微分方程（数二）考研真题

一、选择题（将最佳答案的序号填写在括号内）

1、（98年，3分）已知函数$y=y(x)$在任意点x处的增量$\Delta y=\dfrac{y}{1+x^2}\Delta x+\alpha$，且当$\Delta x\to 0$时，$\alpha$是$\Delta x$的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则$y(1)$等于（　　）

（A）2π　（B）π　（C）$e^{\frac{\pi}{4}}$　（D）$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

2、（00年，3分）具有特解$y_1=e^{-x},y_2=2xe^{-x},y_3=3e^x$的三阶常系数齐次线性微分方程是（　　）

(A) $y'''-y''-y'+y=0$.　(B) $y'''+y''-y'-y=0$.

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$.　(D) $y'''-2y''-y'+2y=0$

3、（03年，4分）已知$y=\dfrac{x}{\ln x}$是微分方程$y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$的解，则$\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$的表达式为（　　）

（A）$-\dfrac{y^2}{x^2}$　（B）$\dfrac{y^2}{x^2}$　（C）$-\dfrac{x^2}{y^2}$　（D）$\dfrac{x^2}{y^2}$

4、（04年，4分）微分方程$y''+y=x^2+1+\sin x$的特解形式可设为（　　）

（A）$y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$

（B）$y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$

（C）$y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$

（D）$y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$

5、（06年，4分）函数$y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+xe^x$满足的一个微分方程是（　　）

（A）$y''-y'-2y=3xe^x$　（B）$y''-y'-2y=3e^x$

（C）$y''+y'-2y=3xe^x$　（D）$y''+y'-2y=3e^x$

6、（08年，4分）在下列微分方程中，以$y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$为任意常数）为通解的是（　　）

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$

7、（10年，4分）设y_1,y_2是一阶线性非齐次微分方程$y'+p(x)y=q(x)$的两个特解，若常数λ,μ使$\lambda y_1+\mu y_2$是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$是该方程对应的齐次方程的解，则（　　）

（A）$\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$　（B）$\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$

（C）$\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$　（D）$\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$

8、（11年，4分）微分方程$y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}\ (\lambda>0)$的特解形式为（　　）

（A）$a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$　（B）$ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$

（C）$x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$　（D）$x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$

二、填空题

1、（99，3分）微分方程$y''-4y=e^{2x}$的通解为__________

2、（01，3分）过点$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$且满足关系式$y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$的曲线方程______

3、（02，3分）微分方程$yy''+y'^2=0$满足初始条件$y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$的特解为________

4、（04，4分）微分方程$(y+x^3)dx-2xdy=0$满足$y|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$的特解为__________

5、（05，4分）微分方程$xy'+2y=x\ln x$满足$y(1)=-\dfrac{1}{9}$的特解为__________.

6、（06，4分）微分方程$y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$的通解是_________

7、（07，4 分）二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解 $y=$______

8、（08，4 分）微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解为 $y=$____________

9、（10，4 分）3 阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为 $y=$______

10、（11，4 分）微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________.

三、计算题

1、（95，8 分）设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

2、（97，5 分）求微分方程 $(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$ 的通解。

3、(97，8 分)设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$M(r,\theta)$ 为 L 上任一点，$M_0(2,0)$ 为 L 上一定点. 若极径 OM_0，OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0，M 两点间弧长值的一半，求曲线 L 的方程.

4、（97， 5 分）已知 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求此微分方程

5、（98，5 分）利用代换 $y=\dfrac{u}{\cos x}$ 将方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=e^x$ 化简，并求出原方程的通解。

6、（98, 6 分）从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉速度 y（从海平面算起）与下沉速度 v 之间的函数关系，设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力与浮力的作用。设仪器的质量为 m，体积为 B，海水比重为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 k（$k>0.$）. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=f(v)$.

7、（98，8 分）设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程，并求函数 $y=y(x)$ 的极值.

8、（99，7 分）求初值问题 $\begin{cases}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0 \ \ (x>0)\\ y|_{x=1}=0\end{cases}$ 的解

9、（99, 8 分）设函数 $y(x)(x\ge 0)$ 二阶可导，且 $y'(x)>0, y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

10（00，7 分）某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $V/6$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $V/6$，流出湖泊的水量为 $V/3$。已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定标准，为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含污水 A 的浓度不超过 m_0/V。问至多需经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内?(注：设湖水中 A 的浓度是均匀的.）

11、（00，8 分）函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$，且满足

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0,$$

（1）求导数 $f'(x)$；（2）证明：当 $x\ge 0$ 时，成立不等式 $e^{-x}\le f(x)\le 1$.

12、（01,7 分）设函数 $f(x),g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x), g'(x)=2e^x-f(x)$，且 $f(0)=0, g(0)=2$，求 $\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$

13、（01, 7 分）一个半球体状得雪堆，其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比，比

例常数$k>0$.假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为r_0的雪堆在开始融化的3小时内，融化了其体积的$\frac{7}{8}$，问雪堆全部融化需要多少小时？

14、（01，9分）设L是一条平面曲线，其上任意一点$P(x,y)(x>0)$到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在y轴上的截距，且L经过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$，

（1）试求曲线L的方程

（2）求L位于第一象限部分的一条切线，使该切线与L以及两坐标轴所围图形的面积最小

15、(02,7分)求微分方程$xdy+(x-2y)dx=0$的一个解$y=y(x)$，使得由曲线$y=y(x)$与直线$x=1,x=2$以及x轴所围成的平面图形绕x轴旋转一周的旋转体的体积最小.

16、(03, 12分)设位于第一象限的曲线$y=f(x)$过点$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$，其上任一点$P(x,y)$处的法线与$y$轴的交点为$Q$，且线段$PQ$被$x$轴平分

（1）求曲线$y=f(x)$的方程

（2）已知曲线$y=\sin x$在$[0,\pi]$上的弧长为l，试用l表示曲线$y=f(x)$的弧长s

17、(03, 10分)有一平底容器，其内侧壁是由曲线$x=\varphi(y)\ (y\ge 0)$绕y轴旋转而成的旋转曲面，容器的底面圆的半径为$2m$，根据设计要求，当以$3m^3/\min$的速率向容器内注入液体时，液面的面积将以$\pi m^2/\min$的速率均匀扩大（假设注入液体前，容器内无液体）.

(1)根据t时刻液面的面积，写出t与$\varphi(y)$之间的关系式

(2)求曲线$x=\varphi(y)$的方程

（注：m表示长度单位米，min表示时间单位分）

18、(04, 11分)某飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下。现有一质量$9000kg$的飞机，着陆时的水平速度为$700km/h$，经测试，减速伞打开后，飞机所受的阻力与飞机的速度成正比（比例系数$k=6.0\times10^6$）。问从着陆点算起，飞机滑行的最大距离大概是多少　（注:kg表示千克，km/h表示千米/小时）

19、（05，12分）用变量代换$x=\cos t(0<t<\pi)$化简微分方程

$(1-x^2)y''-xy'+y=0$,并求其满足$y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$的特解。

20、（07，10分）求微分方程$y''(x+y'^2)=y'$满足初始条件$y(1)=y'(1)=1$的特解

21、(08, 11分)设$f(x)$是区间$[0,+\infty)$上具有连续导数的单调增加函数，且$f(0)=1$，对任意的$t\in[0,+\infty)$，直线$x=0,x=t$，曲线$y=f(x)$以及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周生成一旋转体，若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的2倍，求函数$f(x)$的表达式。

22、(08, 10分)设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=x(t)\\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du\end{cases}$确定，其中$x(t)$是初值问题$\begin{cases}\frac{dx}{dt}-2te^{-x}=0\\ x|_{t=0}=0\end{cases}$的解，求$\frac{d^2y}{dx^2}$

23、(09, 10分)设非负函数$y=y(x)\ (x\ge0)$满足微分方程$xy''-y'+2=0$，当曲线$y=y(x)$过原点时，其与直线$x=1,y=0$围成的平面区域D的面积为2，求D绕y轴旋转所得旋转体的体积

24、(09, 12分)设$y=y(x)$是区间$(-\pi,\pi)$内过点$\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$的光滑曲线，当$-\pi<x<0$时，曲线上任一点处的法线都过原点；当$0\le x<\pi$时，函数$y(x)$满足

$y''+y+x=0$，求函数 $y(x)$ 的表达式

25、（10, 11 分）设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\phi(t) \end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定，其中 $\phi(t)$ 具有 2 阶导数，且 $\phi(1)=\dfrac{5}{2}$，$\phi'(1)=6$，已知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，求 $\phi(t)$

26、（11, 10 分）设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l: y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点，记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 处切线的倾角，若 $\dfrac{d\alpha}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$，求 $y(x)$ 的表达式