

高等数学（下册）

同济六版

南阳师范学院——数学与统计学院

李婧 制

第一节 向量及其线性运算

一、向量概念

二、向量的线性运算

三、空间直角坐标系

四、利用坐标作向量的线性运算

五、向量的模、方向角、投影

一、向量概念

1、概念

(1) **向量**: 既有大小又有方向的量。

如位移、速度、加速度、力、力矩等。

(2) **向量表示**: 用一条有向线段表示. $\vec{a}$

(3) 向量的模向量的大小. $|\vec{a}|$

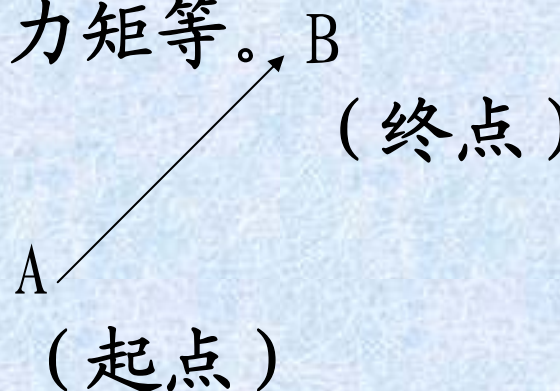
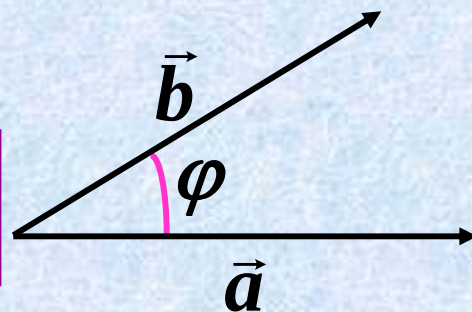
(4) **单位向量**: 模长为1的向量。

(5) 零向量模长为0 的向量, 记做 $\vec{0}$ (方向是任意的)

(6) **自由向量**: 与起点无关的向量

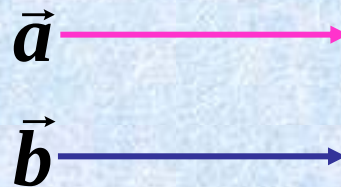
(7) 两向量的夹角:

$$\varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$



2、两非零向量的关系

(1)相等:大小相等且方向相同的向量.



记 $\vec{a} = \vec{b}$ (平行移动后能完全重合)

(2)平行:方向相同或相反的两个非零向量. 记 $\vec{a} // \vec{b}$
两向量平行也称为共线.

(3)垂直:夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 的两个非零向量. 记 $\vec{a} \perp \vec{b}$

注意: 由于零向量的方向可以看成任意的, 故零向量与任何向量都平行或垂直.

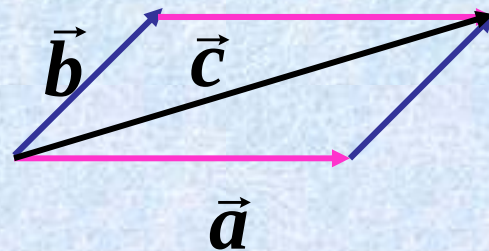
(4)共面:把若干个向量的起点放到一起, 若它们的终点和公共起点在同一平面上, 则称这些向量共面.

二、向量的线性运算

1、向量的加减法

(1) 加法: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

(平行四边形法则)

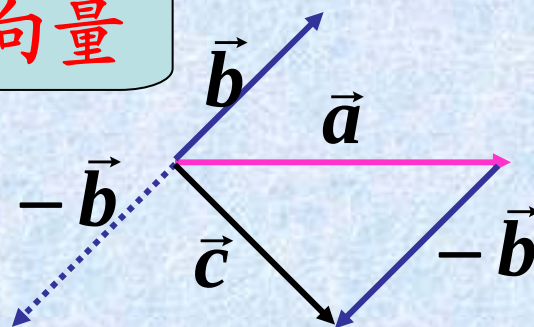
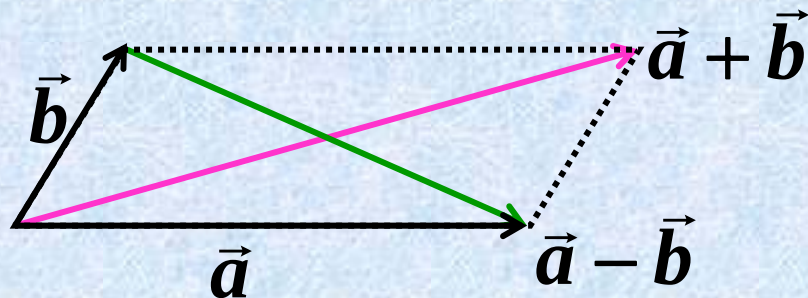


(平行四边形法则有时也称为三角形法则)

(2) 减法:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

负向量



$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} + (-\vec{b}) \\ &= \vec{a} - \vec{b}\end{aligned}$$

2、向量与数的乘法

(1) 定义: 向量 $\vec{a}$ 与实数 λ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 是一个新向量.

i) $\lambda > 0$, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向, $|\lambda\vec{a}| = \lambda |\vec{a}|$

ii) $\lambda = 0$, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$

iii) $\lambda < 0$, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向, $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

(2) 单位向量的表示

向量的单位化

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则有单位向量 $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, 因此 $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}_a$.

定理1. 设 $\vec{a}$ 为非零向量, 则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ , 使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

证: (“必要性”) 设 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 取 $\lambda = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, 则

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

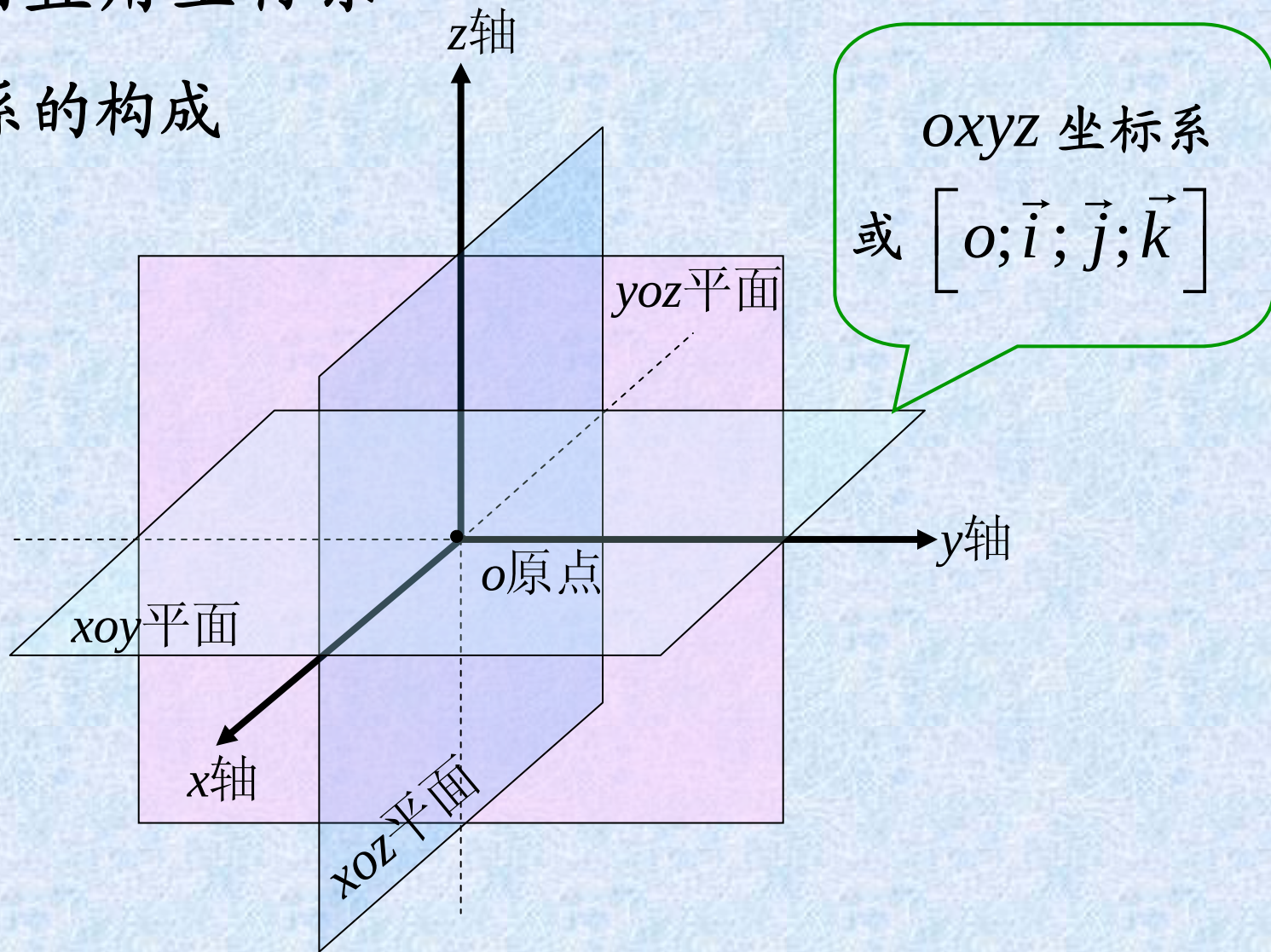
故 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

(“唯一性”) 设又有 $\vec{b} = \mu\vec{a}$, 则 $(\lambda - \mu)\vec{a} = \vec{0}$

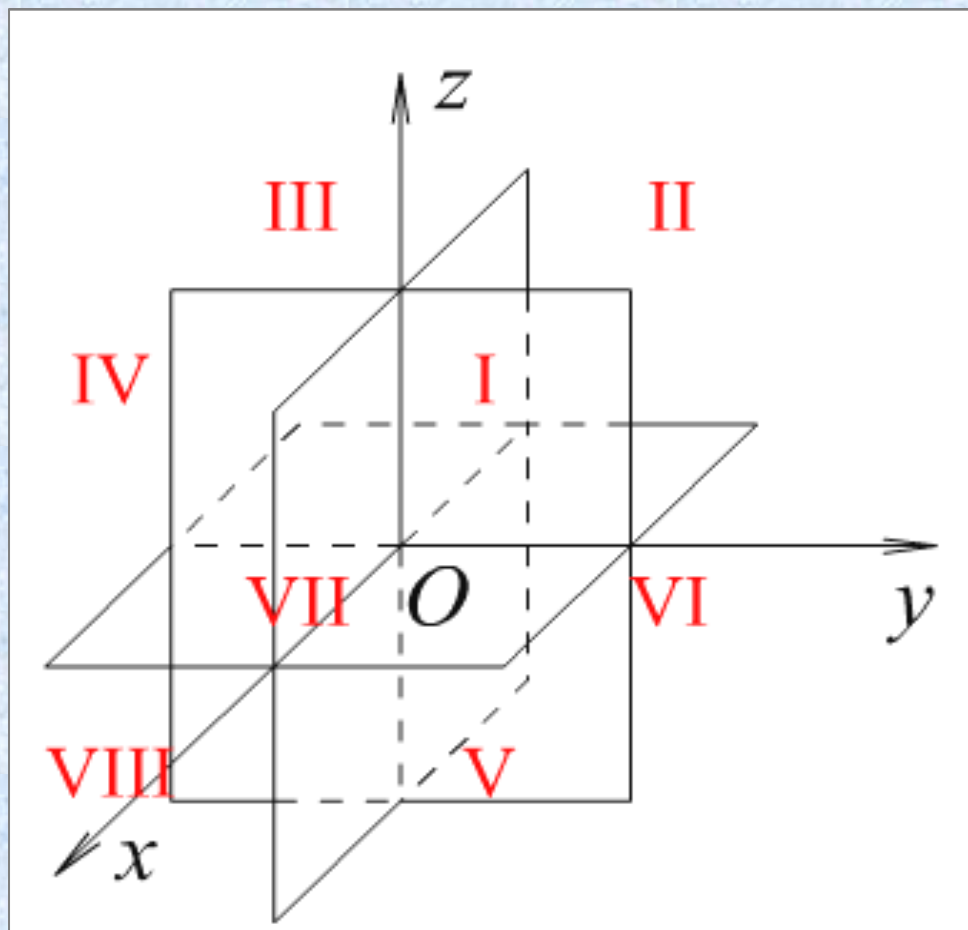
而 $|\vec{a}| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$.

三、空间直角坐标系

1、坐标系的构成



过空间一定点 O ，作三条相互垂直的数轴



三个坐标平面将空间分成八部分，每一部分叫做一个卦限。

2、向量的坐标表示

在空间直角坐标系下,任意向量 $\vec{r}$ 可用向径 $\overrightarrow{OM}$ 表示.

以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别表示 x, y, z 轴上的单位向量, 设点 M 的坐标为 $M(x, y, z)$, 则

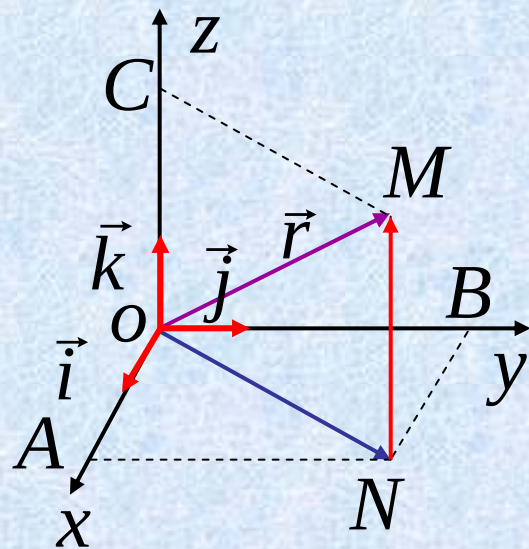
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\downarrow \overrightarrow{OA} = x\vec{i}, \quad \overrightarrow{OB} = y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OC} = z\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$

此式称为向量 $\vec{r}$ 的**坐标分解式**,

$x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.



四、利用坐标作向量的线性运算

1、向量的加减法与数乘

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k};$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k};$$

(1)加法 $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$
 $= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k};$

(2)减法 $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$
 $= (a_x - b_x) \vec{i} + (a_y - b_y) \vec{j} + (a_z - b_z) \vec{k};$

(3)数乘 $\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) = (\lambda a_x) \vec{i} + (\lambda a_y) \vec{j} + (\lambda a_z) \vec{k}.$

2、平行向量的坐标表示式

$$\boxed{\vec{a} // \vec{b}} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow (b_x, b_y, b_z) = \lambda (a_x, a_y, a_z) \Leftrightarrow \boxed{\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}}$$

← (等价) →

五、向量的模、方向角、投影

1、向量的模与两点间的距离公式:

设 $\vec{r} = (x, y, z)$, 作 $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, 则有

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

由勾股定理得

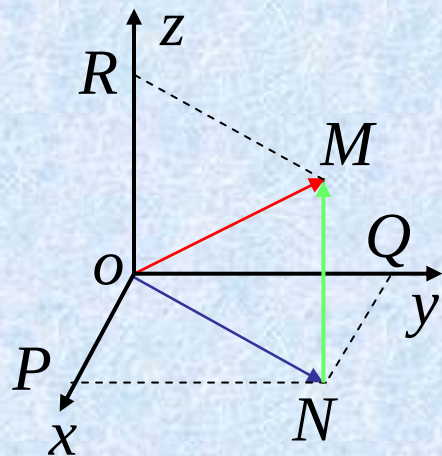
$$|\vec{r}| = |OM| = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OR}|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

对两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 与 $B(x_2, y_2, z_2)$, 因

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

得两点间的距离公式:

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



练习 已知点 $A(5,3,1)$ 和 $B(1,0,5)$, 求与 $\overrightarrow{AB}$ 共线的单位向量 $\vec{e}$.

解 因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1,0,5) - (5,3,1) = (-4,-3,4)$.

所以 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{41}.$

于是 $\vec{e} = \pm \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{41}}(-4,-3,4).$

2. 方向角与方向余弦

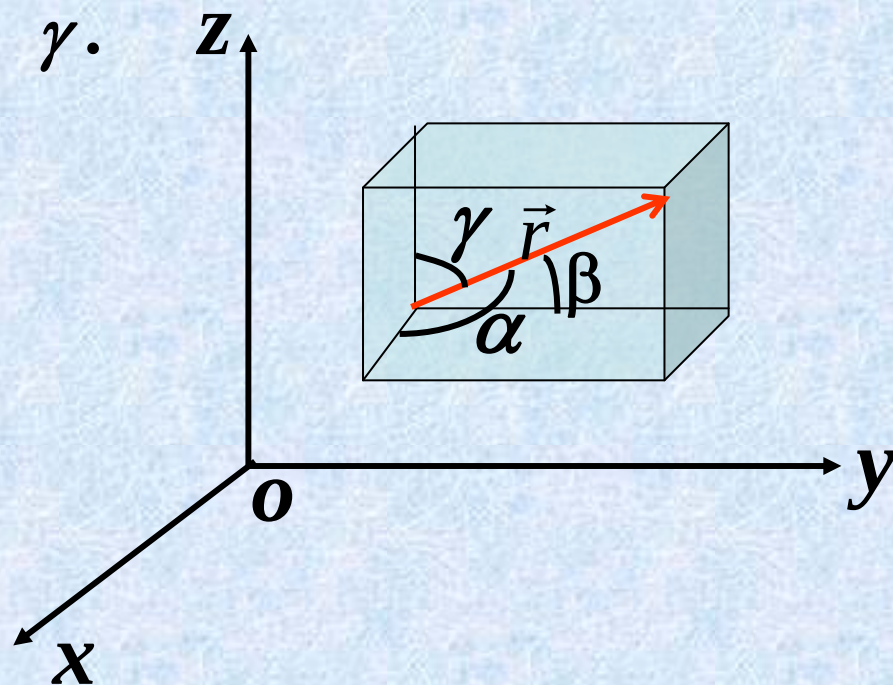
非零向量 $\vec{r}$ 与三条坐标轴的夹角称为向量 $\vec{r}$ 的 **方向角**，分别记做 α 、 β 、 γ 。

显然

$$0 \leq \alpha \leq \pi,$$

$$0 \leq \beta \leq \pi,$$

$$0 \leq \gamma \leq \pi.$$



(3)方向余弦

非零向量 $\vec{r}$ 的三个方向角的余弦 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ ，称为向量 $\vec{r}$ 的**方向余弦**。

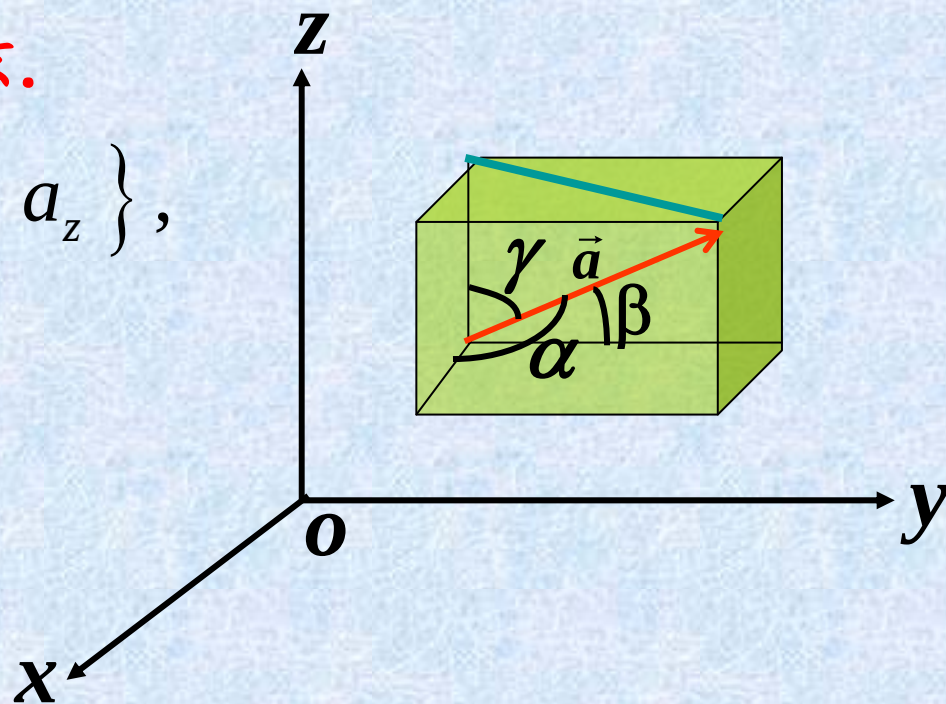
设非零向量 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ ，

则 $a_x = |\vec{a}| \cos \alpha$,

$$a_y = |\vec{a}| \cos \beta,$$

$$a_z = |\vec{a}| \cos \gamma.$$

故 $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$,



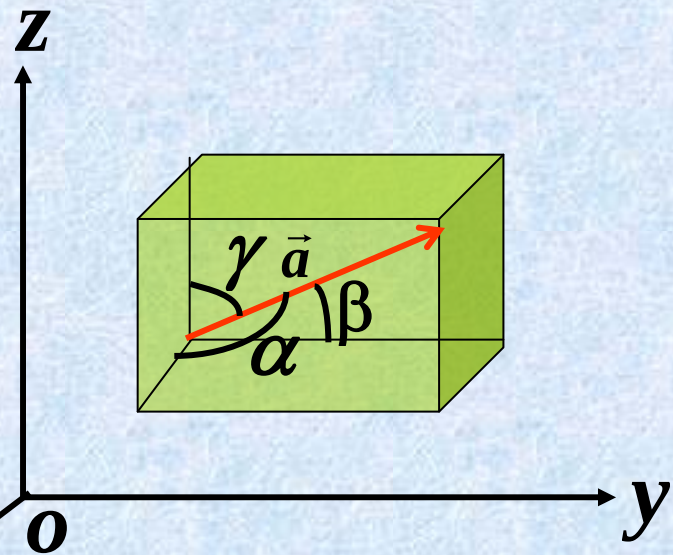
即非零向量 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ 的方向余弦为：

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

这里 $\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$



显然 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

例 设已知两点 $M(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $N(1, 3, 0)$, 计算向量 $\overrightarrow{MN}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{MN} = \{1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}\} = \{-1, 1, -\sqrt{2}\}$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2;$$

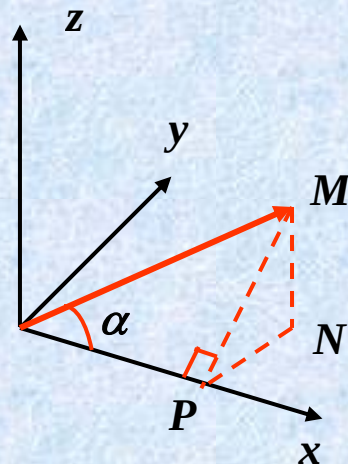
$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{1}{2}, \quad \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

3、向量在轴上的投影

(1)x轴与向量 $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ 的关系

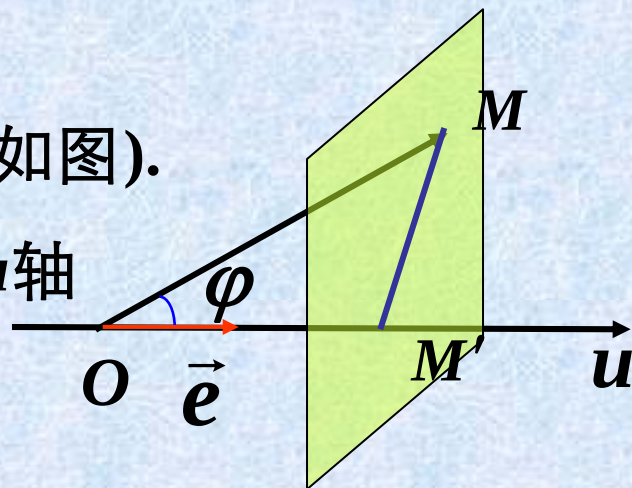
如图,过点 M 作与 x 轴垂直的平面,交点为 P 则 $\overrightarrow{OP}$ 为 $\vec{r}$ 在 x 轴上的分向量,进而由 $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$, O 可得向量在 x 轴上的坐标 x , 且 $x = |\vec{r}| \cos \alpha$.



(2)向量在 u 轴上投影

一般地,设点 O 及单位向量 $\vec{e}$ 确定 u 轴(如图).

任给向量 $\vec{r}$, 作 $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, 再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M' (M' 叫 M 在 u 轴上的投影), 则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为 $\vec{r}$ 在 u 轴上的分向量, 设 $\overrightarrow{OM'} = \lambda \vec{e}$, 则数 λ 称为 $\vec{r}$ 在 u 轴上的投影, 记作 $\text{Pr } j_u \vec{r}$ 或 $(\vec{r})_u$.



(3) 向量在三坐标轴上的投影

$\vec{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x, a_y, a_z 即 $\vec{a}$ 在三坐标轴上的投影, 即

$$a_x = \text{Pr } \vec{j}_x \vec{a}, a_y = \text{Pr } \vec{j}_y \vec{a}, a_z = \text{Pr } \vec{j}_z \vec{a}$$

或记作 $a_x = (\vec{a})_x, a_y = (\vec{a})_y, a_z = (\vec{a})_z$

(4) 向量投影的性质

$$i) (\vec{a})_u = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, u)$$

$$ii) (\vec{a} + \vec{b})_u = (\vec{a})_u + (\vec{b})_u.$$

$$iii) (\lambda \vec{a})_u = \lambda (\vec{a})_u.$$

例 设 $\vec{m} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{n} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}$,
 $\vec{p} = 5\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, 求向量 $\vec{a} = 4\vec{m} + 3\vec{n} - \vec{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 $\because \vec{a} = 4\vec{m} + 3\vec{n} - \vec{p}$

$$\begin{aligned} &= 4(3\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}) + 3(2\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}) \\ &\quad - (5\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}) \\ &= 13\vec{i} + 7\vec{j} + 15\vec{k}, \end{aligned}$$

$\therefore$ 在 x 轴上的投影为 $a_x = 13$,

在 y 轴上的分向量为 $7\vec{j}$.

-

作业

习题7-1: 15

第二节 数量积 向量积

一、两向量的数量积

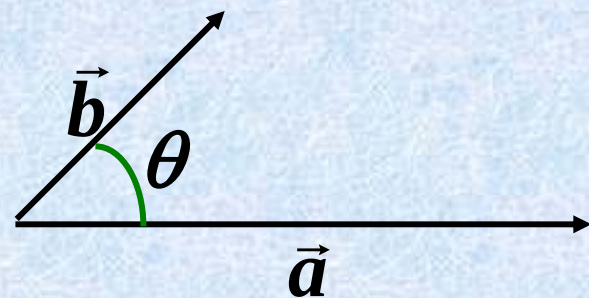
二、两向量的向量积

一、两向量的数量积

1、定义 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积为 $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

(其中 θ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角)



数量积也称为“点积”、“内积”。

强调：两个矢量作数量积后便是实数，不是矢量。

关于数量积的说明:

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2. \quad (2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}.$$

由定义得以下结果:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

用点积表示模: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

表示角度: $\cos \theta = \vec{a} \cdot \vec{b} / |\vec{a}| |\vec{b}|$

表示垂直: $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直 (记作 $\vec{a} \perp \vec{b}$) $\iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

表示投影: $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影是实数 $|\vec{a}| \cos \theta$ (可正可负)

表示做功: $W = \vec{F} \cdot \vec{AB} = \text{分力} \cdot \text{距离} = |\vec{F}| \cos \theta |\vec{AB}|$

已知向量 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,

则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

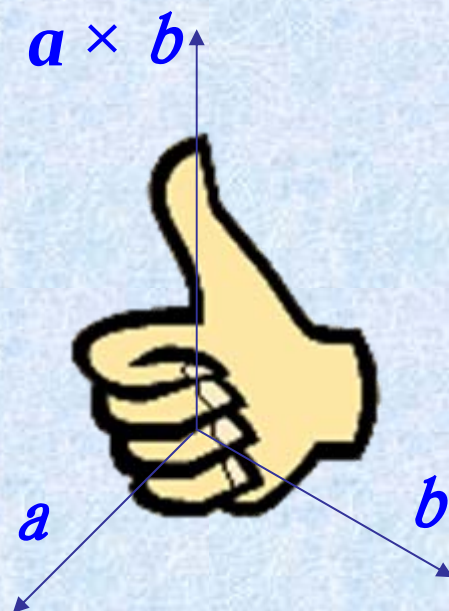
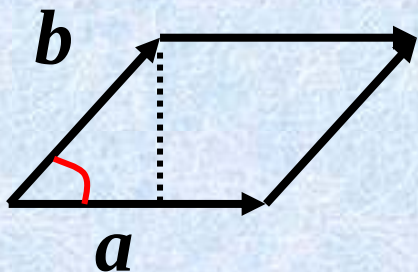
非零向量 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

二、两向量的向量积

1、定义

$$a \times b = \begin{cases} \text{模: } |a \times b| = |a| |b| \sin(\hat{a}, b) \\ \text{方向: 垂直于 } a \text{ 和 } b \text{ 所决定的平面,} \\ \text{指向按右手规则从 } a \text{ 转向 } b \text{ 来确定.} \end{cases}$$



2. 向量积的运算规律:

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$. (注: 不满足交换律)

(2) 分配律: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

(3) 结合律: $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

根据向量积的定义我们有:

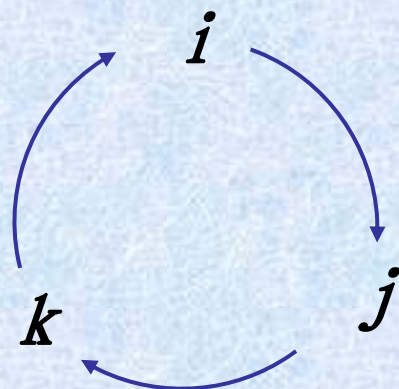
(1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. ($\because \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0$)

(2) $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0},$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$



3、向量积的坐标表达式

$$\text{设 } \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$\because \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0},$$

$$\because \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

向量积还可利用行列式表示

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

练习： 设 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, 计算 $\vec{a} \times \vec{b}$.

解

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}.$$

例 2 求与 $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ 都垂直的单位向量.

解
$$\because \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10\vec{j} + 5\vec{k},$$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5},$$

故所求单位向量为

$$\vec{c}^0 = \pm \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \pm \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{k} \right).$$

第三节 曲面及其方程

一、曲面方程的概念

二、旋转曲面

三、柱面

四、二次曲面

一、曲面方程的概念

平面曲线在平面解析几何中被看成是动点的轨迹.

任何曲面在空间解析几何中被看成是点的几何轨迹.

例1 考虑球心为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面.

对于球面上任一点 $M(x, y, z)$,

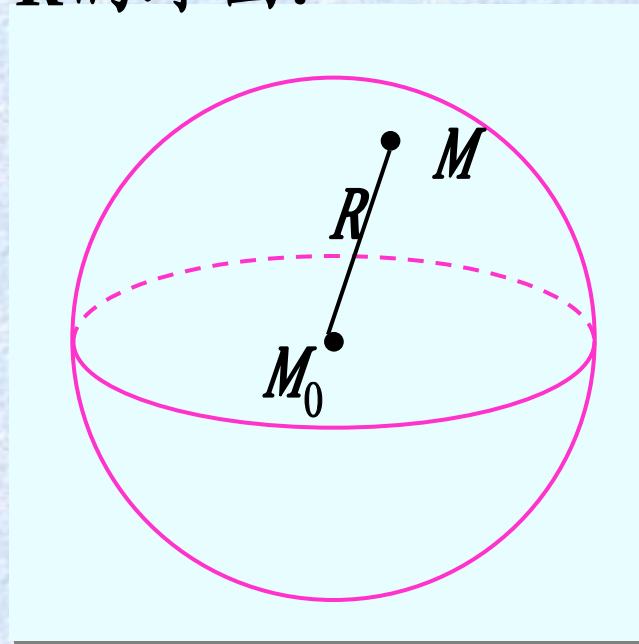
都有 $|MM_0|^2 = R^2$.

即: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

称上述方程为球面的标准方程.

特别: 当球心在原点 $O(0, 0, 0)$ 时,

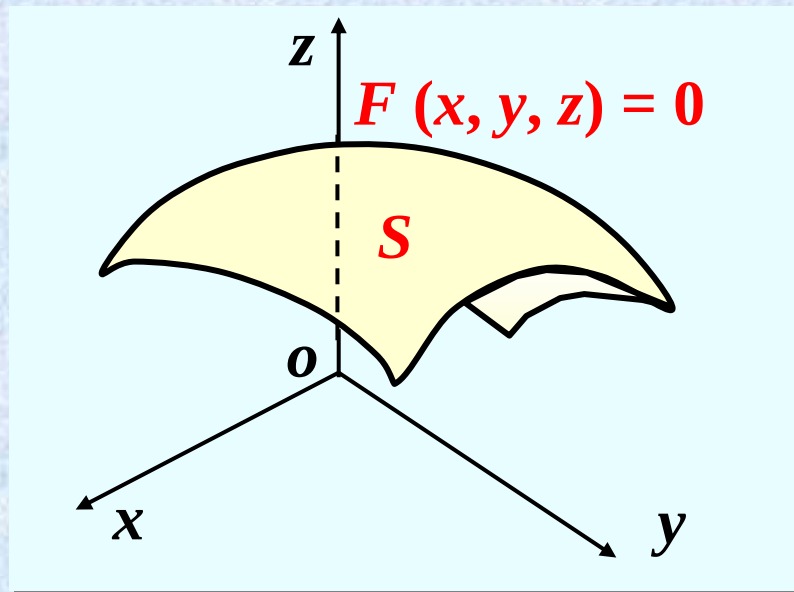
球面方程: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



曲面方程的概念

定义：若曲面 S 与三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 有如下关系：

- (1) 曲面 S 上任一点的坐标满足方程 $F(x, y, z) = 0$;
- (2) 不在 S 上点的坐标都不满足方程 $F(x, y, z) = 0$;



那么, 方程 $F(x, y, z) = 0$ 叫做曲面 S 的方程, 而曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的图形.

例2 方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$ 表示怎样的曲面?

解: 原方程可改写为

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 5$$

故原方程表示球心在 $M_0(1, -2, 0)$, 半径为 $\sqrt{5}$ 的球面.

例 3 已知 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,4)$, 求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 是所求平面上任一点,

根据题意有 $|MA|=|MB|$,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} \\ &= \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2}, \end{aligned}$$

化简得所求方程 $2x - 6y + 2z - 7 = 0$.

以上几例表明研究空间曲面有**两个基本问题**:

(1) 已知曲面作为点的轨迹时, 求曲面方程.

如: 例1、例3

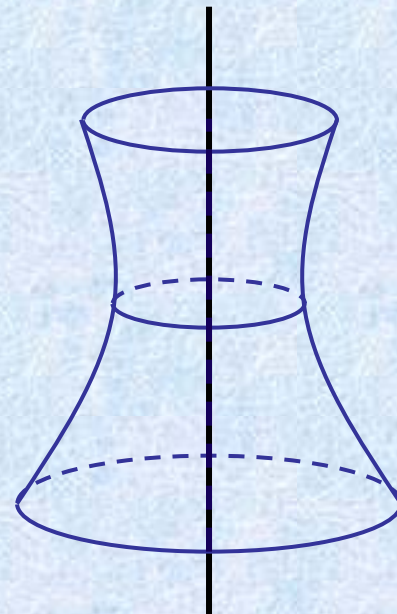
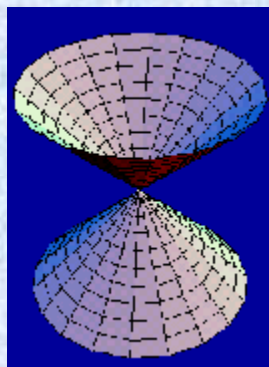
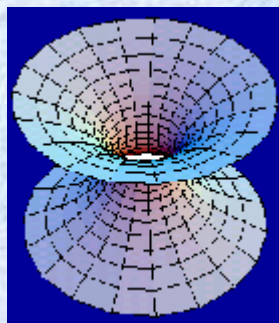
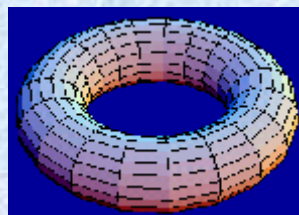
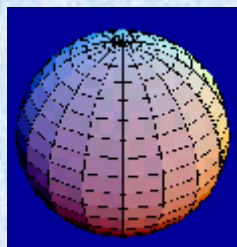
(2) 已知坐标间的关系式, 研究曲面形状.

如: 例2

二、旋转曲面

定义2. 一条平面曲线绕其平面上一条**定直线**旋转一周所形成的曲面叫做**旋转曲面**. 该定直线称为**旋转轴**.

例如：



建立 yOz 面上曲线 C 绕 z 轴旋转所成曲面的方程:

给定 yOz 面上曲线 $C: f(y, z) = 0$

若点 $M_1(0, y_1, z_1) \in C$, 则有

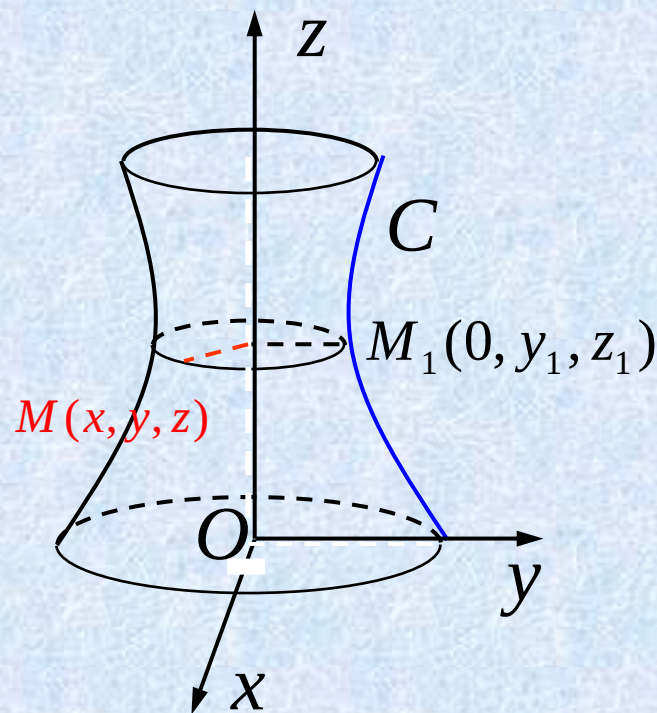
$$f(y_1, z_1) = 0$$

当绕 z 轴旋转时, 该点转到
 $M(x, y, z)$, 则有

$$z = z_1, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|$$

故旋转曲面方程为

$$f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$



yoz 坐标面上的已知曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转一周的旋转曲面方程为

$$f\left(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

$$(z \text{ 不变}, y \rightarrow \pm \sqrt{x^2 + y^2})$$

同理： yoz 坐标面上的已知曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 y 轴旋转一周的旋转曲面方程为

$$f\left(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0.$$

$$(y \text{ 不变}, z \rightarrow \pm \sqrt{x^2 + z^2})$$

例4: 求直线 $z = ay$ 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面方程.

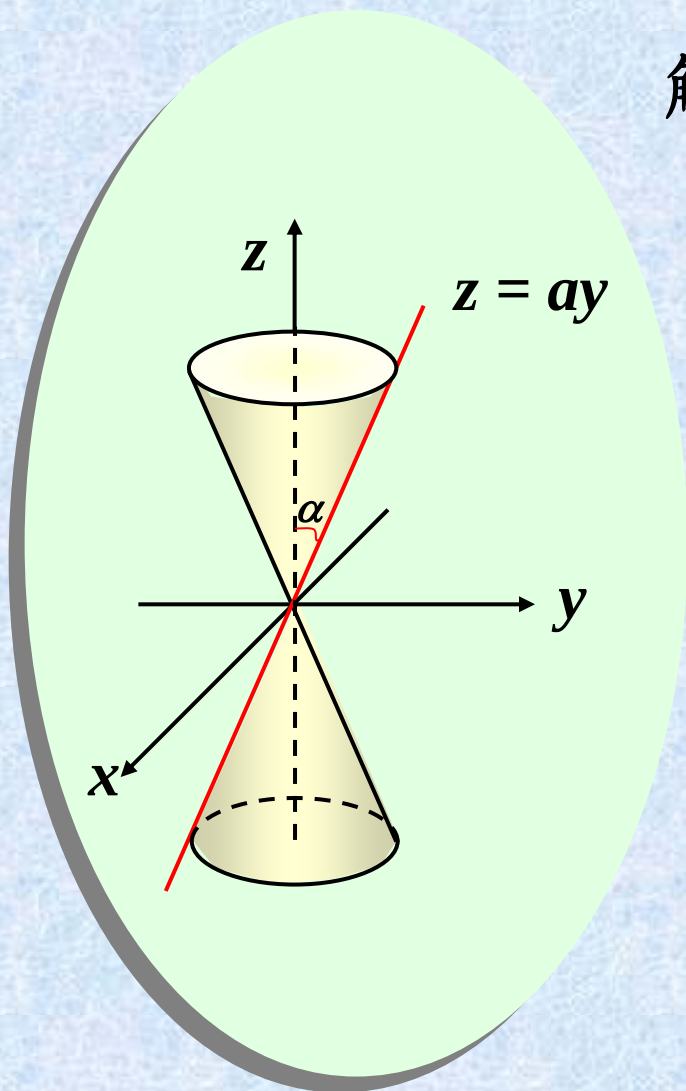
解: 将 y 用 $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ 代入直线方程, 得

$$z = a(\pm\sqrt{x^2 + y^2})$$

平方得:

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

该旋转曲面叫做圆锥面,
其顶点在原点.



例5 将下列各曲线绕对应的轴旋转一周，求生成的旋转曲面的方程.

(1) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 分别绕 x 轴和 y 轴;

绕 x 轴旋转 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$

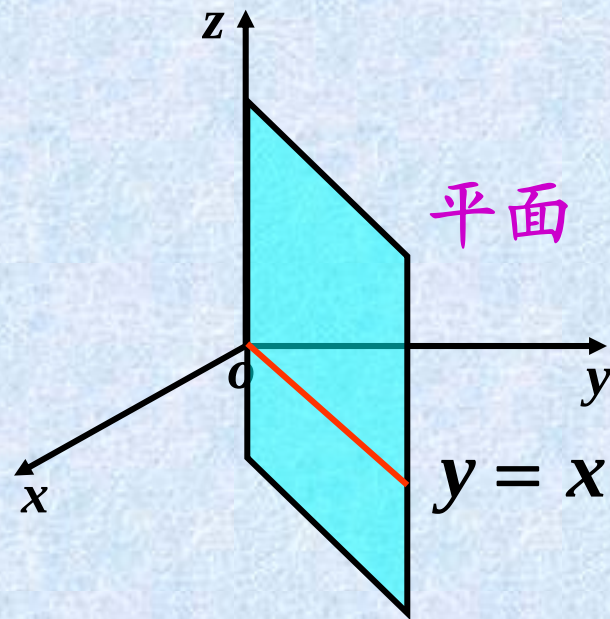
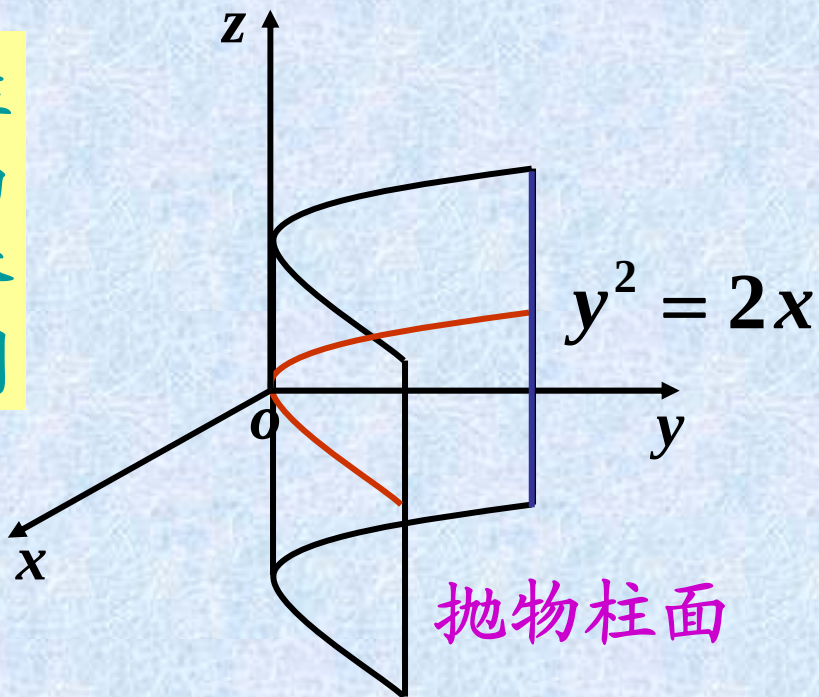
绕 y 轴旋转 $\frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

旋转双曲面

三、柱面

定义 直线 L 沿定曲线 C 平行移动所形成的曲面称为柱面. 这条定曲线 C 叫柱面的**准线**, 动直线 L 叫柱面的**母线**.

柱面举例



从柱面方程:

只含 x, y 而缺 z 的方程 $F(x, y) = 0$, 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面, 其准线为 xoy 面上曲线 C . (其他类推)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{椭圆柱面} \quad // z \text{轴}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{双曲柱面} \quad // y \text{轴}$$

$$y^2 = 2px \quad \text{抛物柱面} \quad // z \text{轴}$$

四、二次曲面

三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx \\ + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

(二次项系数不全为 0)

的图形统称为**二次曲面**. 其基本类型有:

椭球面、抛物面、双曲面、锥面

适当选取直角坐标系可得它们的标准方程,下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍.

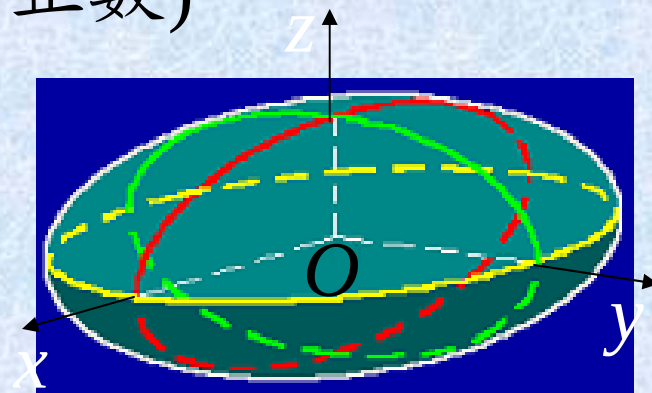
研究二次曲面特性的基本方法:**截痕法**

1. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c \text{ 为正数})$$

(1) 范围:

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c$$



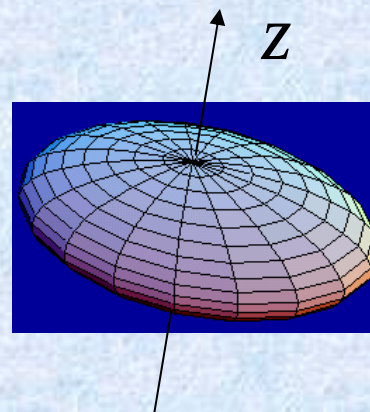
(2) 与坐标面的交线: 椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c \text{ 为正数})$$

(3) 截痕: 与 $z = z_1$ ($|z_1| < c$) 的交线为椭圆:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} = 1 \\ z = z_1 \end{cases}$$



同样 $y = y_1$ ($|y_1| \leq b$) 及 $x = x_1$ ($|x_1| \leq a$) 的截痕也为椭圆.

(4) 当 $a = b$ 时为旋转椭球面; 当 $a = b = c$ 时为球面.

2. 抛物面

(1) 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \quad (p, q \text{ 同号})$$

特别, 当 $p = q$ 时为绕 z 轴的旋转抛物面.

(2) 双曲抛物面 (鞍形曲面)

$$-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \quad (p, q \text{ 同号})$$

3. 双曲面

(1) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c \text{ 为正数})$$

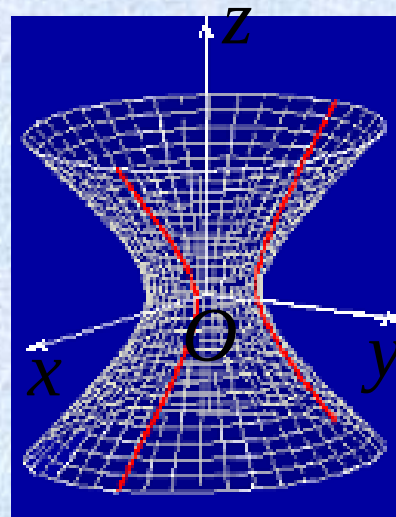
平面 $z = z_1$ 上的截痕为椭圆.

平面 $y = y_1$ 上的截痕情况:

1) $|y_1| < b$ 时, 截痕为双曲线:

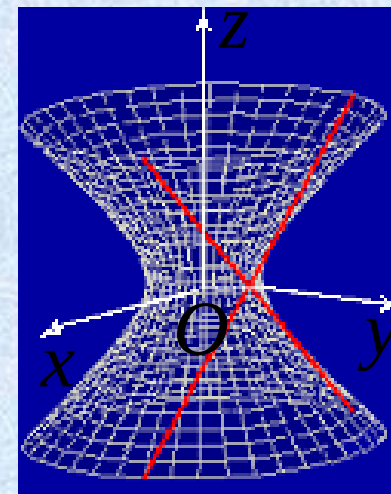
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_1^2}{b^2} \\ y = y_1 \end{cases}$$

(实轴平行于 x 轴;
虚轴平行于 z
轴)



2) $|y_1| = b$ 时, 截痕为相交直线:

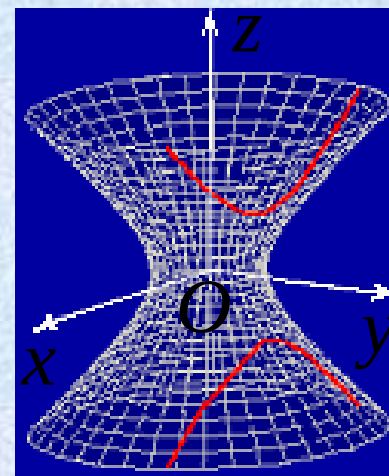
$$\begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{z}{c} = 0 \\ y = b \text{ (或 } -b) \end{cases}$$



3) $|y_1| > b$ 时, 截痕为双曲线:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_1^2}{b^2} < 0 \\ y = y_1 \end{cases}$$

(实轴平行于z轴;
虚轴平行于x轴)



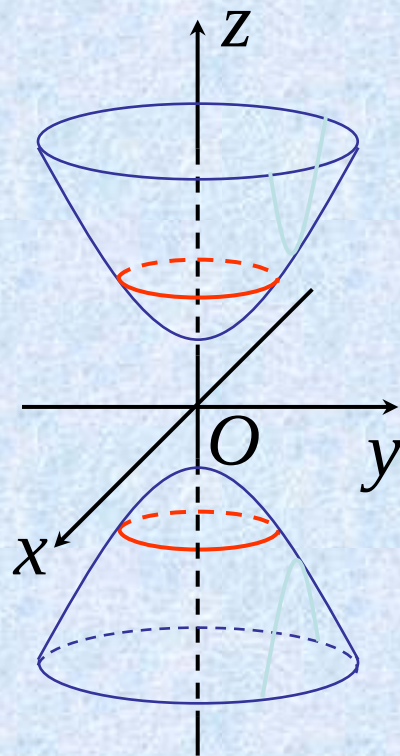
(2) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a, b, c \text{ 为正数})$$

平面 $y = y_1$ 上的截痕为 双曲线

平面 $x = x_1$ 上的截痕为 双曲线

平面 $z = z_1$ ($|z_1| > c$) 上的截痕为 椭圆



注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \begin{cases} 1 & \text{单叶双曲面} \\ -1 & \text{双叶双曲面} \end{cases}$$

4. 椭圆锥面

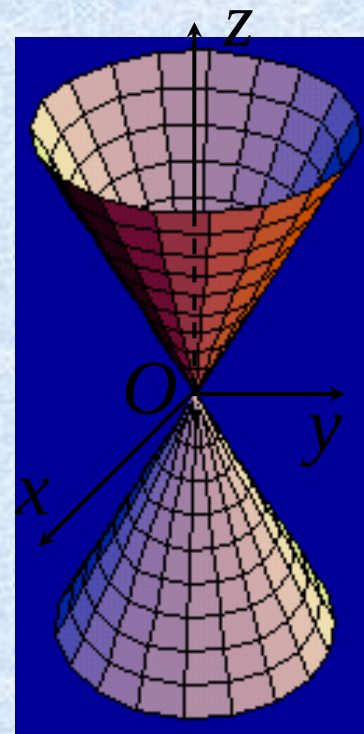
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2 \quad (a, b \text{ 为正数})$$

在平面 $z = t$ 上的截痕为椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2} + \frac{y^2}{(bt)^2} = 1, \quad z = t \quad \textcircled{1}$$

在平面 $x = 0$ 或 $y = 0$ 上的截痕为过原点的两直线.

可以证明, 椭圆①上任一点与原点的连线均在曲面上.



思考与练习

指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形？

(1) $x = 2$; (2) $x^2 + y^2 = 4$;

(3) $y = x + 1$.

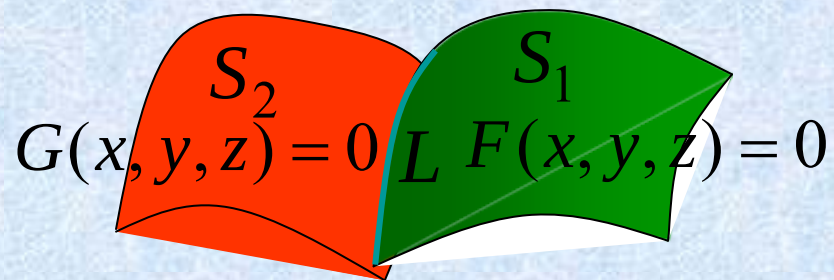
第四节 空间曲线及其方程

- 一、空间曲线的一般方程
- 二、空间曲线的参数方程
- 三、空间曲线在坐标面上的投影

一、空间曲线的一般方程

空间曲线可视为两曲面的交线, 其一般方程为方程组

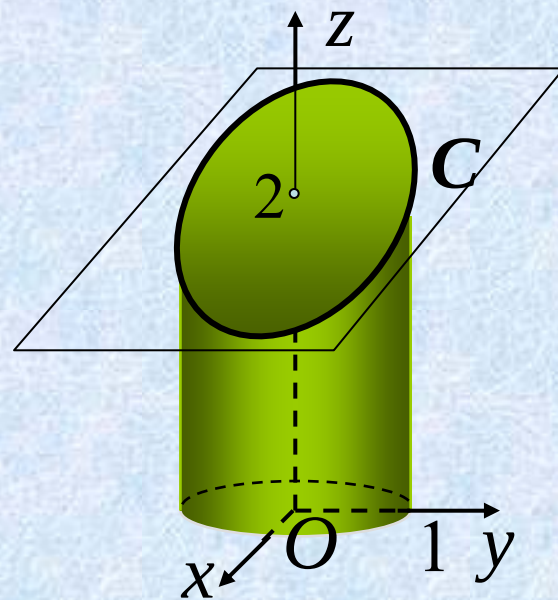
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$



例如, 方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

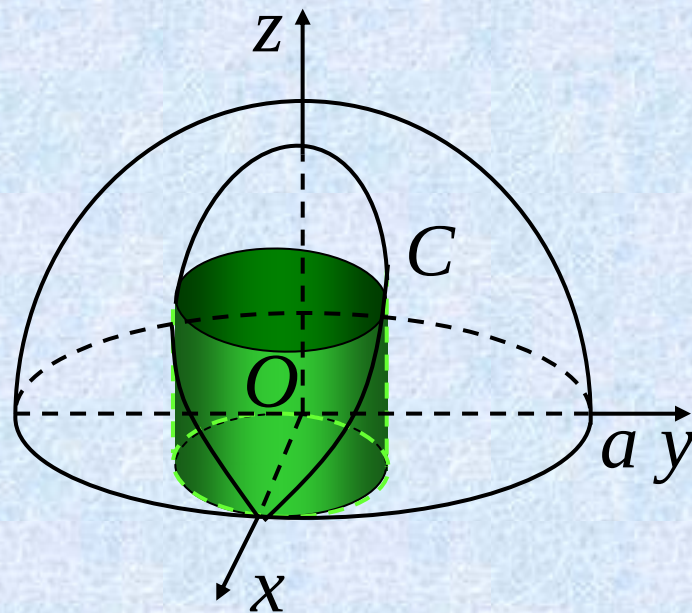
表示圆柱面与平面的交线 C .



又如, 方程组

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

表示上半球面与圆柱面的交线 C .



例1 方程组
$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \end{cases}$$
 表示怎样的曲线?

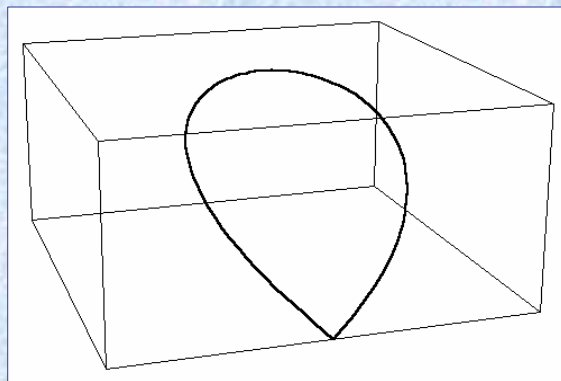
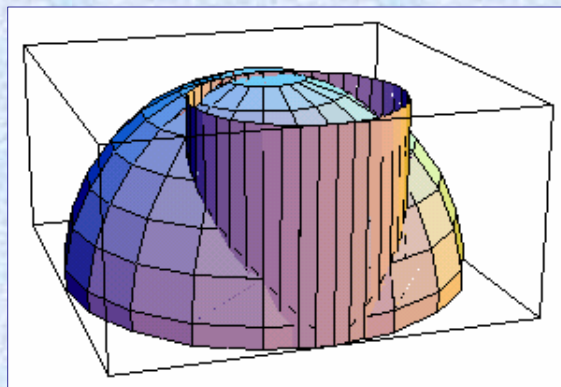
$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \end{cases}$$

解 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

上半球面,

$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ 圆柱面,

交线如图.



二、空间曲线的参数方程

将曲线 C 上的动点坐标 x, y, z 表示成参数 t 的函数:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \text{ 称它为空间曲线的} \\ \text{参数方程.}$$

例如, 圆柱螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t \\ z = vt \end{cases} \xrightarrow{\text{令 } \theta = \omega t, b = \frac{v}{\omega}} \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \\ z = b\theta \end{cases}$$

当 $\theta = 2\pi$ 时, 上升高度 $h = 2\pi b$, 称为螺距.

三、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程:
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

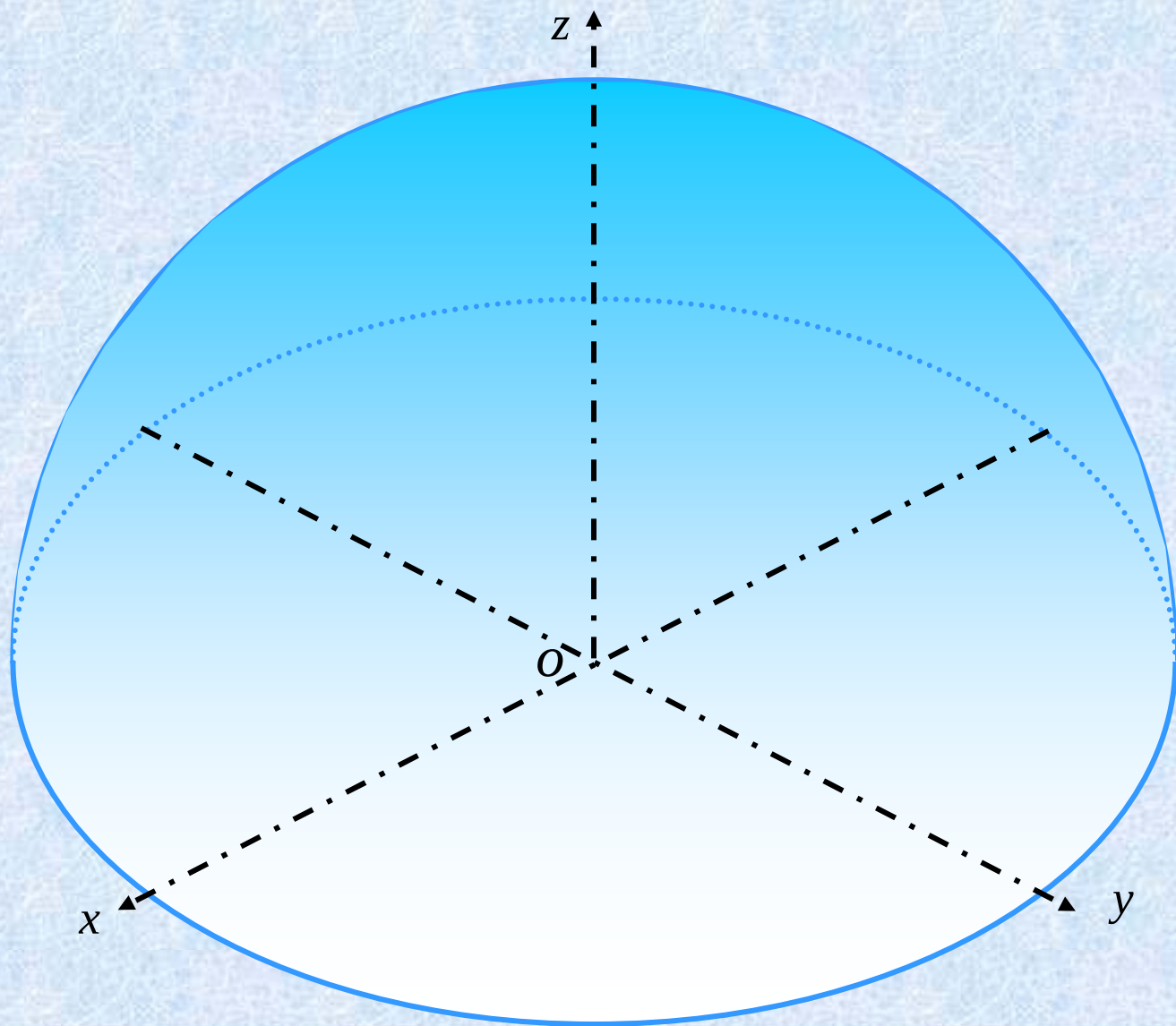
消去变量 z 后得: $H(x, y) = 0$

曲线 C 关于 xoy 的投影柱面

空间曲线 C 在 xoy 面上的投影曲线, 或简称投影

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

求曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 的交线 L 在 xoy 平面的投影。



空间曲线在坐标面上的投影

求曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 的交线 L 在 xoy 平面的投影。

解 由
$$\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

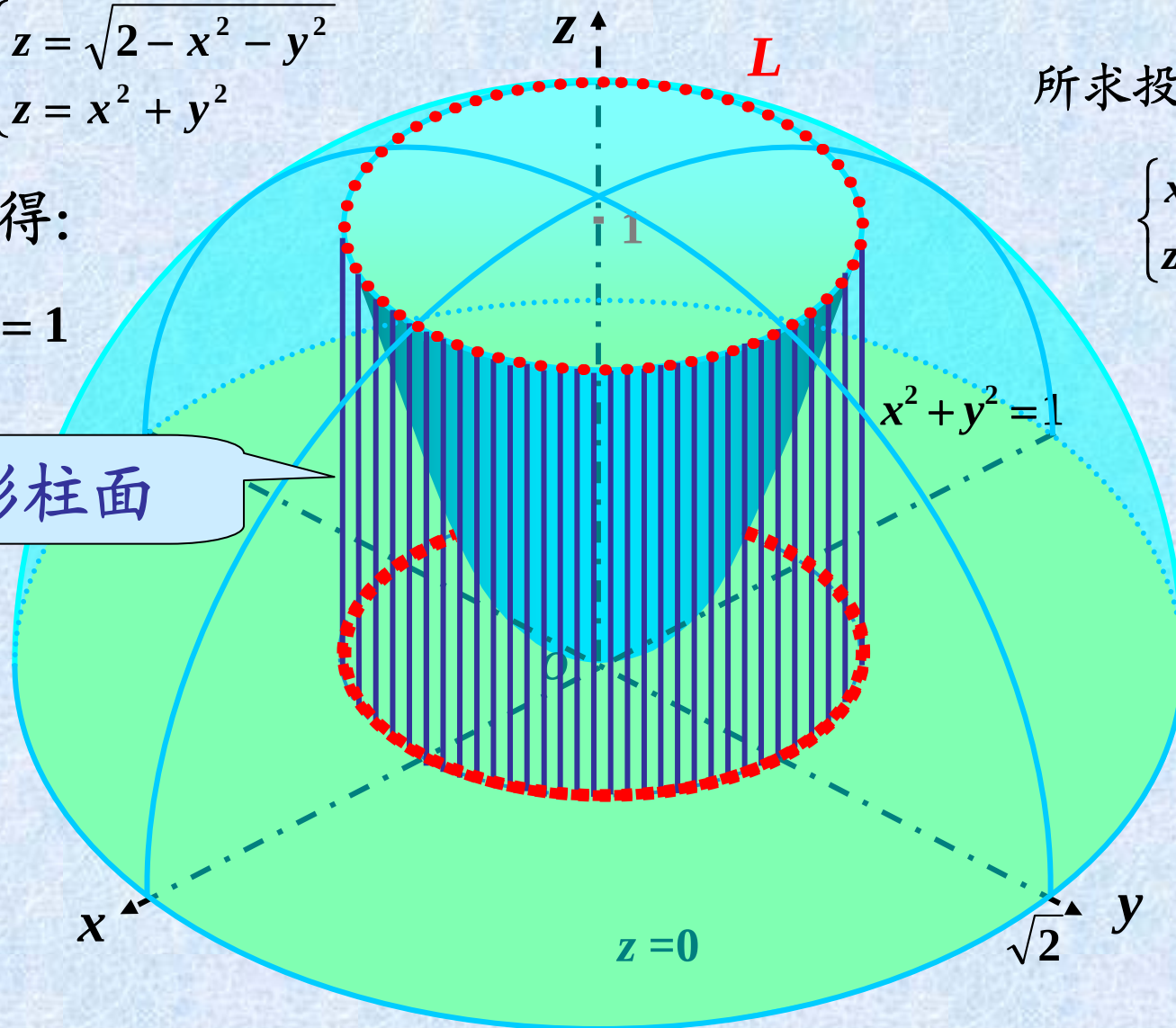
消去 z 后得:

$$x^2 + y^2 = 1$$

投影柱面

所求投影曲线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$



空间曲线C在 xoy 面上的**投影曲线**

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

类似地：可定义空间曲线C: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

在其他坐标面上的投影:

yoz 面上的**投影曲线**, xoz 面上的**投影曲线**,

$$\begin{cases} R(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

例2 求曲线
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

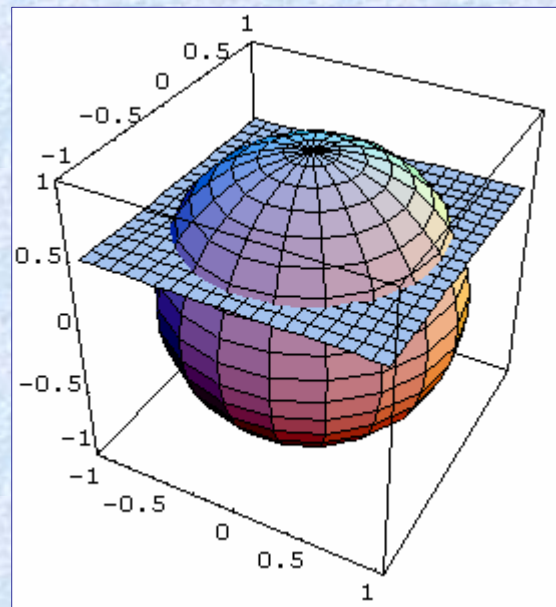
在 xoy 坐标面上的投影.

解 消去变量 z 后得

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4},$$

在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$



思考与练习

求椭圆抛物面 $2y^2 + x^2 = z$ 与抛物柱面 $2 - x^2 = z$ 的交线关于 xoy 面的投影柱面和
在 xoy 面上的投影曲线方程.

作业

习题8-4: 3, 4

第五节 平面及其方程

- 一、平面的点法式方程
- 二、平面的一般方程
- 三、两平面的夹角

一、平面的点法式方程

设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n} = (A, B, C)$, 求该平面 Π 的方程.

任取点 $M(x, y, z) \in \Pi$, 则有

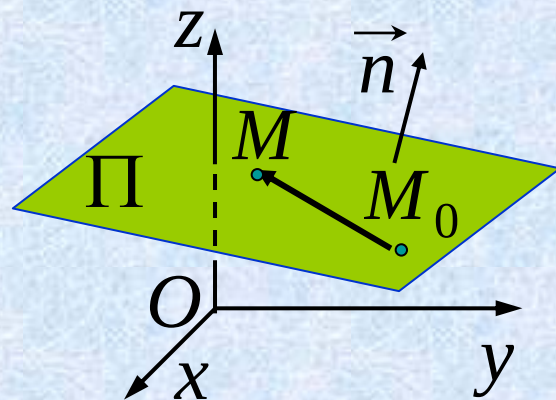
$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

故

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\downarrow \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \text{①}$$



称①式为平面 Π 的**点法式方程**, 称 $\vec{n}$ 为平面 Π 的**法向量**.

以 $\vec{n} = \{A, B, C\}$ 为法线向量，过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$

的平面方程。 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

练习

1. 求过点 $(2, -3, 0)$ 且以 $\vec{n} = (1, -2, 3)$ 为法线向量的平面方程。
2. 过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面。

例1. 求过三点 $M_1(2, -1, 4)$, $M_2(-1, 3, -2)$, $M_3(0, 2, 3)$ 的平面 Π 的方程.

解: 取该平面 Π 的法向量为

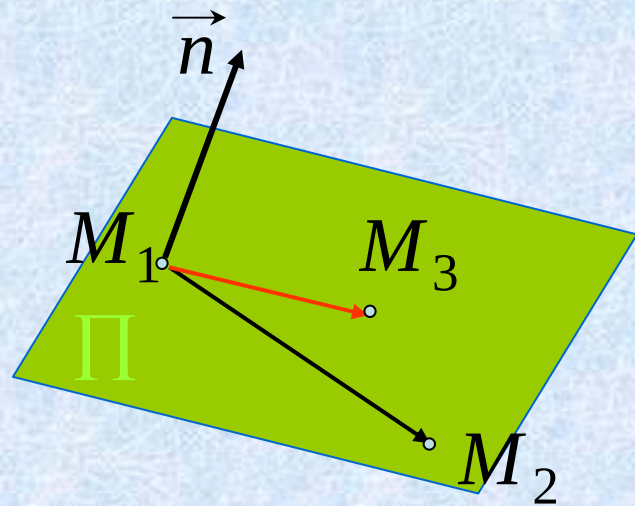
$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (14, 9, -1)\end{aligned}$$

又 $M_1 \in \Pi$, 利用点法式得平面 Π 的方程

$$14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0$$

即

$$14x + 9y - z - 15 = 0$$

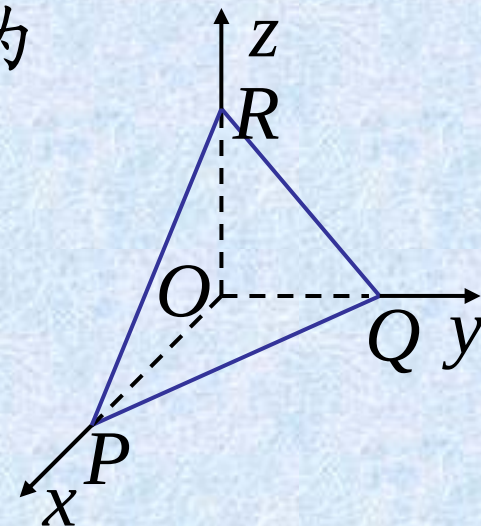


特别, 当平面与三坐标轴的交点分别为

$$P(a,0,0), Q(0,b,0), R(0,0,c)$$

时, 平面方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a, b, c \neq 0)$$



此式称为平面的**截距式方程**.

分析:

利用三点式

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

按第一行展开得 $(x-a)bc - y(-a)c + zab = 0$

$$\text{即} \quad bcx + acy + abz = abc$$

二、平面的一般方程

设有三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \quad \textcircled{2}$$

任取一组满足上述方程的数 x_0, y_0, z_0 , 则

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

以上两式相减, 得平面的点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

显然方程②与此点法式方程等价, 因此方程②的图形是法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$ 的平面, 此方程称为平面的一般方程.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

特殊情形

- 当 $D = 0$ 时, $Ax + By + Cz = 0$ 表示通过原点的平面;
- 当 $A = 0$ 时, $By + Cz + D = 0$ 的法向量
$$\vec{n} = (0, B, C) \perp \vec{i},$$
 平面平行于 x 轴;
- $Ax + Cz + D = 0$ 表示平行于 y 轴的平面;
- $Ax + By + D = 0$ 表示平行于 z 轴的平面;
- $Cz + D = 0$ 表示平行于 xOy 面的平面;
- $Ax + D = 0$ 表示平行于 yOz 面的平面;
- $By + D = 0$ 表示平行于 zOx 面的平面.

例2. 求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面方程.

解: 因平面通过 x 轴, 故 $A = D = 0$

设所求平面方程为

$$By + Cz = 0$$

代入已知点 $(4, -3, -1)$ 得 $C = -3B$

化简, 得所求平面方程

$$y - 3z = 0$$

三、两平面的夹角

两平面法向量的夹角 (常指锐角) 称为两平面的夹角.

设平面 Π_1 的法向量为 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

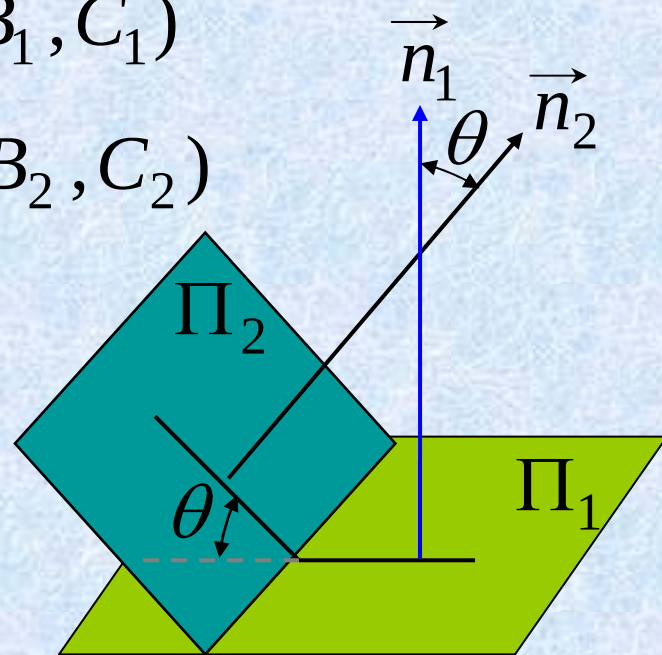
平面 Π_2 的法向量为 $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

则两平面夹角 θ 的余弦为

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

即

$$\cos \theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



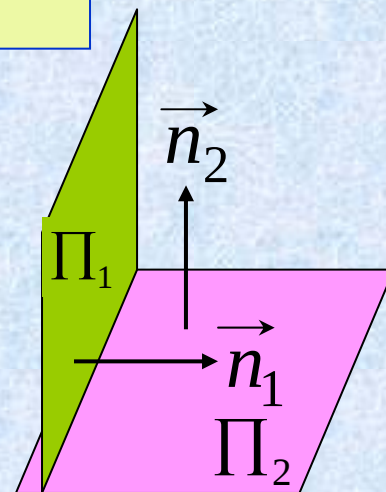
$$\begin{aligned} \Pi_1 : \vec{n}_1 &= (A_1, B_1, C_1) \\ \Pi_2 : \vec{n}_2 &= (A_2, B_2, C_2) \end{aligned} \quad \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

特别有下列结

论:

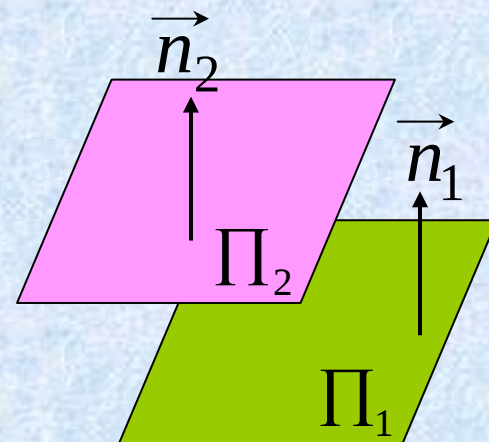
$$(1) \quad \Pi_1 \perp \Pi_2 \iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

$$\iff A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$



$$(2) \quad \Pi_1 // \Pi_2 \iff \vec{n}_1 // \vec{n}_2$$

$$\iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$



例4. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面 $\Pi: x + y + z = 0$, 求其方程.

解: 设所求平面的法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$, 则所求平面方程为 $A(x-1) + B(y-1) + C(z-1) = 0$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2} \implies -A + 0 \cdot B - 2C = 0, \text{ 即 } A = -2C$$

$$\vec{n} \perp \Pi \text{ 的法向量} \implies A + B + C = 0, \text{ 故}$$

$$B = -(A + C) = C$$

$$\text{因此有 } -2C(x-1) + C(y-1) + C(z-1) = 0 \quad (C \neq 0)$$

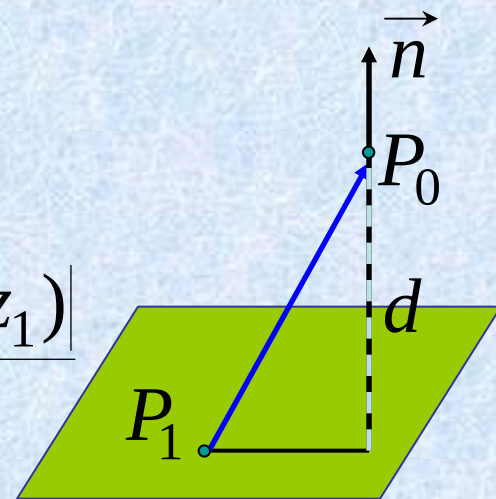
$$\text{约去 } C, \text{ 得 } -2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

$$\text{即 } 2x - y - z = 0$$

例5. 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 外一点, 求 P_0 到平面的距离 d .

解: 设平面法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$, 在平面上取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 则 P_0 到平面的距离为

$$\begin{aligned} d &= \left| \text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &\quad \downarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ d &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$



(点到平面的距离公式)

作业

习题8-5: 3, 6

第六节 空间直线及其方程

- 一、空间直线的一般方程
- 二、空间直线的对称式方程与参数方程
- 三、两直线的夹角
- 四、直线与平面的夹角
- 五、平面束

一、空间直线的一般方程

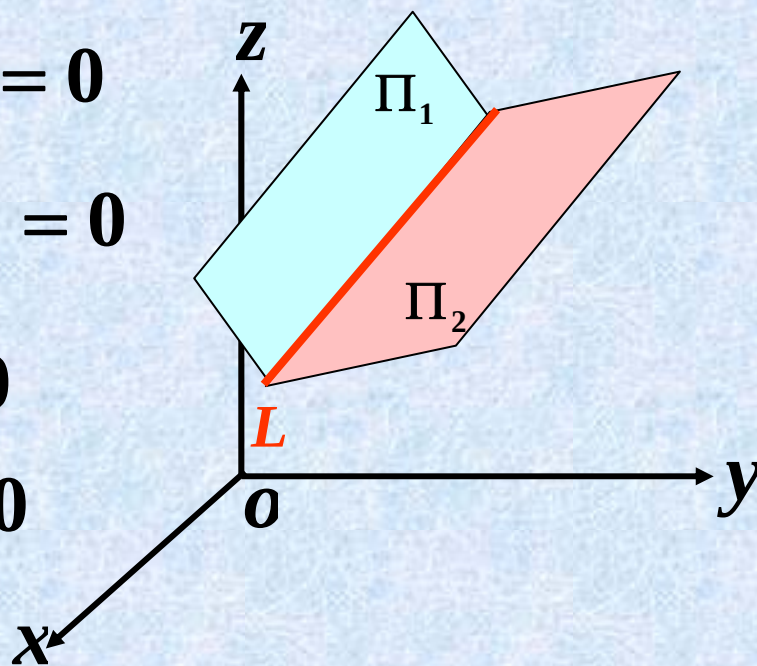
定义 空间直线可看成两平面的交线.

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

空间直线的一般方程

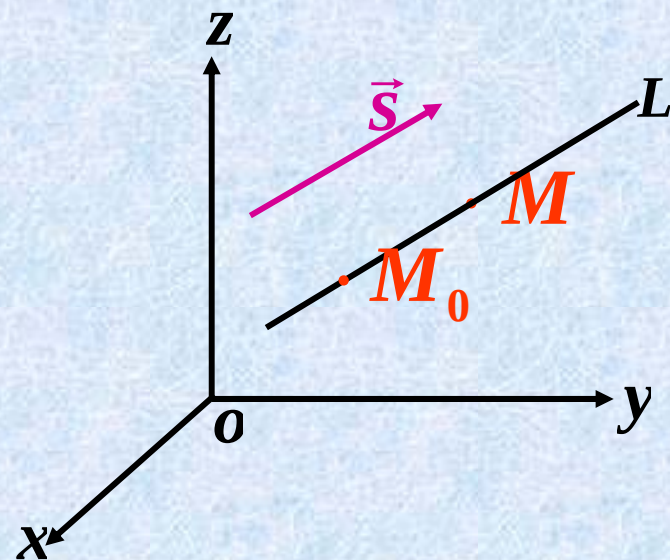


注：表示同一直线的一般方程不唯一。

二、空间直线的参数方程与对称式方程

直线的方向向量 $\vec{s}$ ：与直线平行的非零向量。

设 $\vec{s} = \{m, n, p\}$ 为方向向量，
过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的直线方程。



$\forall$ 取 $M(x, y, z) \in L$

$$\{m, n, p\} = \vec{s} // \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

直线的对称式方程：
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

直线的对称式方程: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$

点向式

说明: 某些分母为零时, 其分子也理解为零.

注意: $\vec{s} = \{m, n, p\}$, 所过的点 (x_0, y_0, z_0)

令 $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$

直线的参数方程:
$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

三、两直线的夹角

锐角

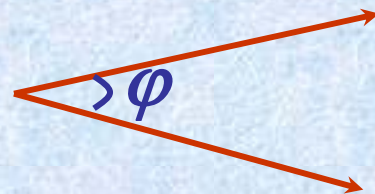
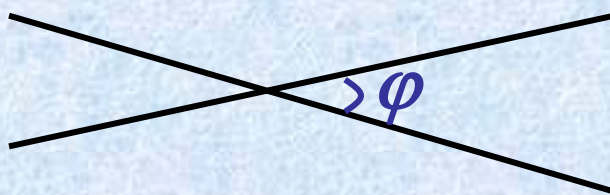
$$L_1 \quad \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

$$\vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$$

$$L_2 \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

$$\vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|}$$



$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

例1. 用对称式及参数式表示直线

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

解: 先在直线上找一点.

令 $x = 1$, 解方程组 $\begin{cases} y + z = -2 \\ y - 3z = 6 \end{cases}$, 得 $y = 0, z = -2$

故 $(1, 0, -2)$ 是直线上一点 .

再求直线的方向向量

交已知直线的两平面的法向量为

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{n}_2 = (2, -1, 3)$$

$$\because \vec{s} \perp \vec{n}_1, \vec{s} \perp \vec{n}_2 \quad \therefore \vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (4, -1, -3)$$

故所给直线的对称式方程为 $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-3} = t$

$$\text{参数式方程为} \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

解题思路: 先找直线上一点;
再找直线的方向向量.

• 三、 两直线的夹角

两直线的夹角指其方向向量间的夹角 (通常取锐角)。

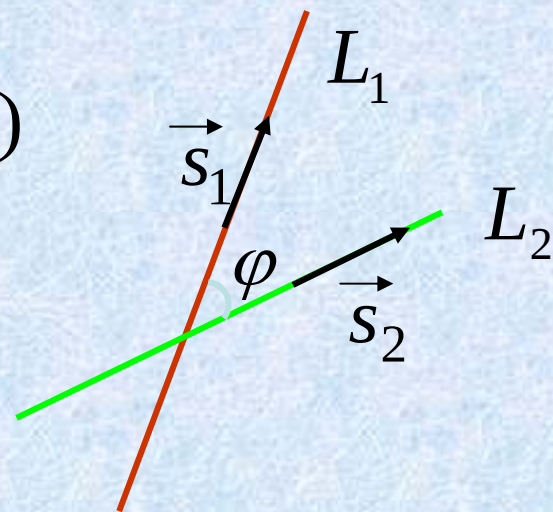
设直线 L_1, L_2 的方向向量分别为

$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1), \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$$

则两直线夹角 φ 满足

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|}$$

$$= \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$



两直线的位置关系:

$$L_1 \quad \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$L_2 \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

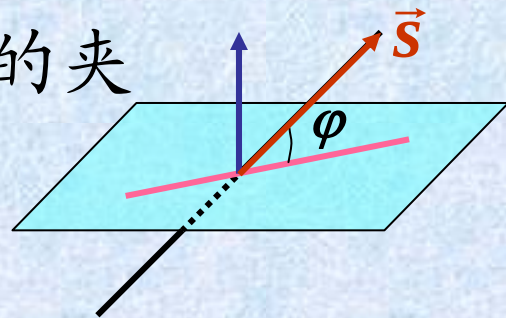
$$(1) \quad L_1 \perp L_2 \iff m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$(2) \quad L_1 // L_2 \iff \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

四、直线与平面的夹角

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

定义 直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ 称为直线与平面的夹角.



$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad \vec{s} = \{m, n, p\},$$

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0, \quad \vec{n} = \{A, B, C\},$$

$$(\vec{s}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\cos(\vec{s}, \vec{n}) = \frac{|mA + nB + pC|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$$= \sin \varphi$$

$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\vec{s} = \{m, n, p\}$$

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{n} = \{A, B, C\}$$

直线与平面的夹角公式

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

直线与平面的位置关系:

$$(1) \quad L \perp \Pi \iff \vec{s} \parallel \vec{n} \iff \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

$$(2) \quad L // \Pi \iff \vec{s} \parallel \vec{n} \iff Am + Bn + Cp = 0.$$

五、平面束

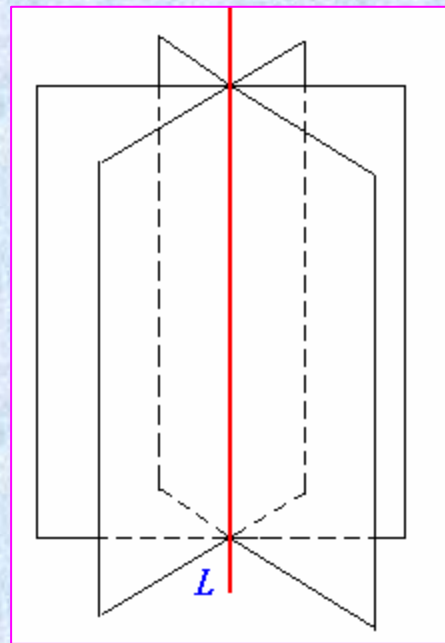
平面束：通过定直线的所有平面的全体。

$$\text{若直线 } L : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

则方程

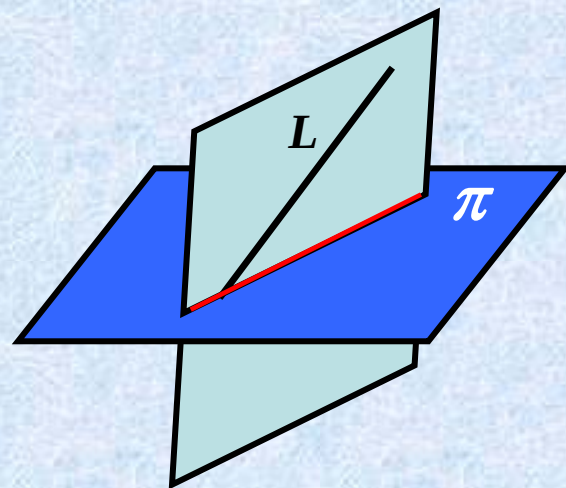
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

表示过直线 L 的平面束方程（实际上表示缺少平面(2)的平面束）



例 求直线 $L: \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x + y + z = 0$ 上的投影直线的方程.

分析: 因所求直线既在平面 π 上又在平面 π 的垂面上. 故用直线的一般方程来求.



例 求直线 $L: \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x + y + z = 0$

上的投影直线的方程。

解 平面束方程为

$$(x + y - z - 1) + \lambda(x - y + z + 1) = 0$$

$$\text{即 } (1 + \lambda)x + (1 - \lambda)y + (-1 + \lambda)z + (-1 + \lambda) = 0$$

又 $\because$ 垂直于平面 π ,

$$\therefore (1 + \lambda) \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 + (-1 + \lambda) \cdot 1 = 0. \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$$

投影平面方程 $y - z - 1 = 0$

$$\text{投影直线方程 } \begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

作业

- 2, 4, 6