《数学分析 2》—级数部分—自测题

一、判断题（正确的划√，错误的划×.）

（　　）1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 也收敛.

（　　）2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ 条件收敛.

（　　）3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 绝对收敛.

（　　）4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$ （$a_n \ge 0$）收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

（　　）5. 函数列 $\{S_n(x)\}$ 一致收敛于 $S(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|=0$.

二、 选择题

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，下列级数发散的是（　　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}100u_n$ ；　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+100)$；

（C）$100+\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ ；　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+100}$.

2. 下列说法不正确的是（　　）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛；(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛 ；(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$ 收敛.

3. 设 $0 \le u_n < \frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n^2$ （　　）

（A）条件收敛　（B）绝对收敛

（C）发散　（D）无法确定

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项部分和 $s_n=\frac{n}{2n+1}$，则 （　　）

（A） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 ；　（B） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 $\frac{1}{2}$ ；

（C） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的余项 $r_n\to 1(n\to\infty)$ ；　（D） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性无法确定.

5. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，且前 n 项部分和为 s_n，则 （　　）

（A） $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$ ；　（B） $\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$ ；

（C） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 任意加括号后所成的级数必发散 ；

（D） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 任意加括号后所成的级数可能收敛 .

6. 下列结论错误的是（　　）

（A） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散， 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 一定发散；

（B） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散 ；

（C） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|)$ 可能收敛也可能发散 ；

（D） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 收敛 .

7. 下列结论正确的是（　　）

（A） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-1)$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ ；（B） 若 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 ；

（C） 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；（D） 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 收敛.

8. 下列发散的级数是（　　）

（A） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})$ ；　　（B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ；

（C） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ ；　　（D） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

9. 下列结论正确的是（　　）

（A）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛 ；

（B）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散 ；

（C）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 也收敛；

（D）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 可能收敛.

10. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R(0<R<+\infty)$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(\frac{x}{4})^n$ 的收敛半径是（　　）

（A） $4R$ ；　　（B） $\frac{R}{4}$ ；　　（C） R ；　　（D） $\frac{4}{R}$.

11. 下列式子不成立的是（　　）

（A） $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$ ；　　（B） $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in(-\infty,+\infty)$ ；

（C） $\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,x\in[-1,1]$ ；　　（D） $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,x\in(-1,1]$.

12. 设常数 $k>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$ （　　）

A 发散　　B 绝对收敛　　C 条件收敛　　D 收敛或发散

13. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ （　　）

A 是条件收敛的　　B 是绝对收敛的

C 可能收敛也可能发散　　D 上述均不对

14. 下面级数绝对收敛的是（　　）

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$　　B $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{2}{n}$

C $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{\pi}{n})$　　D $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\frac{\pi}{4n}$

15. 下列函数列在所示区间 D 上不一致收敛的是（　　）

A $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$　$D=(-1,$　　B $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$　$D=(-\infty,+$

C $f_n(x)=\frac{x}{n}$　$D=[0,+\infty$　　D $f_n(x)=\frac{x}{n}$　$D=[0,1$

16. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛等价于（　　）

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛　　B $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散

C $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛且　　　发散　　D $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

17. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下面级数一定收敛的是（　　）

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+1)$　　B $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$　　C $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$　　D $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$

18. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，那么下列级数中发散的是（　　）

（A） $\sum_{n=1}^{\infty}2u_n$ （B） $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+1)$ （C） $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+10}$ （D） $1+\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

三、计算题

1. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}x^n$的收敛区间. 2. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(x-5)^n$的收敛域.

4. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}$在收敛区间内的和函数.

5. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的收敛域及其和函数.

6. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$的和函数.

7. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$的和函数.

8. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$的和函数.

9．设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^{n-1}$， $x\in[-1,1]$，计算积分$\int_0^x S(t)dt$.

10．设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$， $x\in(-\infty,+\infty)$，计算积分$\int_0^x S(t)dt$.

11．设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos nx,(0<r<1)$，计算积分$\int_0^{2\pi}S(x)dx$.

四、讨论下列级数的敛散性，需说明理由.

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$；

（3） $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$； （4） $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$； (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$.

（6） $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$

（7） $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\cdots$

（8） $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{5}+\cdots+\cos\frac{\pi}{n+2}+\cdots$

五、证明题.

1．证明:函数$f(x)=\sum\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,\infty)$内有连续的导函数.

2．若在区间I上,对任何自然数$n,|u_n(x)|\le v_n(x)$,证明:当$\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$在$I$上一收敛时级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上也一致收敛,且绝对收敛.

3．设函数项级数$\sum u_n(x)$在D上一致收敛于$S(x)$，函数$g(x)$在D上有界. 证明函数项级数$\sum g(x)u_n(x)$在D上一致收敛于$g(x)S(x)$.

4．设$u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$是$[a,b]$上的单调函数，证明若$\sum u_n(a)$与$\sum u_n(b)$都绝对收敛，则$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上绝对且一致收敛.

5．若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$都收敛且$a_n\le b_n\le c_n(n=1,2,\cdots)$ $a_n\le b_n\le c_n(n=1,2,\cdots)$，则$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛.

6．若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$也收敛，其逆如何？