第四章　练习题

一、判断题

1．设a_1,a_2线性相关，b_1,b_2也线性相关，则一定线性相关.　　　　　　　　　　（）

2．非零向量组的最大无关组存在且唯一.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（）

3．对任意参数m_1,m_2,m_3,向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\m_1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\m_2\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\m_3\\2\\3\end{pmatrix}$总是线性无关.（）

4.若n元齐次线性方程组$Ax=0$只有零解，则非齐次线性方程组$Ax=b$有惟一解.（）

5. 若n元非齐次线性方程组$Ax=b$有两个不同解，则$Ax=0$有无限多解.　　　（）

6.向量组与它的最大无关组等价。（ ）

7.m 个 n 维向量的向量组，当 m<n 时，向量组线性相关。（）

8. 若向量组B能由向量组A线性表示，则$R(B)=R(A,B)$.（）

二、选择题

9．　设向量组a_1，a_2，a_3线性无关，则下列向量组线性无关的是（ ）

A. a_1+a_2，a_2+a_3，a_3-a_1 ；　B. a_1+a_2，a_2+a_3，$a_1+2a_2+a_3$；

C. a_1+2a_2，$2a_2+3a_3$，$3a_3+a_1$；　D. a_1+a_2, $2a_1-3a_2-5a_3$, $3a_1+5a_2+2a_3$.

10．已知向量组 A：α_1，α_2，α_3，α_4线性无关，则与 A 等价的向量组是（　）

A. $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$；B. $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$；

C. $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$；D. $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4+\alpha_1$.

11．设 A 为 n 阶矩阵，且$R(A)=n-1$，α_1，α_2是 $A\boldsymbol{x}=0$ 的两个不同的解，k 为任意常数，则 $A\boldsymbol{x}=0$ 的通解为（ C）

A. $k\alpha_1$ ；　B. $k\alpha_2$；　C. $k(\alpha_1-\alpha_2)$；　D. $k(\alpha_1+\alpha_2)$.

12．设向量组 A：α_1，α_2，⋯，α_s，B：α_1，α_2，⋯，α_s ⋯ α_{s+r}，则必有（）

A. A 相关$\Rightarrow B$ 相关；B. A 无关$\Rightarrow B$ 无关；　C. B 相关$\Rightarrow A$ 相关；D. B 相关$\Rightarrow A$ 无关.

13. 设A是$m\times n$矩阵，且秩$R(A)=m<n$，则（）

A. A的任意m个列向量必定线性无关

B. A的任意一个m阶子式不等于零

C. 齐次线性方程组$Ax=0$只有零解.

D. 非齐次线性方程组$Ax=b$必有无穷多解

14．向量组$a_1,a_2,\cdots,a_m$（$m\geq 2$）线性相关，则（　）.

A．$a_1,a_2,\cdots,a_m$中每一个向量均可由其余向量线性表示；

B．$a_1,a_2,\cdots,a_m$中每一个向量均不可由其余向量线性表示；

C． $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示；

D． $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中仅有一个向量可由其余向量线性表示.

15. 若 A 是 n 阶可逆矩阵，下列说法中错误的是（ ）.

A． $|A|\neq 0$； B．A 的列向量组线性相关；

C． $R(A)=n$； D． A 与单位阵 E 行等价.

17． 设 $Ax=b$ 为非齐次线性方程组， $Ax=0$ 为其对应的齐次线性方程组，下列说法中错误的是（ ）.

A．若 $x=\xi_1$， $x=\xi_2$ 为 $Ax=0$ 的解，则 $x=\xi_1+\xi_2$ 也是 $Ax=0$ 的解；

B．若 $x=\xi_1$ 为 $Ax=0$ 的解， k 为实数，则 $x=k\xi_1$ 也是 $Ax=0$ 的解；

C．若 $x=\eta_1$ 及 $x=\eta_2$ 都是 $Ax=b$ 的解，则 $x=\eta_1+\eta_2$ 也是 $Ax=b$ 的解；

D．若 $x=\eta$ 为 $Ax=b$ 的解， $x=\xi$ 为 $Ax=0$ 的解，则 $x=\xi+\eta$ 是 $Ax=b$ 的解.

18. 设 A 是 4×5 矩阵， A 的秩等于 3，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中所含解向量的个数为（ ）

A. 4 B.5 C.2 D.3

19. 向量组 A： a_1， $a_2\cdots a_m$（$m\geqslant 3$）线性无关的充要条件是（ ）

A. 存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_m$， 使 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m\neq 0$；

B． A 组中任意两个向量都线性无关；

C． A 组中存在一个向量，它不能用其余向量线性表示；

D． A 组中任意一个向量，都不能用其余向量线性表示.

20. 已知 a_1, a_2， a_3 是四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量，且 $R(A)=3$， $a_1=(1,2,3,4)^T$， $a_2+a_3=(0,1,2,3)^T$， c 是任意的常数，则 $Ax=b$ 的通解是 $x=$（ ）

A. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

三、填空题

21. 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是它的 3 个解向量，其中 $\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$， $\alpha_1+\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\4\\6\\8\end{bmatrix}$， 则该方程组的通解是 ______

22． 设矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$，其中 a_2,a_3,a_4 线性无关， $a_1=2a_2-a_3$，向量 $b=a_1+a_2+a_3+a_4$，则方程 $Ax=b$ 的通解为： ______

23.若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,t,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$线性相关,则$t$=______.

四、解答题

24.求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\4\end{pmatrix}$的秩和一个最大线性无关组.

答案：秩为 3，最大无关组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$或$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$或$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$或$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

25. 设$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，且向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，证明向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.

26. 设向量组：$\alpha_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(3,4,-2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(2,4,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，试求此向量组秩和一个最大无关组，并将其余向量用最大无关组线性表示.

答案：此向量组的秩为 2，α_1,α_2是此向量组的一个最大无关组，

$\alpha_3=-4\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_4=-3\alpha_1+\alpha_2$.

27. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，问: 常数$l,m$满足什么条件时, 向量组$l\alpha_2-\alpha_1$，$m\alpha_3-\alpha_2$，$\alpha_1-\alpha_3$也线性无关.

答案：当$lm\neq1$时，向量组$l\alpha_2-\alpha_1$，$m\alpha_3-\alpha_2$，$\alpha_1-\alpha_3$也线性无关.

28.已知$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$是三元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}$=$\boldsymbol{b}$ 的解，且 $R(\boldsymbol{A})$=1 及

$$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

求方程组 $\boldsymbol{Ax}$=$\boldsymbol{b}$ 的通解.

答案：因为$\alpha_1=\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\eta_1-\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，$\gamma=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}$=$\boldsymbol{b}$ 的解，所以方程组 $\boldsymbol{Ax}$=$\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}(c_1,c_2\in\mathbb{R})$$

29．求齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=0\\-3x_1+x_2-4x_3+2x_4=0\\-x_1-9x_2-4x_4=0\end{cases}$的基础解系.

答案：$\eta_1=\begin{pmatrix}-9\\1\\7\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-8\\0\\7\\2\end{pmatrix}$.

30.设$\eta_1,\cdots,\eta_s$是非齐次线性方程组$Ax=b$的s个解，$k_1,\cdots k_s$是实数，满足$k_1+\cdots+k_s=1$．证明：　$x=k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s$也是它的解．

答案：由题设知，$A\eta_i=b\quad(i=1,2,\cdots,s)$，又$k_1+\cdots+k_s=1$，于是

$$Ax=A(k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s)=k_1A\eta_1+\cdots+k_sA\eta_s=k_1b+\cdots+k_sb=(k_1+\cdots+k_s)b=b$$

故$x=k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s$是非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解．

31.设有向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\2\\10\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$，及向量$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\\boldsymbol{b}\\-1\end{pmatrix}$，问$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$为何值时：

（1）向量$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组 A 线性表示；

（2）向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组 A 唯一线性表示；

（3）向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组 A 线性表示，且表示式不唯一，并求一般表达式。

32.已知$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，证明

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1$能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。

33.已知向量组

$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$，证明向量组 A 与向量组 B 等价。