微分中值定理与导数的应用考研（数三）真题

一、选择题（将最佳答案的序号填写在括号内）

1.（01 年，3 分）设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1,$$

则（　）

（A）$x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点

（B）$x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

（C）$(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

2.（04 年，4 分）设 $f(x)=|x(1-x)|$,则（　　）

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（B）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

3.（05 年，4 分）当 a 取哪个值时，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰好有两个不同的零点（　　）

(A)　2　　(B)　4　　(C)　6　　(D)　8

4.（05 年，4 分）设 $f(x)=x\sin x+\cos x$,下列命题中正确的是（　　）

(A)　f(0)是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值.

（B）　f(0)是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值.

（C）　f(0)是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$ 也是极大值.

(D)　f(0)是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$ 也是极小值.

5.（06 年，4 分）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分。若 $\Delta x>0$，则（　）

（A）$0<dy<\Delta y$　　（B）$0<\Delta y<dy$

（C）$\Delta y<dy<0$　　（D）$dy<\Delta y<0$

6.（09 年，4 分）当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（　　）

（A）$a=1,b=-\frac{1}{6}$　　（B）$a=1,b=\frac{1}{6}$

（C）$a=-1,b=-\frac{1}{6}$　　（D）$a=-1,b=\frac{1}{6}$

7.（10 年，4 分）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-(\frac{1}{x}-a)e^x\right]=1$,则 a 等于（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

二、填空题

1.（04 年，4 分）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$__________，

$b=$____________.

2.（09 年，4 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$__________.

三、计算

1.（04 年，8 分）求 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2})$.

2.（05 年，8 分）求 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x})$.

3.（07 年，10 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

4.（08 年，10 分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

5.（10 年，10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

四、证明

1.（94 年，6 分）假设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在且大于零，记

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x>a).$$

证明：$F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调增加.

2.（98 年，6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$.试证存在 ξ，$\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}.e^{\eta}.$$

3.（99 年，7 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$. 试证：

（1）存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使 $f(\eta)=\eta$；

（2）对任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得

$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.$$

4.（03 年，8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$.

试证必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

5.（06 年，10 分）证明：当 $0<a<b<\pi$ 时，

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

6.（09 年，11 分）（1）证明拉格朗日中值定理.

（2）若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=A$.

则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.