α_2 线性无

关, 若 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = \beta, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = \beta$, k_1, k_2 为任

意常数, 那么 $Ax = \beta$ 的通解为

$$\begin{aligned}
 \text{(A)} \quad & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; & \text{(B)} \quad & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}; \\
 \text{(C)} \quad & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; & \text{(D)} \quad & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

22. 设 A 为 n 阶矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵, 对于线性方程组 (I) $Ax = 0$ 和 (II) $A^T Ax = 0$, 必有

- (A) (I) 的解是 (II) 的解, ; (II) 的解也是 (I) 的解
 (B) (I) 的解是 (II) 的解, (II) 的解不是 (I) 的解;
 (C) (II) 的解是 (I) 的解, (I) 的解不是 (II) 的解;
 (D) (II) 的解不是 (I) 的解, (I) 的解也不是 (II) 的解。

23. 设 A 是 n 阶矩阵, 对于齐次线性方程组 (I) $A^n x = 0$ 和 (II) $A^{n+1} x = 0$, 现有四个命题 (1) (I) 的解必是 (II) 的解, (2) (II) 的解必是 (I) 的解, (3) (I) 的解不是 (II) 的解, (4) (II) 的解不是 (I) 的解, 以上命题中正确地是

- (A) (1)(2); (B) (1)(4); (C) (3)(4); (D) (2)(3).

二、填空题

1. 四元齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系是_____。

2. 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} ax_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + (a+2)x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 有无穷多解, 那么 $a =$ _____。

3. 已知方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = a \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 = a + 2 \\ x_1 + 4x_2 + 11x_3 = a + 3 \end{cases}$ 有无穷多解, 那么 $a =$ _____。

4. 已知方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5 \\ ax_2 + 2x_3 - x_4 = -6 \end{cases}$ 无解, 则 $a =$ _____。

5. 设 $\alpha_1 = (6, -1, 1)^T$ 与 $\alpha_2 = (-7, 4, 2)^T$ 是线性方程组
$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2 + a_3x_3 = a_4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$
 的两个解, 那

么此方程组的通解是_____.

6. 设线性方程组 $A_{3 \times 4}x = b$, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

有通解 $k[1, 2, -1, 1]^T + [1, -1, 0, 2]^T$, 其中 k 是任意常数, 则方程组 $B_{3 \times 3}y = b$ 即

$$\begin{cases} a_{12}y_1 + a_{13}y_2 + a_{14}y_3 = b_1 \\ a_{22}y_1 + a_{23}y_2 + a_{24}y_3 = b_2 \\ a_{32}y_1 + a_{33}y_2 + a_{34}y_3 = b_3 \end{cases} \quad (2)$$

有一个特解是_____。

7. 设线性方程组 $A_{3 \times 3}x = b$, 即
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

有唯一解 $\xi = [1, 2, 3]^T$ 。

方程组 $B_{3 \times 4}y = b$ 即
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 = b_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 = b_2 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4 = b_3 \end{cases} \quad (2)$$

有特解 $\eta = [-2, 1, 4, 2]^T$, 则方程组 (2) 的通解是_____。

8. 设 $A = [a_{ij}]$ 是三阶正交矩阵, 其中 $a_{33} = -1, b = [0, 0, 5]^T$, 则线性方程组 $Ax = b$ 的解是_____。

9. 已知齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

有通解 $k_1[2, -1, 0, 1]^T + k_2[3, 2, 1, 0]^T$, 则方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

的通解是_____。

10. 已知方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ (II) $x_1 + 5x_3 = 0$, 那么 (I) 与 (II) 的公共解

是_____。

11. 已知非齐次线性方程组 (I) 与 (II) 同解, 其中

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} ax_1 + 4x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 5x_2 - ax_3 = 16 \end{cases}$$

则 $a =$ _____。