

《高等数学》第九章——重积分

练习题 (A) ——王阳

一、单项选择题 (将正确答案的序号填写在括号内)

- 设在闭区域 D 上, 连续函数 $f(x, y) \geq 0$, 若以 D 为底以 $z = f(x, y)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积为 V , 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 与 V 的关系式是 ()
 (A) $\iint_D f(x, y) d\sigma = V$ (B) $\iint_D f(x, y) d\sigma < V$
 (C) $\iint_D f(x, y) d\sigma > V$ (D) $\iint_D f(x, y) d\sigma \neq V$
- 下列四个条件中只有一个无法保证二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 存在, 它是 ()
 (A) $f(x, y)$ 在 D 上连续 (B) $f(x, y)$ 在 D 上有界
 (C) $f(x, y)$ 在 D 上可微 (D) $f(x, y)$ 在 D 上偏导数存在且连续
- 若 $D: 0 < r < |x| + |y| \leq 1$ 则二重积分 $I = \iint_D \ln(x+y) d\sigma$ ()
 (A) 大于零 (B) 小于零 (C) 等于零 (D) 可能大于零也可能小于零
- 设闭区域 $D: (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2$, $I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma$, $I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 则 ()
 (A) $I_1 > I_2$ (B) $I_1 < I_2$ (C) $I_1 \geq I_2$ (D) $I_1 = I_2$
- 若 D 是三角形闭区域, 三顶点各为 $(1,0), (1,1), (2,0)$. $I_1 = \iint_D \ln(x+y) d\sigma$
 $I_2 = \iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$, 则 ()
 (A) $I_1 > I_2$ (B) $I_1 < I_2$ (C) $I_1 = -I_2$ (D) $I_1 = I_2$

- 如果函数 $f(x, y)$ 在有界区域闭 D 上连续, σ 为 D 的面积. 那么在上 D 上至少存在一个点 (ξ, η) 使得 ()

$$(A) \iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma \quad (B) \iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)$$

$$(C) \iint_D f(x, y) d\sigma = -f(\xi, \eta) \sigma \quad (D) \iint_D f(x, y) d\sigma = \sigma$$

- 下列说法错误的是 ()

- (A) 如果 m, M 是函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上最小值和最大值, 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma$$

- (B) 若 $D: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$, 则 $0 \leq \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma \leq \pi^2$

- (C) 若 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 则 $0 \leq \iint_D xy(x+y) d\sigma \leq 1$

- (D) 若 $D: x^2 + y^2 \leq 4$, 则 $36\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq 100\pi$

- 设 $D_1: |x| \leq 1, |y| \leq 1$, $D_2: x=0, y=0, x+y=2$ 所围成的闭区域; $D_3: y=2x^2$ 与 $y=1+x^2$ 所围成的闭区域; $D_4: y=x^2, y=\sqrt{x}$ 所围成的闭区域. 则 ()

- (A) D_1, D_2, D_3, D_4 都既是 X—型又是 Y—型

- (B) D_1, D_2, D_4 既是 X—型又是 Y—型, D_3 是 X—型但不是 Y—型

- (C) D_1, D_2, D_3, D_4 都是 X—型, 但不是 Y—型

- (D) D_1, D_2, D_3, D_4 都是 Y—型, 但不是 X—型

- 设 $D: y=x, y=2, y=2x$ 所围成的闭区域, 则 ()

- (A) D 作为 X—型区域, 可以用不等式表示为 $x \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 2$

- (B) D 作为 X—型区域, 可以用不等式表示为 $x \leq y \leq 2x, 0 \leq x \leq 2$

(C) D 作为 Y-型区域, 可以用不等式表示为 $\frac{y}{2} \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 2$

(D) D 作为 Y-型区域, 可以用不等式表示为 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$

10. 设 $D: x=0, y=0, x+y=2$ 所围成的闭区域, 则 ()

(A) $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$

(B) $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy > \int_0^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$

(C) $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy < \int_0^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$

(D) $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy \neq \int_0^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$

11. 下列式子成立的是 (A)

(A) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{2+y} f(x, y) dx$

(B) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy > \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{2+y} f(x, y) dx$

(C) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy < \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{2+y} f(x, y) dx$

(D) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \neq \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{2+y} f(x, y) dx$

12. 设 $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$, 则 ()

(A) $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$

(B) $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$

(C) $\iint_D f(x, y) d\sigma = \rho \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho d\varphi$

(D) $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \varphi d\rho d\varphi$

13. 设 $D: a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 (0 < a < b)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma =$ (D)

(A) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$

(B) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho$

(C) $\int_0^\pi d\varphi \int_a^b f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$

(D) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$

14. 设 $D: x^2 + y^2 \leq 2x$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma =$ ()

(A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$

(B) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$

(D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$

15. $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2) dy =$ ()

(A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \rho^3 d\rho$

(B) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \rho^2 d\rho$

(C) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \rho^2 \cdot \varphi d\rho$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \rho^3 d\rho$

16. 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 则区域 D 的面积, 为

(A) $A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$

(B) $A = \oint_L x dy - y dx$

(C) $A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L x dy$

(D) $A = \oint_L y dx$

二、计算题

1. $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$ 其中 D 是矩形闭区域: $|x| \leq 1, |y| \leq 1$.
2. $\iint_D (3x + 2y) d\sigma$ 其中 D 是由 $x = 0, y = 0, x + y = 2$ 所围成的闭区域.
3. $\iint_D (1 + x) \sin y d\sigma$ 其中 D 是顶点为 $(0, 0), (1, 0), (1, 2), (0, 1)$ 的梯形闭区域.
4. $\iint_D x \sqrt{y} d\sigma$ 其中 D 是由 $y = x^2, y = \sqrt{x}$ 所围成的闭区域.
5. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ 其中 D 是环形闭区域 $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 (0 < a < b)$.
6. $\iint_D e^{x^2 + y^2} d\sigma$ 其中 D 是圆形闭区域 $x^2 + y^2 \leq 4$.
7. 计算以 xoy 面上的闭区域 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 为底, 而以曲面 $z = x^2 + y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

《高等数学》第九章——重积分

自测题——王阳

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、选择题（将正确答案的序号填写在括号内，每小题 4 共 48 分）

- 下列四个条件中只有一个无法保证二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 存在，它是 ()
 - $f(x,y)$ 在 D 上连续
 - $f(x,y)$ 在 D 上的偏导数存在
 - $f(x,y)$ 在 D 上可微
 - $f(x,y)$ 在 D 上的偏导数存在且连续
- 若 $D: x^2 + y^2 \leq 4$ ，则 ()
 - $9\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma \leq 25\pi$
 - $9\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma \leq 100\pi$
 - $\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma \leq 20\pi$
 - $9\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)d\sigma \leq 20\pi$
- 圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2, x^2 + z^2 = R^2$ 所围立体的体积 $V =$ ()
 - $\iint_D (\sqrt{R^2 - x^2})d\sigma$ D 由 $x^2 + y^2 = R^2$ 所围成的圆域的位于第一象限的部分
 - $\iint_D (\sqrt{R^2 - x^2})d\sigma$ D 由 $x^2 + y^2 = R^2$ 所围成的圆域
 - $\iint_D (\sqrt{R^2 - y^2})d\sigma$ D 由 $x^2 + y^2 = R^2$ 所围成的圆域
 - $\iint_D (\sqrt{R^2 - z^2})d\sigma$ D 由 $x^2 + y^2 = R^2$ 所围成的圆域的位于第一象限的部分

- 设 $D: (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2$ ，则 $I_1 = \iint_D (x+y)^3 dx dy$ 与

$$I_2 = \iint_D (x+y)^2 dx dy \text{ 的大小关系为 } ()$$

- $I_1 = I_2$
- $I_1 > I_2$
- $I_1 < I_2$
- 无法判断

- $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy =$ ()

$$(A) \int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x,y) dx$$

$$(B) \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x,y) dx$$

$$(C) \int_0^1 dy \int_{x^2}^{x+2} f(x,y) dy$$

$$(D) \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x,y) dx$$

- 设 D 为 $x^2 + y^2 \leq a^2$ ， $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \pi$ ，则 $a =$ ()

$$(A) 1$$

$$(B) \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

$$(C) \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

$$(D) \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

- 设 D 是 $bx + ay = ab$ 与 x 轴及 y 轴围的闭区域，则平面

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ 被三个坐标平面所截出的部分的面积为 } ()$$

$$(A) \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} \iint_D dx dy$$

$$(B) \iint_D dx dy$$

$$(C) \sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{a^2}{b^2}} \iint_D dz dy$$

$$(D) \sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2}} \iint_D dx dz$$

8 设 $f(x, y)$ 在 $D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$ ()

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 d\rho$ (B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$

(C) $\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$ (D) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$

四、 计算下列二重积分 (共 26 分)

1. 求 $\int_0^{\pi} dx \int_x^{\pi} \frac{\sin^2 y}{y} dy$. (10 分)

2.

五、 证明题 (共 18 分)