

微分方程（数三）考研真题

一、选择题（将最佳答案的序号填写在括号内）

1. (06, 4分) 设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x), y_2(x)$,

C 为任意常数, 则该方程的通解是 ()

(A) $C[y_1(x) - y_2(x)]$. (B) $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$.

(C) $C[y_1(x) + y_2(x)]$. (D) $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$.

二、填空题

1. (97, 3分) 差分方程 $y_{t+1} - y_t = t2^t$ 的通解为 _____

2. (98, 3分) 差分方程 $2y_{t+1} + 10y_t - 5t = 0$ 的通解为 _____

3. (01, 3分) 某公司每年的工资总额在比上一年增加 20% 的基础上再追加 2 百万元, 若以 W_i 表示第 i 年的工资总额 (单位: 百万元), 则 W_i 所满足的差分方程是 _____

4. (05, 4分) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足 $y(1) = 2$ 的特解为 _____

5. (07, 4分) 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的特解为 _____

6. (08, 4分) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足 $y(1) = 1$ 的解为 _____

三、计算

1. (95, 6分) 已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x) = \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)dt + e^{2x}$, 求 $f(x)$

2. (96, 6分) 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$ 的通解.

3. (97, 6分) 设函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且满足方程

$$f(t) = e^{4\pi t^2} + \iint_{x^2 + y^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx dy, \text{ 求 } f(t)$$

4. (98, 7分) 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, 若由曲线 $y = f(x)$, 直线

$x = 1, x = t (t > 1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$V(t) = \frac{\pi}{3} [t^2 f(t) - f(1)], \text{ 试求 } y = f(x) \text{ 所满足的微分方程, 并求该微分方程满足条件 } y|_{x=2} = \frac{2}{9} \text{ 的解.}$$

5. (99, 6分) 设有微分方程 $y' - 2y = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$, 试求在

$(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数 $y = y(x)$, 使之在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内都满足所给方程,

且满足条件 $y(0) = 0$

6. (00, 6分) 求微分方程 $y'' - 2y' - e^{2x} = 0$ 满足条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 的解.

7. (03, 9分) 设 $F(x) = f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下

条件: $f'(x) = g(x), g'(x) = f(x)$ 且 $f(0) = 0, f(x) + g(x) = 2e^x$,

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程; (2) 求出 $F(x)$ 的表达式

8. (03, 4, 9分) 设 $y = f(x)$ 是第一象限内连接点 $A(0, 1), B(1, 0)$ 的一段连续曲线,

$M(x, y)$ 为该曲线上任意一点, 点 C 为 M 在 x 轴上的投影, O 为坐标原点, 若梯

形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}$, 求 $f(x)$ 的表达式.

9. (04, 4, 8分) 设 $f(u, v)$ 具有连续偏导数, 且满足 $f'_u(u, v) + f'_v(u, v) = uv$, 求

$y(x) = e^{-2x} f(x, x)$ 所满足的一阶微分方程, 并求其通解.

10. (06, 8分) 在 xOy 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1, 0)$, 其上任意点 $P(x, y) (x \neq 0)$

处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$) .

(I) 求 L 的方程

(II) 当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值.

11、(07, 4, 10 分) 设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 且满足

$$f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt + x^2$$

求 $f(x)$ 的表达式