微分中值定理与导数的应用考研（数一）真题

一、选择题（将最佳答案的序号填写在括号内）

1.（94 年，3 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$,其中$a^2+c^2\neq 0$,

则必有（　　）

（A） $b=4d$　　（B） $b=-4d$

（C） $a=4c$　　（D） $a=-4c$

2.（95 年，3 分）设在$[0,1]$上$f''(x)>0$，则$f'(0)$、$f'(1)$、$f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$的大小顺序是（ ）

（A） $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　（B） $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

（C） $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　（D） $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

3.（96，3 分）设$f(x)$有二阶连续导数，且$f'(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$,

则（　　）

（A） $f(0)$是$f(x)$的极大值

（B） $f(0)$是$f(x)$的极小值

（C） $(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

（D） $f(0)$不是$f(x)$的极值，$(0,f(0))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点

4.（99 年，3 分）设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\le 0\end{cases}$，其中$g(x)$是有界函数，

则$f(x)$在$x=0$处（　　）

（A）极限不存在　　（B）极限存在，但不连续

（C）连续，但不可导　　（D）可导

5.（00 年，3 分）设$f(x)$、$g(x)$是恒大于零的可导函数，并且

$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当$a<x<b$时，有（　　）

（A） $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　（B） $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

（C） $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　（D） $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

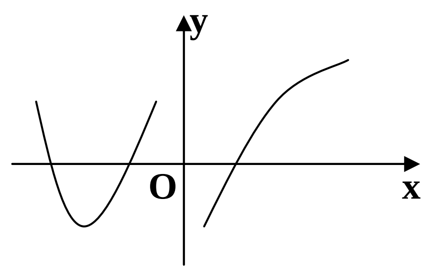
6.（03 年，4 分）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其导函数的图形如图所示，则$f(x)$有（　　）

(A)　一个极小值点和两个极大值点.

(B)　两个极小值点和一个极大值点.

(C)　两个极小值点和两个极大值点.

(D)　三个极小值点和一个极大值点.



7.（06 年，4 分） 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分。若 $\Delta x>0$，则（　）

（A）$0<dy<\Delta y$　　（B）$0<\Delta y<dy$

（C）$\Delta y<dy<0$　　（D）$dy<\Delta y<0$

8.（10 年，4 分）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$（　）

（A）1　（B）e　（C）e^{a-b}　（D）e^{b-a}

二、填空题

1.（95 年，3 分）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$____________.

2.（96 年，3 分）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$____________.

3.（97 年，3 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$____________.

4.（98 年，3 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$____________.

5.（99 年，3 分）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$____________.

6.（03 年，4 分）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$____________.

三、计算

1.（00 年，5 分）求

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right].$$

2.（08 年，10 分）求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left[\sin x-\sin(\sin x)\right]\sin x}{x^4}.$$

四、证明

1.（01 年，7 分）设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$.试证：

（1）对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$$

成立；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

2.（02 年，6 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

3.（05 年，12 分）已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内

可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

（I）存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$；

（II）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

4.（06 年，7 分）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,...)$

求：（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求之.

（2）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

5.（07 年，11 分）设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内

具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$.

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

6.（09 年，11 分）证明拉格朗日中值定理.