高 等 数 学（上册）

-----同济版少课时课件

南阳师范学院--数学与统计学院

王　阳

引　言

一、什么是高等数学？

初等数学

以静止的观点

研究常量

高等数学

以运动的观点

研究变量及其依赖关系

引 言

二、高等数学的主要内容

1. 基础：（1）函数（2）极限 （3）连续

2. 微积分学：一元微积分、 多元微积分

3. 向量代数与空间解析几何

4. 无穷级数

5. 常微分方程

引 言

三、本学期的教学内容

第一章　函数与极限

第二章　导数与微分

第三章　中值定理与导数的应用

第四章　不定积分

第五章　定积分及其应用

引 言

四、学习高等数学的基本要求

1. 预------课前预习（提前5分钟交预习问题）

2. 听------听课（点名）

3. 记------做笔记；复习

4. 练------训练：作业--练习题--自测题

引 言

五、考试形式

1. 平时成绩（**20**）**+**期末卷面成绩（**80**）

2. 平时成绩**-----**点名**+**作业**+**课堂表现**+**预习

3. 期末考试**------**形式：闭卷（**100**分）

题型：判断题；填空题；单项选择题；计算题；证明题

第一章　函数与极限

南阳师范学院

数学与统计学院-王阳

第一章　函数与极限

主要内容

一、数列的极限

二、函数的极限

三、无穷大、无穷小及无穷小的比较

四、极限存在准则及两个重要极限

五、函数的连续性

§1.1 函数

主要内容：

有关的概念
- 集　合
- 区　间
- 函　数
- 反函数
- 复合函数
- 初等函数

函数的特性
- 有界性
- 单调性
- 奇偶性
- 周期性

一、集合与区间

1. 与集合有关的概念	2. 集合的表示法与运算
（1）我们把具有某种特定性质的事物的总体称为一个集合. 用*A*, *B*, *M* 等表示.	（1）列举法：把集合的全体元素一一列举出来.
（2）组成集合的事物称为集合的元素. 事物 a 是集合 M 的元素表示为 $a\in M$ 事物 a 不是集合 M 的元素表示为 $a\notin M$.	自然数集 $\mathbf{N}=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$. 正整数集 $\mathbf{N}^{+}=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$. $\mathbf{Z}=\{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$
（3）由有限个元素组成的集合称为有限集 . 由无限个元素组成的集合称为无限集 . 不含任何元素的集合称为空集，记作∅.	（2）描述法：$M=\{x \mid x$ 具有性质 $P\}$. 实数集 $R=\{x \mid x$为有理数或无理数$\}$
（4）若集合*A*的元素都是集合*B*的元素，则称*A*是*B*的子集. 记作$A\subset B$或$B\supset A$.	$A\cup B=\{x \mid x\in A$或$x\in B\}$. $A\cap B=\{x \mid x\in A$且$x\in B\}$.
（5）若集合*A*与集合*B*互为子集，则称*A*与*B*	$A\backslash B=\{x \mid x\in A$且$x\notin B\}$.
相等.记作$A=B$	

一、集合与区间

3. 区　间	4. 邻　域
（1）开区间：　$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$.	（1）点 a 的 δ 邻域：　$U(a,\delta)=\{x \mid \lvert x-a\rvert<\delta\}$
（2）闭区间：　$[a,b]=\{x\mid a\le x\le b\}$	（2）去心邻域：　$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\}$
（3）半开区间：　$[a,b)=\{x\mid a\le x<b\}$ $(a,b]=\{x\mid a<x\le b\}$	注记 2：　$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$
（4）无穷区间：　$[a,+\infty)=\{x\mid a\le x\}$ $(-\infty,b]=\{x\mid x\le b\}$ $(a,+\infty)=\{x\mid b<x\}$ $(-\infty,b,)=\{x\mid x<b\}$	注记 3：　$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$
注记 1：实数集 $R=(-\infty,+\infty)$，其中 $-\infty,+\infty$ 只是	
表示无限性的一种记号，它们不是某个确定的数	

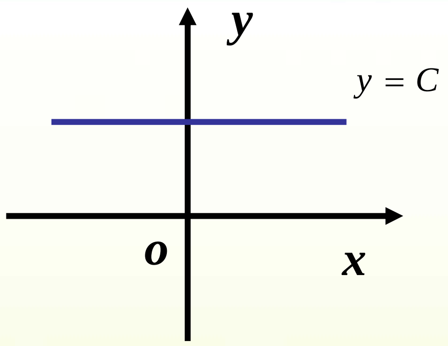
二、函数概念

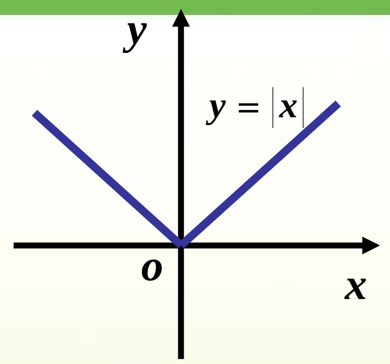
1. 有关的概念	2. 函数的表示法
（1） 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个数集．如果对于 D 中的每一个 x，按照某照某个对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，那么称对应法则 f 为定义在数集 D 上的函数．数集 D 叫做函数的定义域. x 叫做自变量，y 叫做因变量.	（1）表格法 （2）图形法 （3）解析法
注记 1：记号 f 与 $f(x)$ 的含义不同. 记号 f 表示 自变量与因变量之间的函数关系. 记号 $f(x)$ 表示 自变量对应的函数值.	注记 3：求函数的定义域的方法： （1）根据实际意义确定 （2） 根据解析式确定
为了方便，常用记号 $f(x)$ 或 $y=f(x)$ 表示函数.	
注记 2：函数的两个要素：对应法则、定义域.	
（2）在定义域的不同部分，对应法则不同的函数称为	
分段函数	

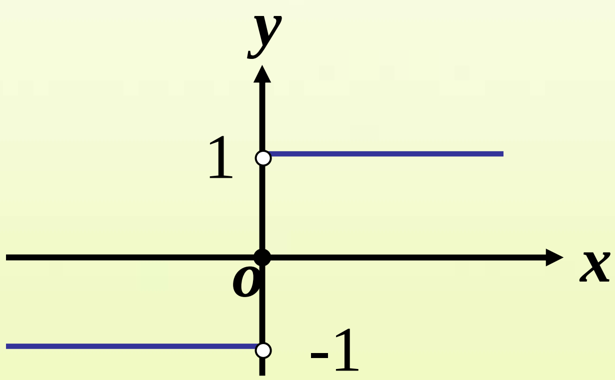
二、函数的概念

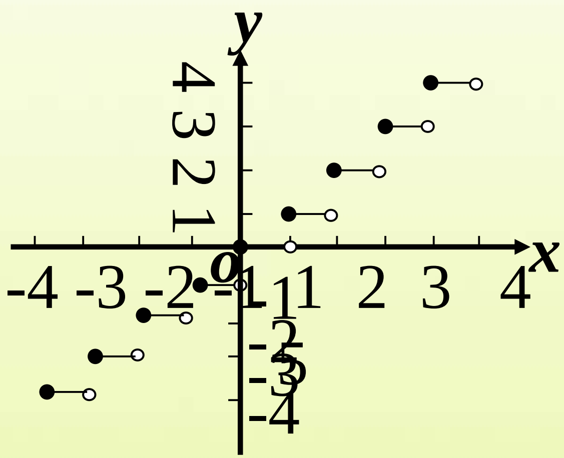
3. 常见的几种特殊函数	3. 常见的几种特殊函数
（1）常数函数： $y=C$，C 为常数 定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{C\}$	当 $C\neq 0$ 时，它的图形是一条平行于 x 轴的直线 当 $C=0$ 时，它的图形就是 x 轴
（2）绝对值函数 $y=\lvert x\rvert=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$	定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$.
（3）符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 & 当\ x>0 \\ 0 & 当\ x=0 \\ -1 & 当\ x<0 \end{cases}$	定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$
（4）取整函数： $y=[x]$ 表示不超过 x 的	定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为整数集 **Z**
最大整数	
（5）取最值函数： $\boldsymbol{y}=\max\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\}$ $\boldsymbol{y}=\min\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\}$	

二、函数的概念



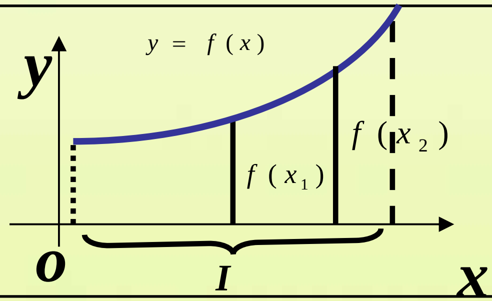
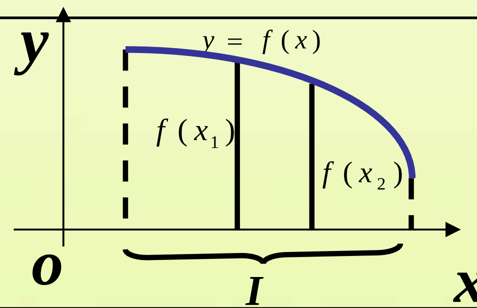






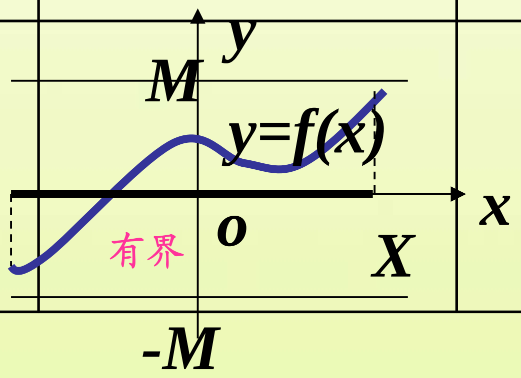
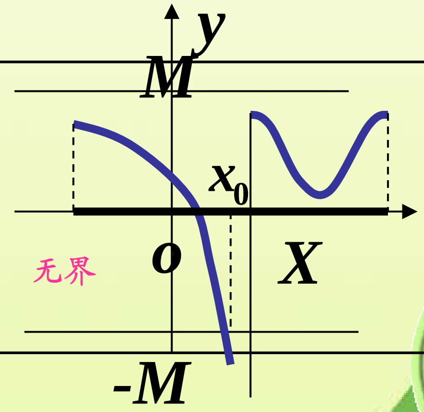
x

三、函数的特性

1. 函数的单调性	
单调递增	单调递减
设函数 $y=f(x)$的定义域为 D, 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I上任意两点 x_1, x_2, 当 $x_1 < x_2$ 时恒有	
$f(x_1) < f(x_2)$	$f(x_1) > f(x_2)$
称函数 **$f(x)$**在区间 I上是单调递增.	称函数 **$f(x)$**在区间 I上是单调递减.
	

x

三、函数的特性

<table>
<tr><td colspan="4">2. 函数的有界性</td></tr>
<tr><td colspan="3">设函数 $f(x)$的定义域为 D, 数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M , 使对任一 $x\in X$, 有</td><td>设函数 $f(x)$的定义域为 D, 数集 $X\subset D$.对任何 M, 总存在 $x\in X$, 使</td></tr>
<tr><td>$f(x)\le M$</td><td>$f(x)\ge M$</td><td>$|f(x)|\le M$</td><td>$|f(x)|>M.$</td></tr>
<tr><td>称 $f(x)$在 X 上有上界. M 为 $f(x)$ 在 X 上的一个上界.</td><td>称 $f(x)$在 X 上有下界. M 为 $f(x)$ 在 X 上的一个下界.</td><td>称 $f(x)$在 X 上有界.</td><td>称 $f(x)$在 X 上无界.</td></tr>
<tr><td colspan="2">函数 $f(x)$在 X 上有界的充要条件是函数 $f(x)$在 X 上既有上界又有下界</td><td></td><td></td></tr>
</table>

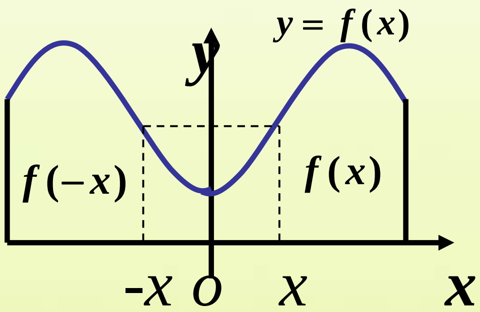
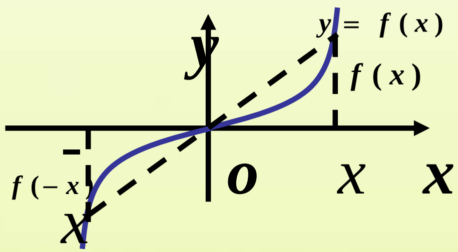
x

三、函数的特性

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D 关于原点对称： 即若 $x\in D$, 则$-x\in D$

如果对于任一 $x\in D$, 有

（1） $f(-x)=f(x)$	（2） $f(-x)=-f(x)$
则称 $f(x)$为偶函数.	则称 $f(x)$为奇函数.
 	
偶函数的图形关于 y 轴对称	奇函数的图形关于原点对称.

x

三、函数的特性

4. 函数的周期性

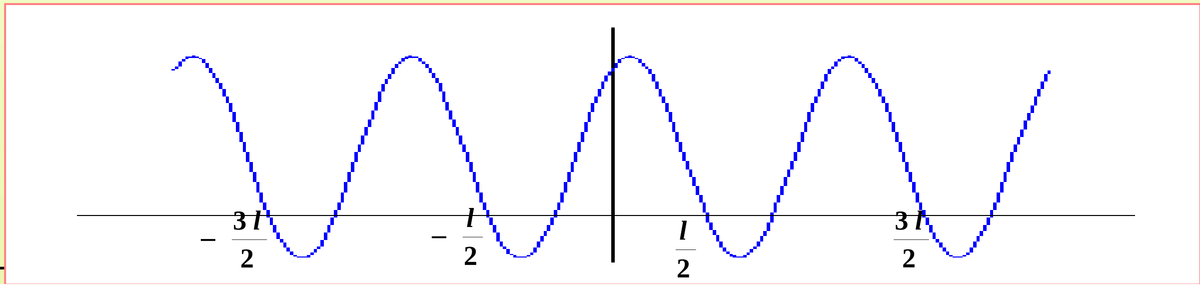
（1）定义：设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在一个正数 T ,

使得对于任 $\forall x \in \mathrm{D}$， $x+T \in \mathrm{D}$，，有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$为周期函数, T 称为 $f(x)$的周期. （通常函数的周期是指最小正周期 T ）

周期函数的图形特点：在函数的定义域内，每个长度为 T 的区间上函数的图形有相同的形状.



四、反函数

1. 反函数的定义	2. 反函数的性质
设函数 $y=f(x)$, 定义域 D，值域为 W，如果对于 W 中的每一个 y 值，都有唯一的 x（$x\in D$）可适合关系式 $f(x)=y$，这样所确定的以 y 为自变量的函数叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数. 记作 $x=f^{-1}(y)$，它对定义域为 W，值域为 D.	性质 1： 把函数 $y=f(x)$, 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的.
	性质 2 ：若 $y=f(x)$ 是定义在区间 I 上的单调递增（递减）函数， 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 必定存在，且 f^{-1} 也是 $f(D)$ 上的单调递增（递减）函数. 注记：习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示, 即把 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x,y 互换，写为 $y=f^{-1}(x)$， $x\in f(D)$.

三、反函数

例 1　判断下列函数是否有反函数

（1）$y = x^2$,

（2）$y = x^2, (x \geq 0)$

解：（1）显然 $y = x^2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 值域为 $[0, +\infty)$. 因此当 $y \in [0, +\infty)$ 时，由 $y = x^2$ 知 $x = \pm\sqrt{y}$ 不唯一所以 $y = x^2$ 没有反函数.

（2）当 $y = x^2, (x \geq 0)$ 时，对任意的 $y \in [0, +\infty)$ 时有唯一点的 $x = \sqrt{y}$ 与之对应，所以 $y = x^2$ 有反函数.

三、反函数

例 2　求函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数

解：（1）显然 $y=-\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $[1,+\infty)$ 值域 $(-\infty,0]$

（2）由表达式 $y=-\sqrt{x-1}$ 知，对于 $(-\infty,0]$ 的每一个 y 值，都有唯一的 x 值

（$x\in D$）$x=y^2+1$，适合关系式 $y=-\sqrt{x-1}$ 因此函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函

$x=y^2+1$，　$y\le 0$

（3）对调 x,y 则 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数可以表示为 $y=x^2+1$ $x\le 0$

三、反函数

例 3 判断下列正误

（1） $y = \sin x \quad (-\infty < x < +\infty)$ 不存在反函数

（2） $y = \sin x$ （ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ）有反函数，记作 $y = \arcsin x, x \in [-1,1]$， $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

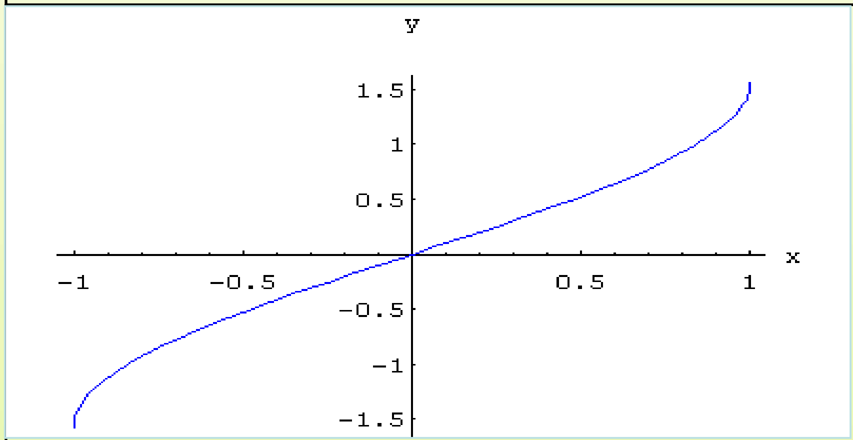
（3） $y = \cos x$ （ $0 \le x \le \pi$ ）有反函数，记作 $y = \arccos x, x \in [-1,1]$， $y \in [0, \pi]$

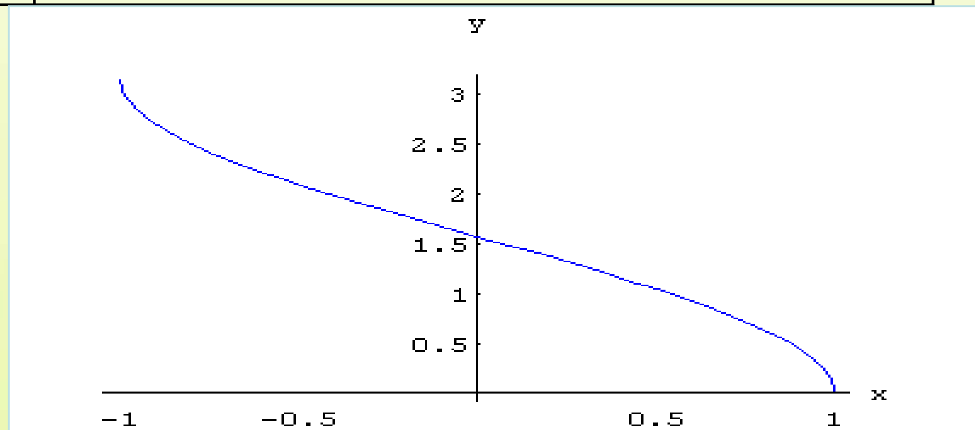
（4） $y = \tan x$ （ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ）有反函数，记作 $y = \arctan x, x \in (-\infty, +\infty)$， $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

（5） $y = \cot x$ （ $0 < x < \pi$ ）有反函数，记作 $y = \mathrm{arc}\cot x, x \in (-\infty, +\infty)$， $y \in (0, \pi)$

三、反函数

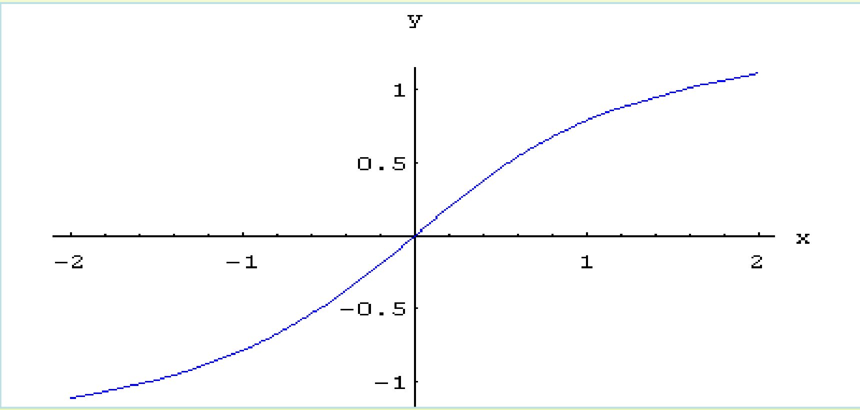
反正弦函数 $y=\arcsin x$	反正弦函数 $y=\arccos x$
定义域：$[-1,1]$	定义域：$[-1,1]$
值域 $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	值域 $y\in[0,\pi]$
单调性：单调递增	单调性：单调递增
有界性：有界函数	有界性：有界函数





$-\infty,+\infty$

三、反函数

反正切函数 $y=\arctan x$	反余切函数 $y=arc\cot x$
定义域：（$-\infty,+\infty$）	定义域：（$-\infty,+\infty$）
值域 $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	值域 $y\in(0,\pi)$
单调性：单调递增	单调性：单调递增
有界性：有界函数	有界性：有界函数
	

五、复合函数与初等函数

1. 复合函数	有关注记
（1）如果函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_1， （2）函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域 D_2，值域为 W_2， （3）且 $W_2 \subset D_1$ 那么 y 通过 u 的联系也是 x 的函数. 称这个函数是由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的，称为复合函数. 记作 $y=f[\varphi(x)]$ 其中 u 叫做中间变量.	注记 1：如果 $u=\varphi(x)$ 的值全部落在 $y=f(u)$ 的定义域内，则复合函 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域与 $u=\varphi(x)$ 的定义域相同. 注记 2：如果 $u=\varphi(x)$ 的值部分地落在 $y=f(u)$ 的定义域内，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $u=\varphi(x)$ 的定义域的子集 注记 3：如果 $u=\varphi(x)$ 的值全部落在 $y=f(u)$ 的定义域外，则不能构成复合函数.

x

五、复合函数与初等函数

基本初等函数		
（1）	幂函数	$y = x^{\mu}$ (μ为实常数)
（2）	指数函数	$y = a^{x}$ ($a > 0, a \neq 1, a$为常数)
（3）	对数函数	$y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1, a$为常数)
（4）	三角函数	$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$
（5）	反三角函数：	$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \mathrm{arc}\cot x$

初等函数：由常数及基本初等函数经过有限次的四则运算及有限复合步骤所构成并且可以用 一个式子表示的函数

叫做初等函数

§1.2　数列的极限

主要内容

一、概念的引入

二、数列的定义

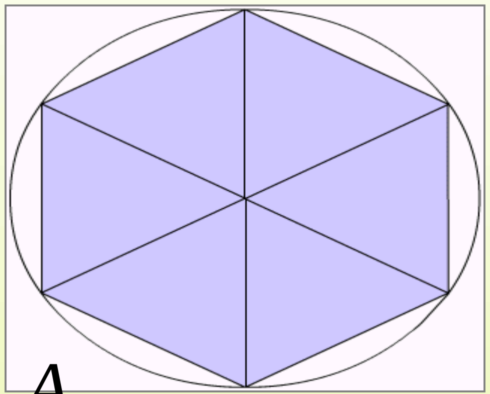
三、数列的极限

四、数列极限的性质

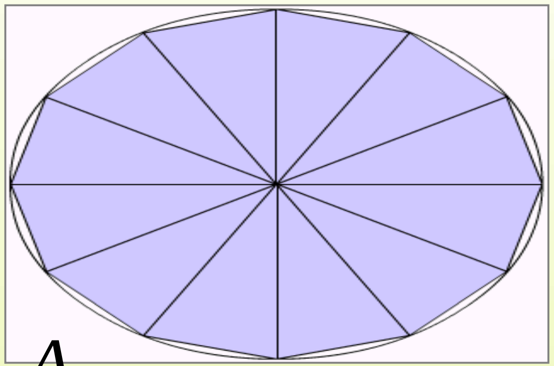
一、概念的引入

1、背景

如何用渐近的方法求圆的面积S?



A_1



A_2

A_1表示圆内接正6边形面积　A_2表示圆内接正6×2边形面积

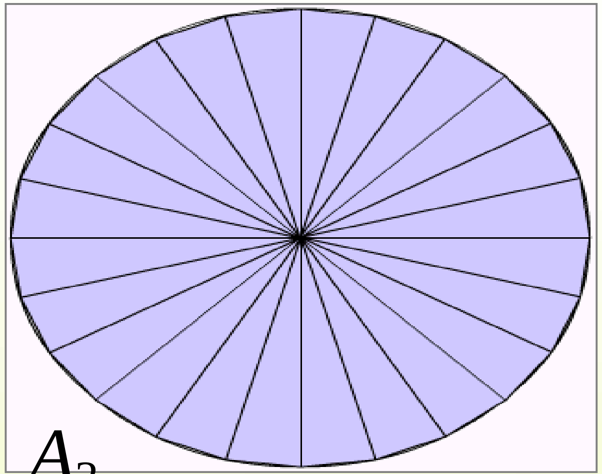
一、概念的引入

A_3表示圆内接正6×2^2边形面积,

……

A_n=圆内接正$6\times 2^{n-1}$边形面积

$$=6\times 2^{n-1}\times\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{6\cdot 2^{n-1}}$$



A_3

显然n越大, A_n越接近于S.

$$A_n\to\pi R^2$$

用圆内接正多边形的面积近似圆的面积*S*---割圆术.

二、数列的极限的概念

数列的概念.

如果按照某一法则，可以得到第一个数 x_1, 第二个数 $x_2, \cdots,$ 这样依次序排列着，使得对应于任何一个正整数 n 有一个确定的数 x_n，那么这列有序的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 就叫做数列.

数列中的每一项叫做数列的项，第 n 项 x_n 叫做数的通项. 数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 简记为 $\{x_n\}$. 也可简记为数列 x_n.

在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列.

数列的特点及几何意义

数列的特征：

①由数组成的序列

② 这个序列中的每个数都编了号

③序列中有无限多个成员

数列的几何意义：

数列对应着数轴上一个点列. 可看作一动点在数轴上依次取 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$.

数列与函数的关系： 数列可以看作自变量为正整数的函数: $x_n = f(n)$它的定义域是全体正整数.

二、数列极限的概念

发 现	结 论
①当 $n \to \infty$ 时，$x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$ 无限接近常数 1	当 n 无限增大时，数列①②③的通项
②当 $n \to \infty$ 时，通项 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ 无限接近常数 1	x_n 无限接近于一个确定的常数
③当 $n \to \infty$ 时，通项 $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ 无限接近常数 0	数列④的通项不接近于任何常数
④当 $n \to \infty$ 时，$x_n = (-1)^{n+1}$ 不接近于任何常数	

二、数列的极限的概念

1. 数列极限的描述性定义	2. 数列极限的精确定义
如果当n无限增大时，数列$\{x_n\}$通项x_n 无限接近于一个确定的常数a	对数列$\{x_n\}$，如果存在常数a，使得对于任意给定的正数ε（无论它多么小），总存在正整数N，只要$n>N$，$\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$恒成立，
那么a就叫做数列$\{x_n\}$的极限或称数列$\{x_n\}$收敛于a记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$或$x_n\to a(n\to\infty)$ 如果这样的常数a不存在，就说数列$\{x_n\}$发散，或说数列$\{x_n\}$没有极限. 数列$\{x_n\}$没有极限.也可以表达为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在	
数列$x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$	数列$x_n=\dfrac{n}{n+1}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$
数列$x_n=(-1)^n$ 发散即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在	

二、数列极限的概念

有关注记	数列极限的几何解释
注记:1：若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则$a$为常数 注记 2：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使$n > N$时, 恒有$\lvert x_n - a \rvert < \varepsilon$ 注记 3：（1）正数ε具有任意给定性 （2）正整数N的存在性与ε有关 注记 4：极限是数列中数的变化总趋势，与数列中前有限项的值没有关系. 注记 5：利用极限的定义，可以验证某个常数a是否是某个给定的数列的极限	若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则点列$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$中 （1）有无数多个点$x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots$都落在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内， （2）只有有限个点（最多$N$个）落在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$外

二、数列极限的概念

注记 6：证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 的一般步骤：

第一步：找出 $|x_n - a|$ 与 n 的关系（有时需要放大不等式）

第二步： 令 $|x_n - a| < \varepsilon$，利用 $|x_n - a|$ 与 n 的关系

求出 n 满足的不等式表达式 $n > f(\varepsilon)$

第三步：取 $N = [f(\varepsilon)]$ 即可保证 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使 $n > N$ 时 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立

二、数列极限的概念

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$

证明：（1）设 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$，显然 $|x_n-1|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$

（2）对于任意给定的正数 ε（无论它多么小），要使 $|x_n-1|<\varepsilon,$ 只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，也就是

$$n>\frac{1}{\varepsilon},$$

（3）因此取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$

由极限的定义可知：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$$

二、数列极限的概念

例 2　证明当$|q|<1$时，等比数列$1,q,q^2,\cdots,q^{n-1},\cdots$的极限为 0

证明：（1）显然$|x_n-0|=|q|^{n-1}$

（2）对于任意给定的正数ε（无论它多么小），要使$|x_n-0|<\varepsilon$，只要$|q|^{n-1}<\varepsilon$.

两边取对数，得$(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$. 由于$|q|<1$，所以$\ln|q|<0$,　故$n>1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.

（3）取$N=\left[1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当$n>N$时，$|x_n-0|<\varepsilon$恒成立

由极限的定义可知：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 也就是 $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}=0$

三、收敛数列的性质

<table>
<tr><th>有关概念</th><th>收敛数列的有界性与极限的唯一性</th></tr>
<tr><td>对于数列 x_n，如果存在正数 M，使得一切 x_n 都有 $|x_n| \le M$，则称数列 x_n 有界. 如果这样的正数 M 不存在，则称数列 x_n 无界</td><td>定理 1：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么
（1）数列 $\{x_n\}$ 一定有界
（2）数列 $\{x_n\}$ 的极限唯一
注记 7：有界数列不一定收敛
注记 8：若数列无界，则数列一定发散</td></tr>
<tr><td>（1）数列 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ 有界
（2）数列 $x_n = (-1)^n$ 有界
（3）数列 $x_n = n$ 无界</td><td>注记 9：数列收敛的充要条件是它所有的子列都收敛于同一个常数
注记 10：若 $\lim\limits_{x\to\infty} x_{2n} \ne \lim\limits_{x\to\infty} x_{2n+1}$，则 x_n 发散.
注记 11：若 $\lim\limits_{x\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{x\to\infty} x_{2n+1}$，则 x_n 收敛</td></tr>
</table>

三、收敛数列的性质

<table>
<tr><th colspan="4">收敛数列的保号性</th></tr>
<tr><td rowspan="2">，
定理 2：设 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$</td><td>若 $a>0$</td><td rowspan="2">那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时,</td><td>$x_n > 0$</td></tr>
<tr><td>若 $a<0$</td><td>$x_n < 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">推论 1：设 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$</td><td colspan="2">若从某项起 $x_n>0$, 则</td><td>$a \geq 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">若从某项起 $x_n<0$, 则</td><td>$a \leq 0$</td></tr>
<tr><td>推论 2：设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，</td><td colspan="3">如果 $x_n \leq y_n$
那么 $a \leq b$
，</td></tr>
</table>

三、数列极限的性质

数列极限的运算法则		
定理 3：若数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都收敛，k为任意非零常数，则	（1）数列$\{x_n+y_n\}$收敛	且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}y_n$
	（2）数列$\{x_n\cdot y_n\}$收敛	且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$
	（3）数列$\{kx_n\}$收敛	且$\lim\limits_{n\to\infty}(kx_n)=k\lim\limits_{n\to\infty}x_n$
	（4）当$\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$时，数列$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$收敛	且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}\quad(\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0)$

四、数列收敛的判定

数列收敛准则	
准则 I （夹逼准则）	准则 II
如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$满足下列条件： （1） $y_n \le x_n \le z_n \quad (n=1,2,\cdots)$， （2） $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$， $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ 那么数列$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$	单调有界数列必收敛 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ 注记 11： 单调递增且有上界数列必收敛 注记 12： 单调递减且有下界数列必收敛

四、数列收敛的判定

如果数列$\{x_n\}$收敛，则 数列$\|x_n\|$也收敛. 且当$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$时$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \|a\|$	反过来不一定成立. 即数列$\|x_n\|$收敛，则数列x_n可能收敛
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \|a\|$	也可能发散.

四、数列收敛的判定

例： 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}).$

解： （1）显然 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$

（2）又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1=$$

（3）由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}).=1$

§1.3　函数的极限

主要内容：

一、自变量趋于有限值时函数的极限

(1) $x \to x_0$　(2) $x \to x_0^{+}$　(3) $x \to x_0^{-}$

二、自变量趋于无穷大时函数的极限

(4) $x \to \infty$　(5) $x \to +\infty$　(6) $x \to -\infty$

三、函数的极限的性质

回顾数列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的涵义： 当 n 无限增大时，数列 $\{x_n\}$ 通项无限接近于一个确定的常数 a	2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的 $\varepsilon - N$ 定义： $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 当 $n > N$ 时， 都有 $\|x_n - a\| < \varepsilon$
3. $x_n = f(n) \to a(n \to \infty)$ 的特点： 当自变量 n 大于零且无限增大时即 $n \to \infty$ 时 对应的函数值 $f(n)$ 无限接近于确定的常数 a	4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 特点： $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 某一时刻 $N > 0,$ 从该时刻起 （$n > N$），都有 $\|x_n - a\| < \varepsilon$
在自变量的某个变化过程中对应的函数的值 $f(n)$ 无限地接近于确定常数 A	$\forall \varepsilon > 0, \exists$ 某一时刻 $\delta > 0,$ 从该时刻起 都有 $\|f(n) - a\| < \varepsilon$

一、自变量趋于有限值时函数的极限

<table>
<tr><td>1. $x \to x_0$时，函数 $f(x)$ 的极限描述性定义</td><td>2. $x \to x_0$时，函数 $f(x)$ 的极限精确定义</td></tr>
<tr><td colspan="2">设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义</td></tr>
<tr><td>如果当自变量 x 在该去心邻域内任意地接近于 x_0（或说趋于 x_0）时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个固定的常数 A</td><td>如果存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立，</td></tr>
<tr><td colspan="2">则称 A 为当 $x \to x_0$（读作 x 趋近于 x_0）时函数 $f(x)$ 的极限. 记作
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to x_0)$</td></tr>
</table>

x

一、自变量趋于有限值时函数的极限

关于定义的几点注记

注记 1： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在与 $f(x)$ 在 x_0 是否有定义无关

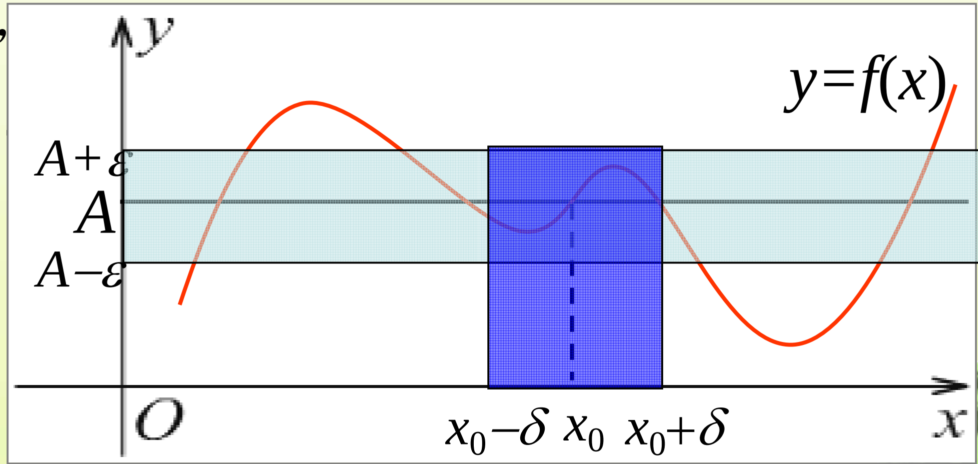
注记 2： 正数 ε 具有任意给定性

即 ε 任意小的程度没有限制，表示 $f(x)$ 与 A 的无限接近的意思

注记 3： 正数 δ 表示 x 与 x_0 的接近程度，其存在性与 ε 有关

3. 几何解释：

任意给定正数 ε，总存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数 $f(x)$ 的图形位于两平行于 x 轴的两直线 $y=A-\varepsilon$ 与 $y=A+\varepsilon$ 之间.



一、自变量趋于有限值时函数的极限

注记 4：证明 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的步骤：

第一步：找出 $|f(x)-A|$ 与 $|x-x_0|$ 之间的关系式（有时需要放大不等式）

第二步：对于任意给定的正数 ε（无论它多么小）令 $|f(x)-A|<\varepsilon$，利用 $|f(x)-A|$ 与 $|x-x_0|$ 之间的关系式求出 $|x-x_0|$ 满足的不等式表式

第三步：根据 $|x-x_0|$ 满足的不等式表式选取 δ，使得任意给定的正数 ε（无论它多么小），只要 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立

一、自变量趋于有限值时函数的极限

例 1 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C.$

分析：（1）设 $f(x) = C$，则 $|f(x) - C| = |C - C| = 0$

（2）显然 $|f(x) - C|$ 与 $|x - x_0|$ 没有关系，因此 δ 可以任意选取

证明：（1）**设** $f(x) = C$，**则** $|f(x) - C| = |C - C| = 0$.

（2）**因此对**任给 $\varepsilon > 0,$ 任取 $\delta > 0,$ **当** $0 < |x - x_0| < \delta$ **时，都有**

$$|f(x) - C| = |C - C| < \varepsilon$$

故

$$\lim_{x \to x_0} C = C.$$

一、自变量趋于有限值时函数的极限

例 2　证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

分析：（1）设 $f(x)=x, A=x_0$,，　则 $|f(x)-A|=|x-x_0|$

（2）因此对任给 $\varepsilon>0$, 要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，只要 $|x-x_0|=|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立

因此只要取 $\delta=\varepsilon$ 即可

证明：（1）设 $f(x)=x$，则 $|f(x)-x_0|=|x-x_0|$.

（2）因此对任意给定的 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有

$$|f(x)-x_0|<\varepsilon.$$

故

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

一、自变量趋于有限值时函数的极限

例3　证明 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$

分析：（1）由于 $|f(x)-A|=2|x-1|$

（2）对于任意给定的正数 ε（无论它多么小），要是 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 只要 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

（3）因此取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$<恒成立

证：（1）由于 $|(2x-1)-1|=2|x-1|$

（2）对于任意给定的正数 ε，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，都有

$$|(2x-1)-1|<\varepsilon$$

因此

$$\lim_{x\to 1}(2x-1)=1$$

一、自变量趋于有限值时函数的极限

例 4　证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

分析：（**1**）显然函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义

（**2**）当 $x\neq 1$ 时，由于 $|f(x)-2|=|x-1|$

（**3**）对于任意给定的正数 ε（无论它多么小），要是 $|f(x)-2|<\varepsilon$，

只要 $|x-1|<\varepsilon$.

（**4**）因此，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-2|<\varepsilon$

一、自变量趋于有限值时函数的极限

例 4　证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

显然，该例表明当函数在$x=x_0$处无定义时，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$可能存在.

证：（1）当$x\neq1$时，由于$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|$

（2）对于任意给定的正数ε（无论它多么小）取$\delta=\varepsilon$，则当$0<|x-1|<\delta$时，都

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

因此

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

一、自变量趋于有限值时函数的极限

3. $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的左极限	4. $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的右极限
. 当 x 从左侧趋近于 x_0（记作 $x \to x_0^-$）时 $f(x)$ 无限接近某常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限,记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0^-) = A$	. 当 x 从右侧趋近于 x_0（记作 $x \to x_0^+$）时 $f(x)$ 无限接近某常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限,记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0^+) = A$
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 的精确定义为：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 恒有 $\lvert f(x) - A\rvert$	$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 的精确定义为：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 恒有 $\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon.$

注记 5 在 $x \to x_0$ 时，$f(x) \to A$ 的极限概念中 x 既从左侧趋近于 x_0，又从右侧趋近于 x_0

一、自变量趋于有限值时函数的极限

5. $x \to x_0$时，函数$f(x)$的极限存在的充要条件

性质 1： $x \to x_0$时，$f(x)$的极限存在的充要条件是左右极限存在并相等

$$\text{极限存在} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\text{左极限存在} \\ 2.\text{右极限存在} \\ 3.\text{左极限} = \text{右极限} \end{cases}$$

注记 6：（1）若$x \to x_0$时，$f(x)$的左右极限至少有一个不存在，则当

$x \to x_0$时$f(x)$的极限不存在

（2）若$x \to x_0$时，$f(x)$的左右极限存在但不相等，则当

$x \to x_0$时$f(x)$的极限不存在.

一、自变量趋于有限值时函数的极限

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ 证明当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在

分析：由于 $f(x)$ 是分段函数，因此要证明 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在我们要从 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的左右极限入手. 若左右极限有一个不存在或左右极限存在但不相等，则结论成立.

证明：由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，因此当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

二、自变量趋于无穷大时函数的极限

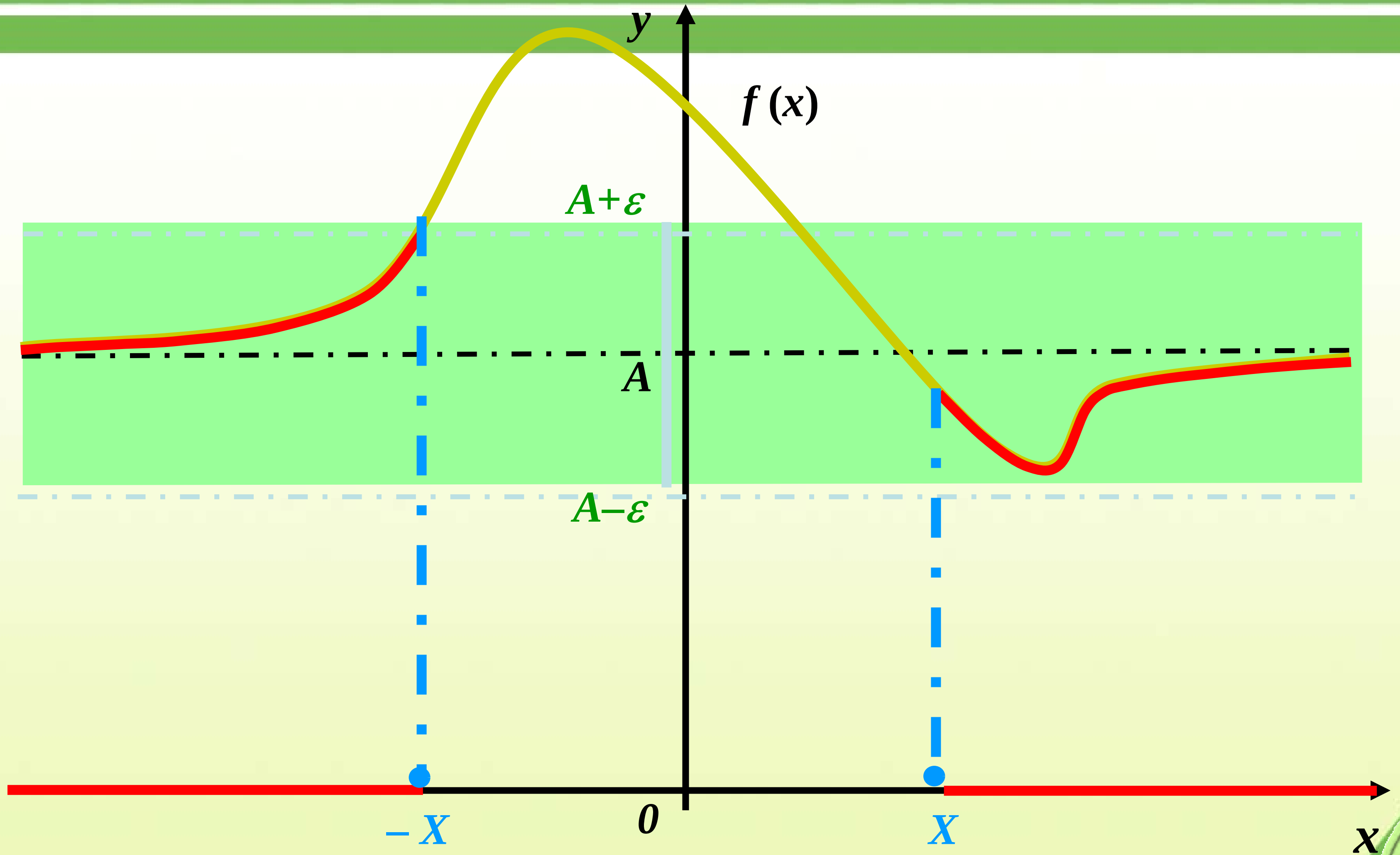
<table>
<tr><td>1. $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限描述性定义</td><td>2. $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限精确定义</td></tr>
<tr><td colspan="2">设函数 $y = f(x)$ 在 $|x| > M$ 时有定义（M 为某个常数）</td></tr>
<tr><td>如果当自变量 x 的绝对值无限增大（记作 $x \to \infty$）时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个固定的常数 A</td><td>如果存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 $X > 0$，只要点 x 满足不等式 $|x| > X$ 时对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$</td></tr>
<tr><td colspan="2">则称 A 为当 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限. 记作
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to \infty)$</td></tr>
</table>

x

二、自变量趋于有限值时函数的极限

关于定义的几点注记
注记1：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists X>0,$ 使当$\lvert x\rvert > X$时, 恒有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
注 记 2：$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$中 的 ε刻 划 了 $f(x)$与 A的 接 近 程 度; $\lvert \boldsymbol{x}\rvert > \boldsymbol{X}$中的 $\boldsymbol{X}$刻划了 $\lvert \boldsymbol{x}\rvert$充分大的程度 ；
注 记 3：ε是 任 意 给 定 正 数 ， X 是 随 ε而 确 定 的. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists X>0,$ 使当$x>X$时, 恒有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon.$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists X>0,$ 使当$x<-X$时, 恒有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon.$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的几何解释



二、自变量趋于无穷大时函数的极限

注记 4：证明 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ **的步骤：**

第一步：求 $|f(x)-A|$ 找出与 $|x|$ 之间的关系

第二步：令 $|f(x)-A|<\varepsilon$，求出 x 满足的不等式表达式 $|x|>g(\varepsilon)$

第三步：取 $X=g(\varepsilon)$，即可得到 $\forall\varepsilon>0, \exists X>0,$

使当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

二、自变量趋于无穷大时函数的极限

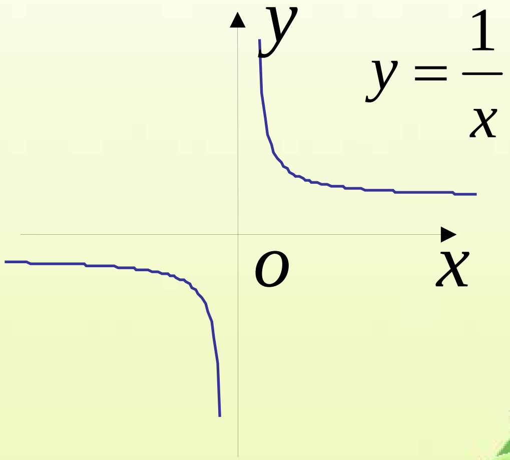
例 6 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

证：由于 $|f(x)-0|=\frac{1}{|x|}$, 所以对于任意给定的正数 ε（无论它多么小）

要使 $|f(x)-0|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon$，只要 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$.

因此取 $X=\frac{1}{\varepsilon}$. 当 $|x|>X$ 时，都有 $|f(x)-0|<\varepsilon$ 恒成.

由定义可得 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$



二、自变量趋于无穷大时函数的极限

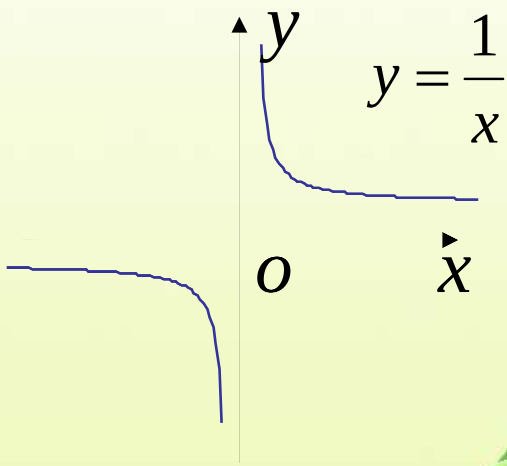
从图形可以看出，

当 $x \to \infty$ 时，曲线 $y = \dfrac{1}{x}$ 与水平直线 $y = 0$ 无限接近.

我们称直线 $y = 0$ 为直线 $y = \dfrac{1}{x}$ 的水平渐近线.

一般地，如果 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$，那么直线

$y = A$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形的水平渐近线



三、函数的极限的性质

函数的极限的唯一性与局部有界性		
性质 1：（极限的唯一性）：若 $\lim f(x)$ 存在，则极限唯一.		
性质 2（局部有界性）：若 $\lim f(x)$ 存在，则在自变量的某一局部变化范围内 $f(x)$ 有界.		
（1）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	则存在 $\delta>0$, 当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，	$f(x)$ 有界.
（2）如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	则存在 $X>0$，当 $\lvert x\rvert>X$ 时，	$f(x)$ 有界.

三、函数的极限的性质

函数的极限的局部保号性		
性质 2（局部保号性）：若 $\lim f(x)=A\neq 0$，则在自变量的某一局部变化范围		
$f(x)$ 与 A 同号.		
（1）如果 $\lim f(x)=A>0$	则存在 $\delta>0$, 当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，（或存在 $X>0$，当 $\lvert x\rvert>X$ 时）	$f(x)>0$
（2）如果 $\lim f(x)=A<0$	则存在 $\delta>0$, 当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，（或存在 $X>0$，当 $\lvert x\rvert>X$ 时）	$f(x)<0$

三、函数的极限的性质

推　　论	
推论 1：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ 0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$，则 （1）当 $f(x)\ge 0$ 时，$A\ge 0$ （2）当 $f(x)\le 0$ 时，$A\le 0$	设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A,\ \lvert x\rvert>X$，则 （1）当 $f(x)\ge 0$ 时，$A\ge 0$ （2）当 $f(x)\ge 0$ 时，$A\le 0$
推论 2：（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，且当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时 $f(x)\le g(x)$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ （2）若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ 都存在，且当 $\lvert x\rvert>X$ 时 $f(x)\le g(x)$ 则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\le\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$	

§1.4无穷小与无穷大

主要内容：

一、无穷小

二、无穷大

三、无穷小与无穷大的关系

一、无穷小

1、无穷小的定义

在自变量的某个变化过程中，以零为极限的变量称为该变化过程中的无穷小量，简称无穷小．即

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小（量）．

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷小（量）．

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则称 x_n 是 $n\to\infty$ 时的无穷小（量）．

课堂训练------判断正误

（1） $x-1$是$x\to 1$时的无穷小（量）.

（2） $\frac{1}{x}$是$x\to\infty$时的无穷小（量）.

（3） $q^n(|q|<1)$ 是$n\to+\infty$时的无穷小（量）.

（4） $\frac{1}{n}$是$n\to\infty$时的无穷小（量）.

（5） $\sin x$ 是$x\to 0$时的无穷小（量）.

一、无穷小

注记 1:　（1）一般说来，无穷小表达的是变量的变化状态.

（2）数零是惟一可作为无穷小的常数.

（3）非零的一个数无论多么小，都不能是无穷小量

一、无穷小

2、无穷小与函数极限的关系

定理 1：在自变量同一变化过程中，函数 $f(x)$ 有极限 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是统一变化过程中的无穷小量. 即

（1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$

（2） $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$

一、无穷小

分析： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta,$都有$|f(x)-A|<\varepsilon$

$$\Updownarrow \quad \alpha(x)=f(x)-A$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta,$都有$|\alpha(x)|<\varepsilon$

$$\Updownarrow$$

$\alpha(x)=f(x)-A$， $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$

$$\Updownarrow$$

$f(x)=A+\alpha(x)$其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$

一、无穷小

注记 2：该定理的主要作用在于用普通的式子 $f(x)=A+\alpha(x)$ 代替

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{或} \lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

注记 3： $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式为 $f(x)\approx A$, 误差为 $\alpha(x)$

注记 4 $\quad \lim f(x)=A \Leftrightarrow \lim\left(f(x)-A\right)=0$

一、无穷小

3、无穷小的性质

性质 1： 有限个无穷小之和是无穷小量.

性质 2： 有界函数与无穷小之积是无穷小量

性质 3： 有限个无穷小的乘积仍是无穷小量

推论 1：常数与无穷小的乘积仍是无穷小量

注记 5： 无限个无穷小之和不能保证仍是无穷小量

一、无穷小

例 1．求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$

分析：（1） $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ 即函数 x 是 $x\to 0$ 的无穷小

（2）当 $x\neq 0$ 时，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$ 即函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的去心邻域内有界

（3）性质 2 可知函数 $x\sin\frac{1}{x}$ 是 $x\to 0$ 的无穷小

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，故函数 x 是 $x\to 0$ 的无穷小．当 $x\neq 0$ 时，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$

所以函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的去心邻域内有界. 由性质 2 可知函数 $x\sin\frac{1}{x}$ 是 $x\to 0$ 的无穷小. 因此 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$

二、无穷大

（1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 的定义	（2） $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 的定义
如果当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大. 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$	如果当 $x\to\infty$ 时，时函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷大. 记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$
$\forall M>0$ （不论它多么大），总 $\exists\delta>0$, 当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，恒有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0$ （不论它多么大），总 $\exists X>0$, 当 $\lvert x\rvert>X$ 时，恒有 $\lvert f(x)\rvert>M$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,$ 当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，$f(x)>M$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X>0,$ 当 $\lvert x\rvert>X$ 时，$f(x)>M$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,$ 当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时, $f(x)<-M$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X>0,$ 当 $\lvert x\rvert>X$ 时，$f(x)<-M$

注记 1： 无穷大是变量，不能与很大的数混淆；

注记 2： （1） $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 意味着函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时极限不存在

（2） $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ 意味着函数 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时极限不存在

注记3： 函数为某一过程的无穷大量，则函数必无界，反之，不一定成立

注记 4：证明 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 的步骤：

第一步：找出 $|f(x)|$ 与 $|x - x_0|$ 之间的关系式

第二步：令 $|f(x)| > M$，找出 $|x - x_0|$ 满足的不等式

第三步：选取 δ，使得对于任意给定的正数 M 无论多么大，

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x)| > M$

二、无穷大

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=+\infty,\qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan x=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\cot x=+\infty,\qquad \lim_{x\to\pi}\cot x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}arc\tan x=\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to-\infty}arc\tan x=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}arc\cot x=0,\qquad \lim_{x\to-\infty}arc\cot x=\pi$$

三、无穷大与无穷小的关系

定理 2：在自变量的同一变化过程中，

（1）若 $f(x)$ 是无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小量.

（2）若 $f(x)$ 是无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大量.

即

（1）若 $\lim f(x)=\infty$，则 $\lim \dfrac{1}{f(x)}=0$

（2）若 $\lim f(x)=0$，$f(x)\neq 0$，则 $\lim \dfrac{1}{f(x)}=\infty$

三、无穷大与无穷小的关系

证明：由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，所以$\forall\varepsilon>0,$取$M=\dfrac{1}{\varepsilon},\exists\delta>0,$

当$0<|x-x_0|<\delta,|f(x)|>\dfrac{1}{\varepsilon}.$ 即$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$$

三、无穷大与无穷小的关系

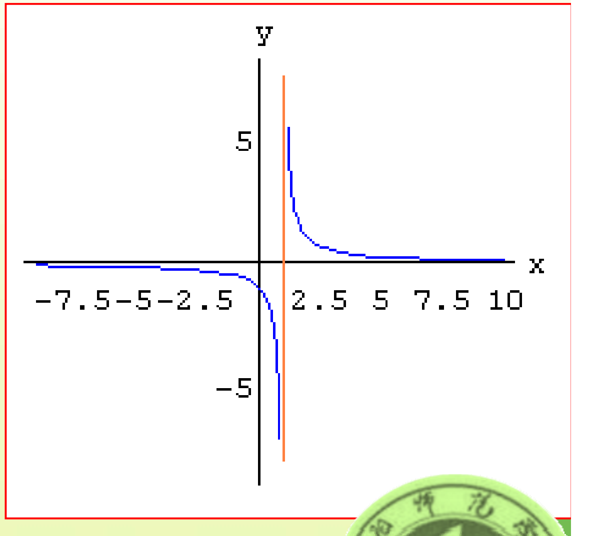
例2：求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$

解：（1）显然 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，

（2）显然 $x-1\neq 0$, 因此函数 $x-1$ 是 $x\to 1$ 的不恒为零的无限小

（3）由无穷大与无穷小的关系可知：

函数 $x-1$ 的倒数 $\dfrac{1}{x-1}$ 是 $x\to 1$ 的无限大量.



即

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$$

三、无穷大与无穷小的关系

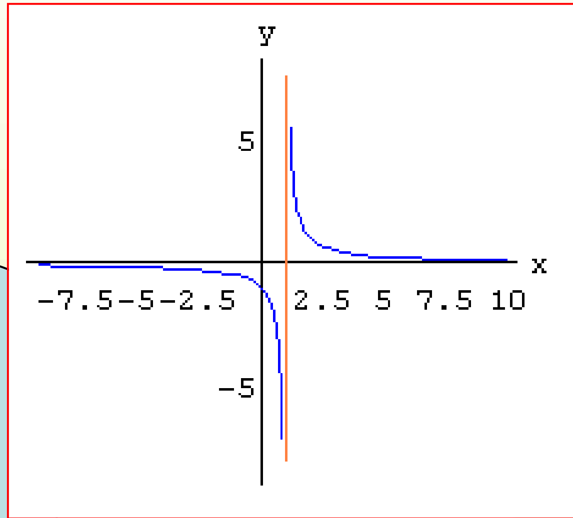
从图形可以看出：

当 $x \to 1$ 时，曲线 $y = \dfrac{1}{x-1}$ 与铅直直线 $x = 1$ 无限接近.

我们称直线 $x = 1$ 为直线 $y = \dfrac{1}{x-1}$ 的铅直渐近线.

一般地，如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，那么直线 $x = x_0$ 称为

函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直渐近线



三、无穷大与无穷小的关系

例3： 证明：当$|q|>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\infty$

证明：显然当$|q|>1$时，$\dfrac{1}{|q|}<1$因此$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{q^n}=0$

即$\dfrac{1}{q^n}$是$n\to\infty$的不恒为零的无限小

所以$\dfrac{1}{q^n}$的倒数q^n是$n\to\infty$的无限大量. 即$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\infty$

课堂训练-- 判断正误

（1）$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}\right)=0$

（2）$\lim\limits_{h\to 0}(x\sin x)=0$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x}\right)=0$

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arcsin x}{x}=0$

（5）$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1}=0$

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0$

（7）$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\arctan n}{n^2}=0$

（8）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=0$

思考题

1. 两个无穷大的和是否一定为无穷大?

2. 两个无穷大的差是否一定为无穷大?

3. 两个无穷大的积（商）是否一定为无穷大?

4. 无限个无穷小的和是否一定为无穷小?

5. 举例说明无界函数不一定是某一过程的无穷大

§1.5 极限的四则运算法则

主要内容：

一、函数极限的四则运算法则

二、函数极限的求法

（1）多项式函数极限的求法

（2）有理式函数极限的求法

（3）无理式函数极限的求法

（4）其它形式函数极限的求法

一、函数极限的四则运算法则

定理 1: 如果 $\lim f(x), \lim g(x)$ 存在（即 $\lim f(x)$ $\lim g(x)$ 有限）则	（1） $\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]$ 存在，且 $\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$ （2） $\lim\left[f(x)g(x)\right]$ 存在，且 $\lim\left[f(x)g(x)\right]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$ （3） 如果 $\lim g(x)\neq 0$, 则 $\lim\left[f(x)/g(x)\right]$ 存在，且 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$
推论 1: 如果 $\lim f(x)$ 存在 则	（1） $\lim[Cf(x)]$ 存在，且 $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$ （2）对任意的正整数 n， $\lim\left(f(x)\right)^n$ 存在，且 $\lim\left(f(x)\right)^n=\left(\lim f(x)\right)^n$

一、函数极限的四则运算法则

分析：

设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$

$f(x)=A+\alpha,\quad g(x)=B+\beta$

$\alpha\to 0, \beta\to 0$

$f(x)+g(x)=A+B+(\alpha+\beta)$

$f(x)g(x)=AB+(A\beta+B\alpha+\alpha\beta)$

两无穷小量之和仍为无穷小量

常数与无穷小量之积仍为无穷小量
有限个无穷小量之和仍为无穷小量
两无穷小量之和仍为无穷小量

$\lim[f(x)+g(x)]=A+B=\lim f(x)+\lim g(x)$

$\lim[f(x)g(x)]=AB=\lim f(x)\lim g(x)$

一、函数极限的四则运算法则

注记 **1**：（**1**）只有在两函数极限存在的前提下，两函数和（差，积）的

极限等于极限的和（差，积）

（**2**）只有在分子分母的极限都存在且分母的极限不为零的前提下，

商的极限等于极限的商

注记 **2**：定理 **1** 中（**1**）（**2**）可以推广到有限个函数上**.**

但不能推广到无限多个函数上

一、函数极限的四则运算法则

注记 3：如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，**那么**

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = a \cdot b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} (b \neq 0)$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty} Cx_n = = Ca = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

一、函数极限的四则运算法则

例 1　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right]$.

分析：（1）显然当 $n\to\infty$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right]$ 是无限多个函数和的极限问题

定理 1（1）失效.

（2）将无限个函数和的极限问题转化成有限个函数和（差、积）的极限问题

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}=\frac{(n-1)n}{2n^2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

（3）利用有限个函数和的运算规律求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right]=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$$

一、函数极限的四则运算法则

例 1　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right]$.

解：由于 $$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}=\frac{(n-1)n}{2n^2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

由函数极限的运算法则可得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$$

补充：数列极限与函数极限的关系

定理 2（海涅原理）（1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\{x_n\}: x_n\neq x_0$，$f(x_n)$有定义，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

（2） $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\{x_n\}: f(x_n)$有定义，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$， 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

注记 4 ：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=x_0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$，则 $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$不存在.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=\infty$ 但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$，则 $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}$不存在.

二、复合函数极限的运算法则

定理 3（复合函数的极限）：设 $u=\varphi(x)$,， $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$ ， $y=f(u)$

在点 $u=a$ **处有定义，且** $\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$ ，

那么复合函**复合函数数** $y=f(\varphi(x))$ **当** $x\to x_0$ **极限存在，且**

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(a)=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x))}$$

定理 4： 若 $f(x)$ 是基本初等函数，其定义域 D ， $x_0\in D$ ， 则 $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}$

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0,\quad \lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0,$$

三、函数极限夹逼准则

定理 5（夹逼准则）：

（1）如果当 $x \in \overset{0}{U}(x_0, \delta)$ 时，$\boxed{g(x) \le f(x) \le h(x)}$

（2）$\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A}$

则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，且 $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A}$

（3）如果当 $|x| > X$ 时，$\boxed{g(x) \le f(x) \le h(x)}$

（4）$\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} h(x) = A}$

则 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 存在，且 $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A}$

四、函数极限的求法

方法一：利用定义

方法二：利用函数极限的运算规律及复合函数的极限的性质

（1）直接使用运算规律（必须满足条件）

（2）间接使用运算规律

不满足前提条件的极限问题

化归（转化）

满足前提条件的极限问题

方法三：利用夹逼准则

方法四：利用无穷小量的性质

四、函数极限的求法

1．求多项式函数 $f(x)$ 的极限：求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

注记 5： 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$， $n\in N^+$ ，则

（1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ （直接使用运算法则）

（2）当 $f(x)\not\equiv 0$ 时， $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ （利用无穷小与无穷大的关系）

四、函数极限的求法

2. 求有理式函数的极限：（设 $P(x), Q(x)$ 为多项式，求 $\lim \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ）

注记:6 若 $\lim\limits_{x\to x_0} Q(x) \neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

注记 7 若 $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) \neq 0, \lim\limits_{x\to x_0} Q(x) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{Q(x)}{P(x)} = 0$ 从而 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \infty$

注记 8 若 $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = 0, \lim\limits_{x\to x_0} Q(x) = 0$，则不能直接使用运算法则

四、函数极限的求法

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$

分析：（1）判断分子分母的极限存在：

分子分母均为多项式 x^3-1, x^2-5x+3，因此分子分母的极限存在

（2）求出分子分母的极限，并判断分母的极限不为零

显然分子的极限 $\lim\limits_{x\to 2}\left[x^3-1\right]=2^3-1=7$

显然分母的极限 $\lim\limits_{x\to 2}\left[x^2-5x+3\right]=2^2-5\cdot 2+3=-3\neq 0$

（3）利用运算法则（商的极限等于极限之商）求出极限极限

四、函数极限的求法

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$

解：显然分子的极限 $\lim\limits_{x\to 2}\left[x^3-1\right]=2^3-1=7$

分母的极限 $\lim\limits_{x\to 2}\left[x^2-5x+3\right]=2^2-5\cdot 2+3=-3\neq 0$

由运算法则（商的极限等于极限之商）可得

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-1\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-5x+3\right)}=-\frac{7}{3}$$

四、函数极限的求法

例 3　求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$

分析（1）判断是否可以直接使用运算法则

分子的极限 $\lim\limits_{x\to1}(2x-3)=-1\neq0$.

分母的极限 $\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+4)=0$ **因此无法使用运算规律**

（2）颠倒分子分母，可得 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+4)}{\lim\limits_{x\to1}(2x-3)}=0$.

（3）由无穷小与无穷大的关系可得 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$

四、函数极限的求法

例 3　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$

解：（1）显然分子的极限 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-3)=-1\neq 0$.

分母的极限 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+4)=0$ 因此无法使用运算规律

（2）颠倒分子分母，可得 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+4)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-3)}=0$.

（3）由无穷小与无穷大的关系可得 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$

四、函数极限的求法

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$

分析（1）判断是否可以直接使用运算法则

分子分母的 $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=0$ **因此无法使用运算规律**

（2）当 $x\neq 3$ **时，消去分子分母共同的因式** $x-3$**，得到** $\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{x+3}$

（3）求出 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}$ 即可

解： 当 $x\neq 3$ **时，** $\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{x+3}$. **由极限的四则运算法则知**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$$

四、函数极限的求法

2. 求有理式函数的极限： （设 $P(x), Q(x)$ 为多项式，求 $\lim \frac{P(x)}{Q(x)}$ ）

注记 9 **当多项式 $P(x)$，$Q(x)$ 的次数均大于零**，由于分子分母是 $x \to \infty$ 时的无穷大

因此无法直接使用运算法则. 求 $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}}$ 的一般步骤为

第一步：将分子分母同除以 x 幂的最高次，求出变形后的函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$

第二步：求出 $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}}$ 即可

四、函数极限的求法

例 5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$

分析 （1）变形：分子分母的最高次是 x^3，因此分子分母同除以 x^3，则

$$\frac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}$$

（2）求出变形后的新函数的分子分母在 $x\to\infty$ 时的极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}3-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}=3-4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^3=3$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}7+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}=7+5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-3\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^3=7$$

变形后的新函数的分子分母在 $x\to\infty$ 时有极限且分母的极限非零，因此可以使用运算法则

（3）求出 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}$ 即可.

四、函数极限的求法

例 5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$

解 分子分母同除以 x^3 后取极限可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}7+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}}$$

$$=\frac{3}{7}$$

四、函数极限的求法

例 6：求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$

分析；（1）式 $\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$ 中分子分母的最高次幂为 x^3，所以将该式分子分母

同除以 x^3，可得 $\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}$ 从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}$

（2）由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}=2$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}==\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}\right)}=\dfrac{0}{2}=0$

（3）利用无穷大与无穷小的关系可得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty$

四、函数极限的求法

例 6：求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$

解：**分子分母同除以 x^3 后取极限可得**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}==\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}\right)}=\frac{0}{2}=0$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty$$

四、函数极限的求法

3. 求无理式函数的极限：

（1）使用基本初等函数的性质. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 其定义域 D， $x_0\in D$

（2）使用复合函数的极限性质. $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$

（3）有理化后利用运算法则. 如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{x^2+1}}$

四、函数极限的求法

例 7： 求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$

分析： （1）函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$ 是由函数 $f(u)=\sqrt{u}$ 及 $u=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ 复合而成的函数

（2）$\lim\limits_{x\to 3}u=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$，显然 $f(u)=\sqrt{u}$ 在 $u=\dfrac{1}{6}$ 处有定义且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{6}}f(u)$ 存在，因此

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim_{x\to 3}u}=\sqrt{\frac{1}{6}}$$

解： 由复合函数极限的性质可得

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\frac{1}{6}}$$

四、函数极限的求法

例 8：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

分析：（1）**显然** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{x^2+1}-1\right]=0,\lim\limits_{x\to 0}x=0$ **不能直接使用运算法则**

（2）由于 $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\dfrac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}x}{\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{x^2+1}+1\right]}=0$ 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=0$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=0$

四、函数极限的求法

4. 求其它形式的函数 $f(x)$ 的极限

（1）利用无穷小的性质. 如求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

（2）利用左右极限 求 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$ 在 $x\to 0$ 时的极限

（3）化归后利用运算法则. 如求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

四、函数极限的求法

例 9：求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

分析： （1）由于极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1-x}=\infty,\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3}{1-x^3}=\infty$ 不存在，因此不能直接使用运算法则

（2）通分得 $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}=\dfrac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=\dfrac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\dfrac{x+2}{1+x+x^2}$

（3） 由于 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{1+x+x^2}=1$ ，所以 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{1+x+x^2}=-1$

四、函数极限的求法

例 9：求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

解：（1）统分后取极限可得

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}$$

$$=-\frac{\lim\limits_{x\to1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(1+x+x^2)}$$

$$=-1$$

四、函数极限的求法

例 10　求 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$ 在 $x\to 0$ 时的极限

分析：由于 $f(x)$ 是分段函数，因此我们要从 $f(x)$ 的左右极限入手.

求 $x\to 0$ 时， $f(x)$ 的极限

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x\sin\frac{1}{x}+1\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)+\lim\limits_{x\to 0^-}1=0+1=1$， $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ 因此当 $x\to 0$ 时， $f(x)$ 的极限存在. 且

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

§1.6 两个重要极限

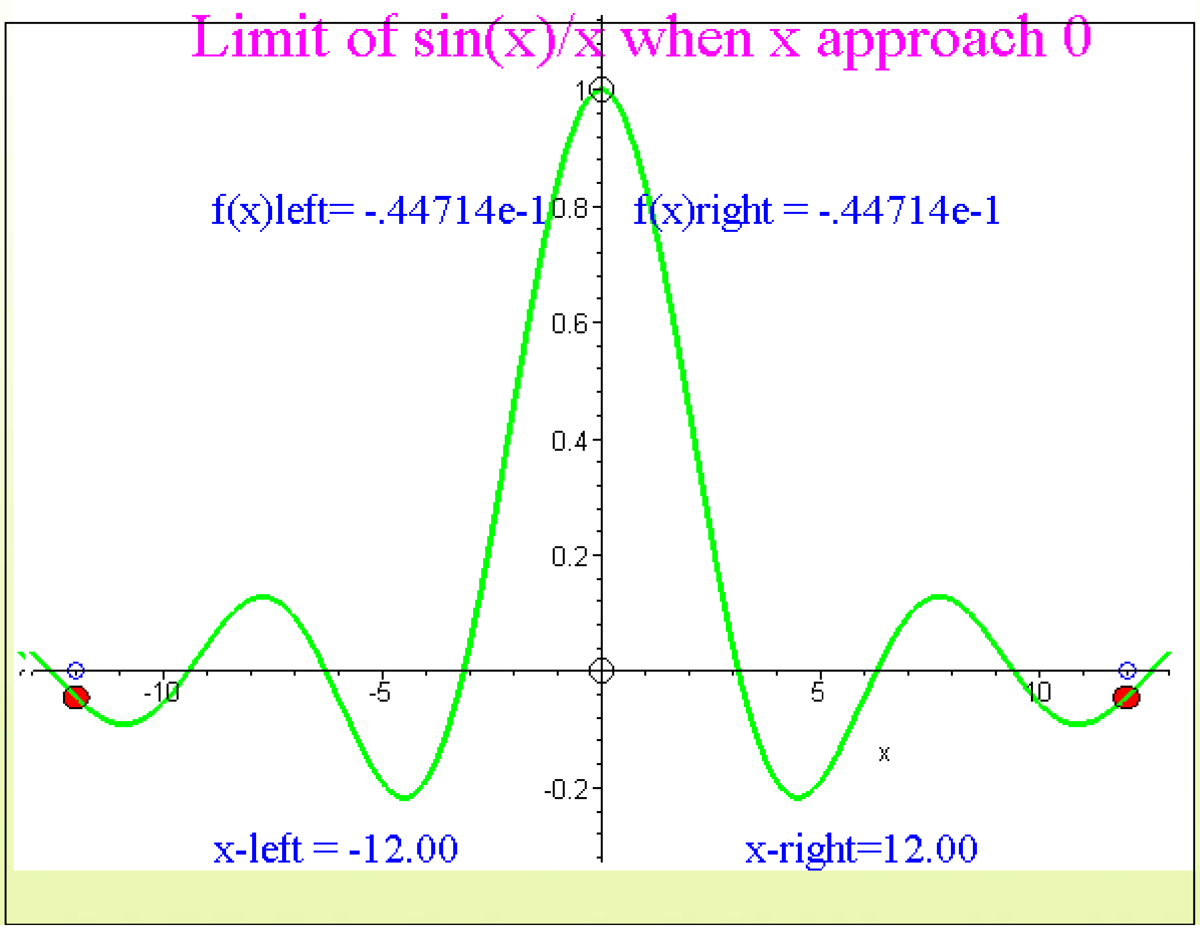
主要内容：

一、$x \to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 的极限

二、$x \to \infty$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ 的极限

一、$x \to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 的极限

观察 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的图形发现：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$



$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$的证明

不妨假设$x\in \overset{0}{U}(0,\dfrac{\pi}{2})$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$

$\sin x<x<\tan x$

$0<-x<\dfrac{\pi}{2}$

$\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1,$

$\cos(-x)<\dfrac{\sin(-x)}{(-x)}<1,$

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

$\lim\limits_{x\to 0}1=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

一、$x \to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 的极限

定理 1： $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	注 记 1
函数特征： （1）自变量的某一变化过程中 $\frac{0}{0}$ 型函数 （2）分子上出现了正弦符号 （3）正弦符号后面的变量与分母相同	（1） $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ （2） $\lim\limits_{x_n \to 0} \dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$ （x_n 为数列） （3） $\lim\limits_{\varphi(x) \to 0} \dfrac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$ （$\varphi(x)$ 为函数） （4） $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{\sin t} = 1$

一、$x \to 0$时，$\dfrac{\sin x}{x}$的极限

注记 2：利用 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$求极限的步骤：

第一步：判断当自变量趋于零时函数为$\dfrac{0}{0}$ 型函数

第二步：找出正弦符号

第三步：找出正弦符号后面的函数$t=\varphi(x)$，使得$\lim t=\lim\varphi(x)=0$

第四步：构造出 $\dfrac{\sin t}{t}$

第五步：利用 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$求出极限

一、$x \to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 的极限

例 1 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

分析： （1）**由于** $\lim\limits_{x \to 0} \tan x = \tan 0 = 0, \lim\limits_{x \to 0} x = 0$ **即为** $x \to 0$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型函数

（2）**又** $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$，**所以** $\dfrac{\tan x}{x} = \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

（3） $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1, \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0} \cos x} = \dfrac{1}{\cos 0} = 1$

（4）**利用极限的运算法则求出**

解：$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$$\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

分析： （1）由于 $\lim\limits_{x\to 0}[1-\cos x]=1-\cos 0=0, \lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ 即为 $x\to 0$ $\dfrac{0}{0}$ 型函数

（2）又 $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$，所以 $\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$

（3）令 $t=\dfrac{x}{2}$, 则 $x\to 0$ 时， $t\to 0$， 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$

解： 令 $t=\dfrac{x}{2}$, 则 $x\to 0$ 时， $t\to 0$， 且 $\dfrac{1-\cos x}{x^2}==\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$ 从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}$$

一、$x \to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 的极限

例 3 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$

分析：（1）由于 $\lim\limits_{x \to 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0, \lim\limits_{x \to 0} x = 0$ 即为 $x \to 0$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 型函数

（2）令 $t = \arcsin x,$ 则 $x = \sin t,$， 且当 $x \to 0$ 时， $t \to 0$

（3）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{\sin t}$

解： 令 $t = \arcsin x,$ 则 $x = \sin t,$ 显然当 $x \to 0$ 时， $t \to 0$， 从而

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

一、$x \to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 的极限

例 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n \sin\dfrac{1}{4^n}\right)$

解：令 $t=\dfrac{1}{4^n}$, **则** $n\to\infty$ **时，** $t\to 0$**，从而**

$$\lim_{n\to\infty}\left(2^n \sin\frac{1}{4^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}\sin\frac{1}{4^n}}{\frac{1}{4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{4^n}}{\frac{1}{4^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$

$$=0$$

二、$x\to\infty$时，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的极限

定理 2：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$	注 记 3
函数特征： （1）自变量的某一变化过程的1^∞ 型函数 （2）具有幂函数$[1+f(x)]^{g(x)}$的形式．其中 $f(x)$为自变量的某一变化过程的无穷小 $g(x)$为自变量的同一变化过程的无穷大量，且$f(x)g(x)=1$ 简称为：内小外大，内外互倒	（1）$\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t=\mathrm{e}$ （2）$\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$ （3）$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ （4）$\lim\limits_{\varphi(x)\to0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$

课堂训练----判断正误

（1） $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$

（2） $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

（3） $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{u}{\sin u} = 1$

（4） $\lim\limits_{x \to 0} (x \sin x) = 1$

（5） $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin \dfrac{1}{x} \right) = 0$

（6） $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \sin \dfrac{1}{x} \right) = 1$

（7） $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

（8） $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \dfrac{1}{x})^{x} = e$

二、$x\to\infty$时，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的极限

注记 4　　利用 $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t=\mathrm{e}$ 求极限的步骤为：

第一步：判断函数为自变量某一变化过程中的1^∞型函数

第二步：构造出$\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$使得$\lim t=\lim\varphi(x)=\infty$

第三步：利用$\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t=\mathrm{e}$求出极限

二、$x\to\infty$时，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ 的极限

例 5　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

分析：（1）由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数为当 $x\to\infty$ 时的 1^{∞} 型

（2）由于 $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}$ 所以令 $t=-x$, 则当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-1}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}}$

解：令 $t=-x$, 则当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$，因此

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}=e^{-1}$$

二、$x\to\infty$时，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ 的极限

例 6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

解： （1）显然 $\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{x+1}=\left(1+\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+1}$

（2）令 $t=x+\dfrac{1}{2}$,，则 $x=t-\dfrac{1}{2}$，从而当 $x\to\infty$时，$t\to\infty$且

$$\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由于 $\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{t}=e$, $\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{\frac{1}{2}}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}\cdot\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}=e$

二、$x\to\infty$时，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ 的极限

注记 5　　利用 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$ 求极限的步骤：

第一步：判断函数为自变量在某一变化过程的1^{∞}型函数

第二步：构造出 $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ 使得 $\lim t=0$

第三步：利用 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$ 求出极限

二、$x\to\infty$时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的极限

例 7 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

分析（1）显然函数为$x\to 0$时的$\frac{0}{0}$ 型因此无法使用运算法则

（2）恒等变形：$\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

（3）求$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

解： 显然$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\ln(1+x)=\ln\left[(1+x)\right]^{\frac{1}{x}}$,由复合函数的极限性质可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left[(1+x)\right]^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}\left[(1+x)\right]^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$$

二、$x\to\infty$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ 的极限

例 8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}$

分析（1）显然函数为 $x\to 0$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 型因此无法使用运算法则

（2）恒等变形：令 $t=e^{x}-1$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\ln(1+t)}{t}}$

解：令 $t=e^{x}-1$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$. 从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\dfrac{\ln(1+t)}{t}}=1$$

三、$\lim\left(f(x)\right)^{g(x)}=A^B$

注记 6： 若 $\lim f(x)=A>0,\ \lim g(x)=B$,则 $\lim\left(f(x)\right)^{g(x)}=A^B$

注记 7：利用 $\lim\left(f(x)\right)^{g(x)}=A^B$ 求极限的步骤

第一步：将函数恒等变形为 $\left(f(x)\right)^{g(x)}$

第二步： 判断 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 存在,并求出 $f(x)$ 与 $\lim g(x)$ **并判断** $\lim f(x)>0$

第三步：利用 $\lim\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim f(x)\right)^{\lim g(x)}$ 求出极限

三、$\lim\left(f(x)\right)^{g(x)}=A^B$

例9：求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{\sin x}}$

分析：（1）$(1+x)^{\frac{2}{\sin x}}=\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{2x}{\sin x}}$ 为幂函数 $\left(f(x)\right)^{g(x)}$ 形式，其中

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}},\ g(x)=\frac{2x}{\sin x}$$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}=e>0,\quad \lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=2$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{2x}{\sin x}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}}=e^2$

§1.7 无穷小的比较

主要内容：

一、无穷小的比较

二、 等价无穷小替换

一、 无穷小的比较

观 察	设 $\lim \alpha = \lim \beta = 0$， 若
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{3x} = 0$	（1） $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{x^2} = \infty$	（2） $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{3x^2} = \dfrac{2}{3}$	（3） $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C$ （$C \neq 0$ ），称 β 与 α 是同阶无穷小
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	当 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$，称 β 与 α 是等价无穷小，记为 $\beta \sim \alpha$

一、无穷小的比较

$\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$，$\lim \alpha = \lim \beta = 0$ 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0 \Leftrightarrow \lim \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{C} \neq 0$$

注记 1　β 是比 α 高阶的无穷小的充要条件是 α 是比 β 低阶的无穷小

注记 2　β 与 α 是同阶无穷小的充要条件是 α 与 β 是同阶无穷小

注记 3　β 与 α 是等价无穷小的充要条件是 α 与 β 是等价无穷小

课堂训练---判断正误

（1） 当$x \to 0$时,$3x^2$是比x^2高阶的无穷小量

（2） 当$n \to +\infty$时,$\frac{1}{n}$是比$\frac{1}{n^2}$低阶的无穷小量

（3） 当$x \to 3$时，x^2-9是与$x-3$同阶的无穷小量

（4） 当$x \to 0$时,$\sin x$是x等阶无穷小量

一、 无穷小的比较

当$x \to 0$时	当$x \to 0$时
$\sin ax \sim ax$	$\ln(1+ax) \sim ax$
$\tan ax \sim ax$	$e^{ax}-1 \sim ax$
$\arcsin ax \sim ax$	$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
$\arctan ax \sim ax$	

二、等价无穷小替换

定理 1　　等价无穷小量满足

（1）自反性：$\alpha\sim\alpha$

（2）对称性：若 $\alpha\sim\beta$, 则 $\beta\sim\alpha$

（3）传递性：若 $\alpha\sim\beta,\ \beta\sim\gamma$, 则 $\alpha\sim\gamma$

定理 2 若　（1）$\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta'$ 是无穷小量

（2）$\alpha\sim\alpha'$，　$\beta\sim\beta'$

则　　$\alpha\beta\sim\alpha'\beta'$

定理 3　若 $\alpha\sim\beta$, 且 $\varphi(x)$ 的极限存在或有界，则

$$\alpha\varphi(x)\sim\beta\varphi(x)$$

定理 4　　α与β 是等价无穷小的充分必要条件为　$\beta=\alpha+o(\alpha)$.

定理 5　（替换定理）

若　（1）$\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta'$ 是无穷小量

（2）$\alpha\sim\alpha'$，　$\beta\sim\beta'$

（3）$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在

则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 也存在且 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$

二、等价无穷小替换

替换定理的证明

已知 $\alpha \sim \alpha'$， $\beta \sim \beta'$ $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1 \qquad \lim \frac{\beta'}{\beta} = 1$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}\right) = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

二、等价无穷小替换

注记 4：求两个无穷小商的极限时，分子分母都可用等价无穷小来替换

注记 5：用替换定理求 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 极限的步骤

第一步：判断在自变量的某一变化过程中，分子分母为无穷小

第二步：找出在自变量的变化过程中，分子及分母适当的等价无穷小

第三步：用分子及分母的等价无穷小分别替换原分子和分母

并求出替换后的函数的极限

二、等价无穷小替换

例 1 ： 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$

解（1）显然 $\lim\limits_{x\to 0}\tan 2x=\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x=0$

（2）当 $x\to 0$ 时， $\tan 2x\sim 2x,\sin 5x\sim 5x$， 因此

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$

二、等价无穷小替换

例 2 ： 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+2)\sin x}{arc\sin x}$

分析（1） $\lim\limits_{x\to 0}\left[(x^2+2)\sin x\right]=(0^2+2)\sin 0=0,$

$$\lim_{x\to 0} arc\sin x = arc\sin 0 = 0$$

（2）当 $x\to 0$ 时， $\sin x\sim x, \arcsin x\sim x$， $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2)=2$ 所以

$$(x^2+2)\sin x\sim (x^2+2)x$$

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+2)\sin x}{arc\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+2)x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2)=2$

二、等价无穷小替换

例 2 ： 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+2)\sin x}{arc\sin x}$

解（1）显然 $\lim\limits_{x\to 0}\left[(x^2+2)\sin x\right]=0$， $\lim\limits_{x\to 0} arc\sin x=0$

（2）又当 $x\to 0$ 时， $\sin x \sim x, \arcsin x \sim x$， $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2)=2$ 所以

$$(x^2+2)\sin x \sim (x^2+2)x$$

（3）由替换定理可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2)\sin x}{arc\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2)x}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2+2)=2$$

例3：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

如果分子分母是若干项之和或差，只可对函数的因子作等价无穷小代换，一般不能对代数和中各无穷小分别代换

错 解　显然当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x,\quad \sin x\sim x$，所以

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

解　显然当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，所以

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

因此

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\frac{1}{2}$$

二、等价无穷小替换

定理 6（和差取大法则） 若 $\beta=o(\alpha)$，则 $\alpha\pm\beta\sim\alpha$ 如 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$	定理 8 （和差替换法则）若 （1） $\alpha\sim\alpha'$， $\beta\sim\beta'$ （2） α 与 β 不等价 则 （1） $\alpha-\beta\sim\alpha'-\beta'$,
定理 7（因式替换法则）若 （1） $\alpha\sim\beta$ （2） $\varphi(x)$ 的极限存在或有界 则 $\lim\alpha\varphi(x)=\lim\beta\varphi(x)$ 如 $\lim\limits_{x\to0}\left(\arcsin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$	（2） $\lim\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma}=\lim\dfrac{\alpha'-\beta'}{\gamma}$ 如 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x-\sin x}{\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-x}{x}=1$

§1.8 函数的连续性

主要内容：

一、函数连续的概念

二、函数的间断点

三、连续函数的性质

一、 函数的连续的概念

1. 函数在一点连续的定义：

描述性定义	等价定义	ε-δ 定义
定义 1：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在且其极限值等于 $f(x_0)$ 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，点 x_0 是 $f(x)$ 的连续点	设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义. 若自变量增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时，函数 $f(x)$ 有相应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于零. 我们就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.	设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义. 对于任意给定的正数 ε（无论多么小）如果存在一个正数 δ，当 $\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时恒有 $\lvert f(x)-f(x_0)\rvert<\varepsilon$ 成立.

一、 函数的连续的概念

注记 1：函数在一点连续必须满足一下三个条件：

（1）函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 有定义即 $f(x_0)$ 存在

（2）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在

（3）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 等于 $f(x_0)$

一、 函数的连续的概念

2. 函数在一点左右连续的定义：

定义 2： （1）若 $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)}$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续 （2）若 $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)}$ 则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$ **注记 4：** 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处即是左连续又是右连续

一、 函数的连续的概念

例 1：证明函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续

分析： 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续的充要条件是函数 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

（1）判断 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 是否存在

（2）若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在 判断 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ 是否成立

证明：显然， $x=0$ 时 $f(x)=0$，**当** $x\neq 0$ 时， $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$

由无穷小的性质可得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$

故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

一、 函数的连续的概念

例 2：讨论函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处是否连续

分析： 函数 $f(x)=\begin{cases} x,\ x>0 \\ 0,\ x=0 \\ -x, x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续的充要条件是函数 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

（1）求 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 与 $f(0)$

（2）判断 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

证明： 由于 $x<0$ 时， $f(x)=-x.$ $x>0$ 时， $f(x)=x.$ $f(0)=0$ 所以

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ 故函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续

一、 函数的连续的概念

3. 连续函数的定义：

定义 3： （1）如果函数在开区间(a,b)内的每一点处连续，则称为开区间(a,b)内的连续函数，(a,b)称为函数的连续区间.	（2）如果函数在区间(a,b)内的每一点处连续，且在点a处右连续，在点b处左连续，则称为闭区间$[a,b]$上的连续函数. 注记 5 基本初等函数在其定义域内连续

二、 函数的间断点

1. 函数间断点的定义：

定义 4： 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 是 $f(x)$ 的不连续点或间断点	注记 6： x_0 是 $f(x)$ 间断点的充要条件是 $f(x)$ 满足至少满足下列三种情形之一 （1）在点 x_0 处无定义，即 $f(x_0)$ 不存在； （2） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在（左右极限存在但不相等或左右极限至少有一个不存在） （3） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 及 $f(x_0)$ 都存在但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ （左右极限存在且相等但不等于 $f(x_0)$ ）

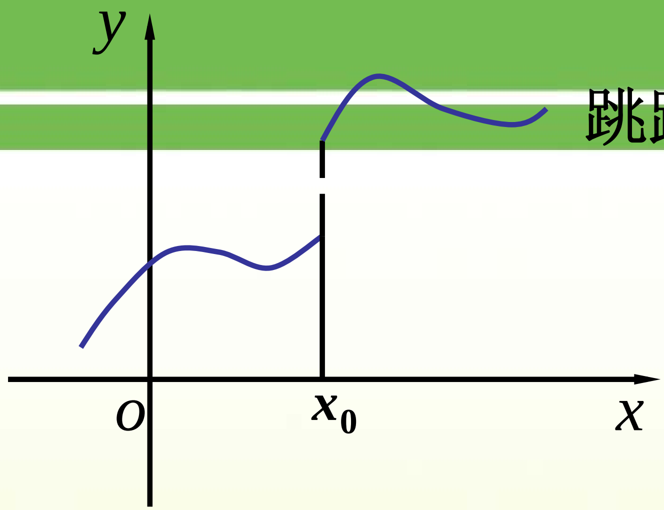
二、 函数的间断点

2. 函数间断点的分类：

第一类间断点：	第二类间断点：
左右极限存在的间断点	不是第一类间断点的任何间断点 即左右极限至少有一个不存在的间断点
（1） 左右极限存在且相等的间断点称为可去间断点	（3） 左右极限至少有一个是无穷大的间断点称为无穷间断点
（2） 左右极限存在但不相等的间断点称为跳跃间断点	（4） 在自变量的某一变化过程中函数值来回振荡的间断点称为振荡间断点

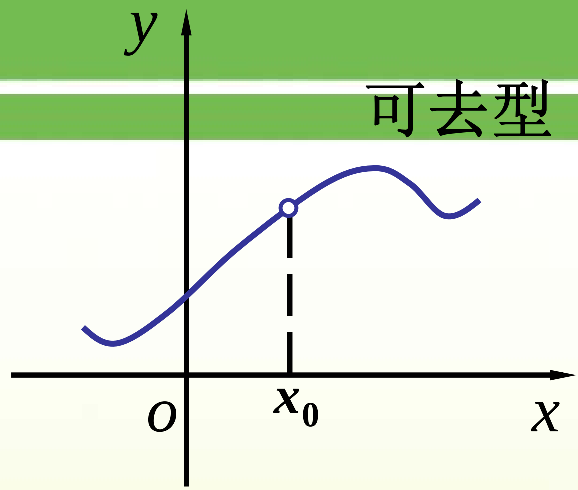
第一类间断点

$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$



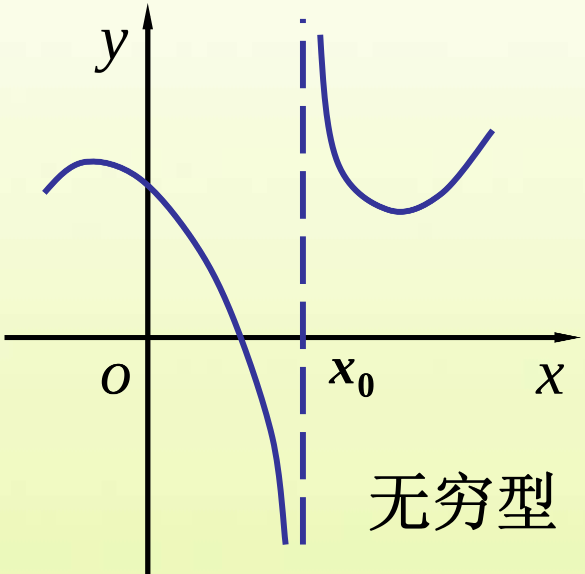
跳跃型

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在



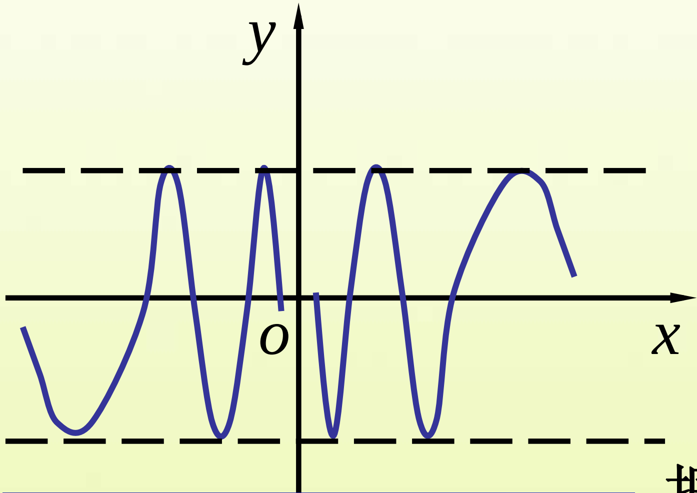
可去型

第二类间断点



无穷型

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$



振荡型

当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的取值来回振荡。

二、 函数的间断点

3. 函数间断点的判定：

（1） x_0 是函数 $y=f(x)$ 可去间断点的判定	
★ 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义， 则 x_0 是函数 $y=f(x)$ 可去间断点 的充要条件是 $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)}$ 存在 但不等于 $f(x_0)$	★ 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处无定义， 则 x_0 是函数 $y=f(x)$ 可去间断点 的充要条件是 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在 （即左右极限存在且相等） **可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义，则可使其变为连续点.**

二、 函数的间断点

例 3 证明： $x=0$ 为 $f(x)=\operatorname{sgn}^2 x=\begin{cases}1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ 的可去间断点.

分析：（1） 显然函数在 $x=0$ 处有定义.

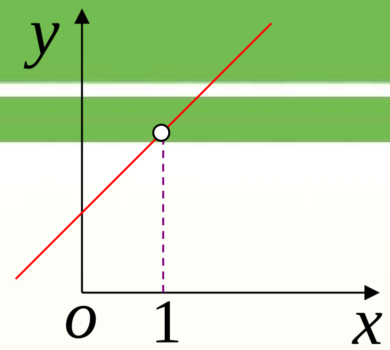
（2）只要证明 $x\to 0$ 时 $f(x)=\operatorname{sgn}^2 x=\begin{cases}1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ 的极限存在但不等于 $f(0)$

证明：显然 $x=0$ 时 $f(x)=0$， 当 $x\neq 0$ 时， $f(x)=1$ 所以

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\neq f(0)$$

因此 $x=0$ 为 $f(x)=\operatorname{sgn}^2 x=\begin{cases}1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ 的可去间断点.

二、 函数的间断点



例 4 **证明：** $x=1$ **为** $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ **可去间断点**

分析：由于 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ **在** $x=1$ **处无定义因此** $x=1$ **为** $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ **可去间断点**

的充要条件是 $x\to1$ **时，函数** $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ **的极限存在**

证明：（1）显然 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ **在** $x=1$ **处无定义，因此** $x=1$ **为** $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ **的间断点**

（2）由于 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$**，所以** $x\to1$ **时，函数** $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ **的极限存在**

因此 $x=1$ **为** $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ **的可去间断点**

二、 函数的间断点

3. 函数间断点的判定：

<table>
<tr><td colspan="2">（2） x_0 是函数 $y=f(x)$ 跳跃间断点的判定</td></tr>
<tr><td>x_0 是函数 $y=f(x)$ 跳跃间断点充要条件是左右极限存在但不相等即

$f(x^-_0)\neq f(x^+_0)$</td><td>例 5 证明： $x=0$ 为 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$ 的跳跃间断点.

证明：由于 $\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{sgn} x=\lim\limits_{x\to0^-}(-1)=-1$， $\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{sgn} x=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$

所以当 $x\to0$ 时 $y=\operatorname{sgn} x$ 的左极限存在但不相等

因此 $x=0$ 为 $y=\operatorname{sgn} x$ 的跳跃间断点.</td></tr>
</table>

二、 函数的间断点

3. 函数间断点的判定：

（3） x_0 是函数 $y=f(x)$ 无穷间断点的判定

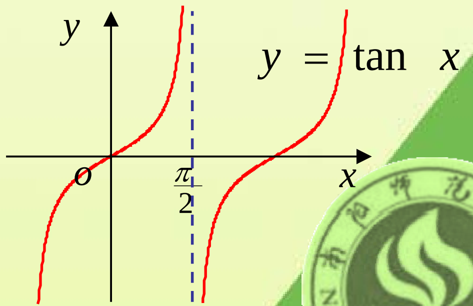
x_0 是函数 $y=f(x)$ 无穷间断点充要条件是左右极限至少有一个是无穷大

例 4.　证明 $x=\frac{\pi}{2}$ **是** $y=\tan x$ **的无穷间断点**

证明：（1）显然函数 $y=\tan x$ **在点** $x=\frac{\pi}{2}$ **没有定义，**

（2）由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$ **，故** $x=\frac{\pi}{2}$ **是无穷间断点**

所以 $x=\frac{\pi}{2}$ **是** $y=\tan x$ **的间断点**



三、 连续函数的性质

定理 1：如果函数 $f(x),g(x)$ 在点 x_0 连续，则 （1）函数 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 也连续 （2）函数 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 也连续 （3）当 $g(x_0)\neq 0$，函数 $f(x)/g(x)$ 在点 x_0 也连续	定理 2：如果函数 $f(x),g(x)$ 在区间 I 上连续，则 （1）函数 $f(x)+g(x)$ 在 I 上也连续 （2）函数 $f(x)g(x)$ 在 I 也连续 （3）在区间 I 上 $g(x)\neq 0$，则函数 $f(x)/g(x)$ 在 I 上也连续

三、 连续函数的性质

定理 3：

（1）连续单调递增的函数其反函数也连续单调递增

（2）连续单调递减的函数其反函数也连续单调递减

定理 4：连续函数的复合函数是连续的

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)) = f(\varphi(x_0))$$

定理 5：一切初等函数在其定义区间都是连续的

定义区间是指包含在定义域内的区间

$y = \arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上连续单调递增

$y = \sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 连续

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\sin x = \ln\sin\frac{\pi}{2} = 0$$

四、 连续函数的性质应用

例 6 设 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$

显然为有理式因此
间断点一定是分母为零的点

（1）求函数间断点

（2）求出连续区间

（3）求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x),\ \lim\limits_{x\to -3} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

解：显然 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ 因此函数在 $x=-3, x=2$ 无定义，所以 $x=-3, x=2$

一定是函数的间断点. 所以函数在 $(-\infty,-3),(-3,2),(2,+\infty)$ 内连续

四、 连续函数的性质应用

由于函数在 $x=0$ 连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=\dfrac{1}{2}$

当 $x\neq -3,2$ 时， $f(x)=\dfrac{(x+3)(x^2-1)}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{x^2-1}{(x-2)}$，

所以 $$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-2}=\infty$$

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to -3} x^2-1}{\lim\limits_{x\to -3}(x-2)}=-\frac{8}{5}$$

例 7 ； $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}$

解：令 $u=\dfrac{1}{x}$, 则 $e^{\frac{1}{x}}=e^{u}$，且当 $x\to\infty$ 时， $u\to 0$. 由于 e^u 在定义区间内连续，

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to 0} e^{u}=e^{0}=1$$

四、 连续函数的性质应用

例 8：设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\ln(1+x)}{x}, x>0\\ \cos 2x, x\le 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，求 a

解：显然当 $x>0$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{a\ln(1+x)}{x}$ 连续

当 $x<0$ 时，函数 $f(x)=\cos 2x$ 也连续. 因此我们只考虑 $x=0$ 情况.

由于

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{a\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=a\ ,$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\cos 2x=\cos 0=1\ ,\quad f(0)=\cos 0=1$$

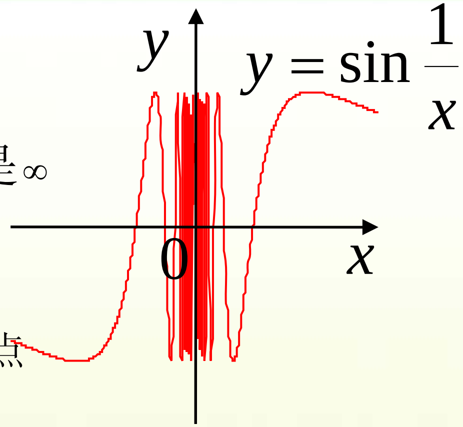
因此要是函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续必须 $f(0^+)=f(0^-)=f(0)$ ，

即 $a=1$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续. 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续

例 9　证明 $x=0$ 为 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的振荡间断点.（补充）

分析：（1）首先证明 $x=0$ 为 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的间断点

（2）证明 $x\to 0$ 时，函数的 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的右极限不存在且不是 ∞



证明：（1）显然 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义，因此 $x=0$ 为 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的间断点

（2）取 $x_n=\dfrac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}>0,\ x_n'=\dfrac{1}{2\pi n-\frac{\pi}{2}}>0$ 则当 $n\to\infty$ 时， $x_n\to 0, x_n'\to 0$, 但

$$f(x_n)=\sin\frac{1}{x_n}=\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=1,$$

$$f(x_n')=\sin\frac{1}{x_n}=\sin(2n\pi-\frac{\pi}{2})=-1$$

表明 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 右侧附近有无数多个点取到 1，也有无数多个点取到-1，

因此 $x\to 0$ 时，函数的 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的右极限不存在且不是 ∞. 所以 $x=0$ 为 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的振荡间断点.

§1.9 闭区间上连续函数的性质

主要内容:

一、最大值最小值定理

二、零点定理

三、介值定理

四、应用

一、最大值与最小值定理

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义 $x_0 \in I$ 若对于任意的 $x \in I$	$\boxed{f(x) \le f(x_0)}$	则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 的最大值.	记作 $\max\limits_{x \in I} f(x) = f(x_0)$
	$\boxed{f(x) \ge f(x_0)}$.	则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 的最小值.	记作 $\min\limits_{x \in I} f(x) = f(x_0)$

1. $\max\limits_{x \in [0,2\pi]} (\sin x + 1) = 2,\ \min\limits_{x \in [0,2\pi]} (\sin x + 1) = 0$

2. $\max\limits_{x \in (-\infty,+\infty)} \operatorname{sgn} x = 1,\ \min\limits_{x \in (-\infty,+\infty)} \operatorname{sgn} x = -1$

3. $\max\limits_{x \in (0,+\infty)} \operatorname{sgn} x = \min\limits_{x \in (0,+\infty)} \operatorname{sgn} x = 1$

4. $f(x) = x$ 在 (a,b) 内没有最大值和最小值.

一、最大值与最小值定理

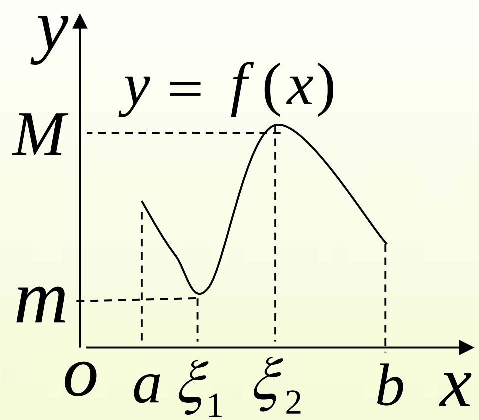
定理 1（最大值最小值定理）：

闭区间上的连续函数在该区间上一定有最大值和最小值. 即

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则

（1）至少有一点 $\xi_1 \in [a,b]$ 使得 $f(\xi_1) = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$

（2）至少有一点 $\xi_2 \in [a,b]$ 使得 $f(\xi_2) = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$



定理 2（有界定理）

闭区间上的连续函数在该区间上一定有界

二、零点定理

若 $f(x_0)=0$，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的零点

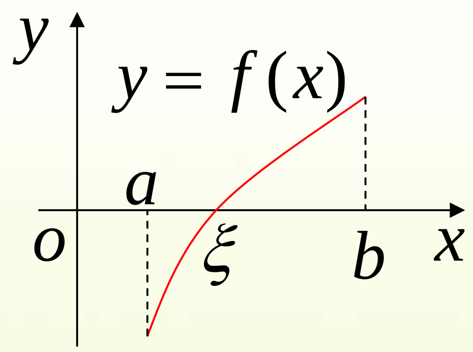
定理 3（零点定理）：

（1）若函数 $f(x)$ 在闭区间上 $[a,b]$ 连续

（2）$\boxed{f(a)f(b)<0}$

则 $f(x)$ 在开区间内 $\boxed{(a,b)}$ 至少有一个零点.

即至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\boxed{f(\xi)=0}$



零点定理的几何意义：

如果连续函数弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧，那么这段函数弧与 x 轴至少有一个交点.

三、介值定理

定理 4（介值定理）：若

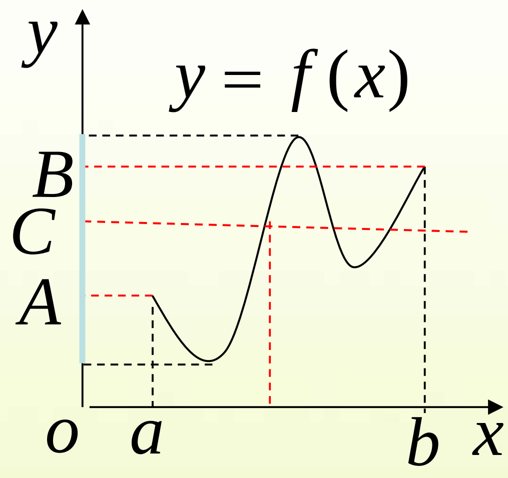
（1） 函数 $f(x)$ 在闭区间上 $[a,b]$ 连续

（2） $f(a)=A, f(b)=B$ 且 $A\neq B$，

则对介于 A 与 B 之间的任何实数 C 在区间

(a,b) 内至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,， 使得

$$\boxed{f(\xi)=C, (a<\xi<b)}$$



推论 1：闭区间上的连续函数必取得介于最大值与最小值之间的任何值

介值定理分析

$$f(\xi)=C,(a<\xi<b)$$

$$f(\xi)-C=0$$

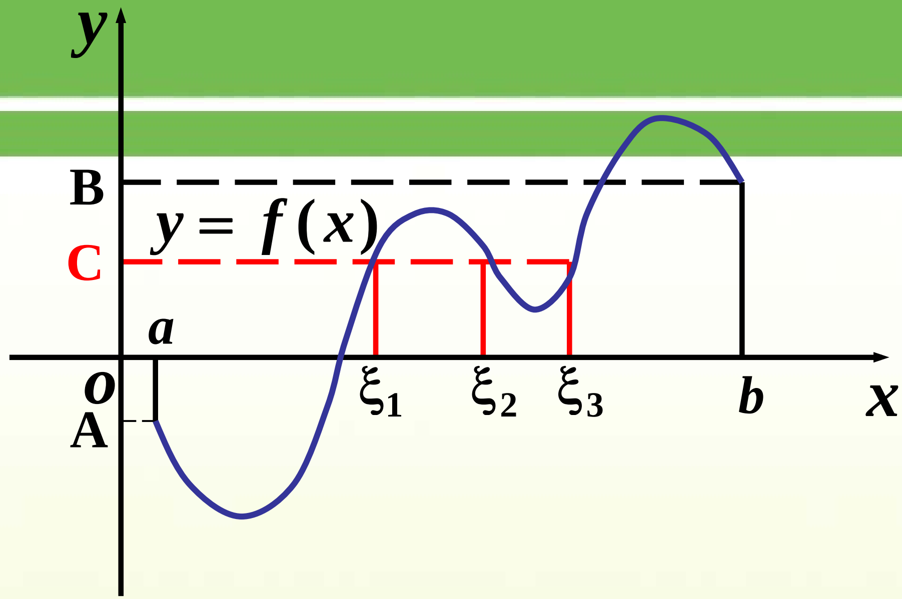
设$\varphi(x)=f(x)-C$

即 $\varphi(\xi)=0$

由零点定理可知只要证明

（1） $\varphi(x)$在$[a,b]$上连续

（2） $\varphi(a)\varphi(b)<0$



介值定理的证明

已知（1）函数 $f(x)$ 在闭区间上 $[a,b]$ 连续（2） $f(a)=A, f(b)=B$ 且 $A\neq B$ （3） C 在 A 与 B 之间

设 $\varphi(x)=f(x)-C$

$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$\varphi(a)\varphi(b)=(A-C)(B-C)<0$

由零点定理

$\exists\,\xi\in(a,b)$, 使 $\varphi(\xi)=0$

$f(\xi)-C=0$

$f(\xi)=C.$

四、应用

例 1：证明 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根.

证明　设 $f(x)=x^3-4x^2+1$

（1）显然 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续.

（2） $f(0)=1, f(1)=-2,$ 所以 $f(0)f(1)<0,$

（3）因此由零点定理知至少有一 $\xi\in(0,1),$ 使得 $f(\xi)=0$，

即 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根.

四、应用

例 2：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<x_3<b$. 则在 $[x_1,x_3]$ 上必有一 ξ 使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$

证明：（1）由已知条件可得 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_3]$ 上连续. 因此必有最大值和和最小值. 设 $\max\limits_{x\in[x_1,x_2]} f(x)=M$，$\min\limits_{x\in[x_1,x_2]} f(x)=m$

（2）因此 $m\le f(x_i)\le M,(i=1,2,3)$，故

$$m\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}\le M$$

由介值定理的推论知，在 $[x_1,x_3]$ 上必有一 ξ 使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$