

## 南阳师范学院《数学分析》第四部分（不定积分）自测题

### 一、判断正误题（判断下列各题是否正确，正确的划√，错误的划×）

1. 若  $f(x)$  可导，则  $d\left[\int f'(x)dx\right]=df(x)$ . ( )
2. 若  $\int f(\sin x)\cos xdx = F(x)+C$ ，则  $\int f(x)dx = F(\arcsin x)+C$ . ( )
3. 函数族  $y = \int \ln x dx$  中每个函数在  $(0, +\infty)$  内都是单调递增的. ( )
4. 设  $y = f(x)$ ，且  $\int f(x)dx = e^{x^2} + C$ ，则  $y'' - (2+4x^2)y = 0$ . ( )

### 二、填空题（将正确答案填写在横线上）

1. 若  $x \ln x$  是函数  $f(x)$  的一个原函数，则  $\int e^x f(e^x)dx =$  \_\_\_\_\_
2. 若  $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \arcsin \sqrt{x} + C$ ，则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_
3. 已知函数  $f(x)$  的一个原函数是  $\sin x$ ，则  $f'(x) =$  \_\_\_\_\_
4. 设  $f'(\ln x) = 1+x$  则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_

### 三、选择题（将正确答案的序号填写在括号内）

1. 若  $f(x) = x + \ln x$ ，则  $\int f'(x)dx =$  ( )  
A:  $1 + \frac{1}{x} + C$                       B:  $1 + \frac{1}{x}$   
C:  $x + \ln x$                           D:  $x + \ln x + C$
2. 若函数  $y = x$  是  $f(x)$  的一个原函数，则  $\int f(x)\cos x dx =$  ( )  
A:  $\sin x + C$                               B:  $-\sin x + C$   
C:  $x \sin x - \cos x + C$                       D:  $x \sin x - \cos x + C$
3.  $y = \int (2x+1)dx$  中过点  $(0,0)$  的函数在  $(-\infty, +\infty)$  内的极小值为 ( )  
A: 0                      B: 1                      C:  $\frac{1}{4}$                       D:  $-\frac{1}{4}$
4. 下列函数中可以作为某些函数在  $(-\infty, +\infty)$  上的原函数的是 ( )

A:  $F(x) = \sin x$

B:  $F(x) = \operatorname{sgn} x$

C:  $F(x) = x^{\frac{2}{3}}$

D:  $F(x) = |x|$

5. 若  $f(x)$  的导数是  $\frac{\ln x}{x}$ , 则  $\int xf''(x)dx = (\quad)$

A:  $\ln x + \ln^2 x + C$

B:  $\ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

C:  $\ln x + C$

D:  $\ln x + \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

6. 若  $f(x)$  的导数是  $\frac{\ln x}{x}$ , 则  $\int xf''(x)dx = (\quad)$

A:  $\ln x + \ln^2 x + C$

B:  $\ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

C:  $\ln x + C$

D:  $\ln x + \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

7. 设  $f'(x)$  连续, 下述等式正确的是 ( )

A、 $[\int f(x)dx]' = f(x) + c$

B、 $\int f'(x)dx = f(x) + 1$

C、 $\int f'(x)dx = f(x) + c$

D、 $\int f(x)dx - \int f(x)dx = 0$

8.  $f, g$  具有连续导数,  $F'(x) = f(x)$ , 下述等式成立的是 ( )

A、 $\int f(g(x))dx = F(g(x)) + C$

B、 $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$

C、 $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$

D、 $\int g(f(x))f'(x)dx = F(g(x)) + C$

#### 四、计算题

1. 求一曲线  $y = f(x)$ , 使曲线上每一点  $(x, y)$  处的切线斜率为  $2x$ , 且通过点  $(2, 5)$ .

2. (1)  $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

(2)  $\int \frac{1}{x(2-x)} \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} dx$

(3)  $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$

(4)  $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx$

3. 已知函数  $f(x)$  的一个原函数是  $\frac{\sin x}{x}$ , 求  $\int xf'(x)dx$ .

4. 已知函数  $f(x)$  的导数是  $\sin x + \sec^2 x$  且  $f(0) = 5$ , 求函数  $f(x)$ .

5. 设  $f(x) = e^{-3x}$ , 求  $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx$ .

6. 若  $x^x$  是  $f(x)$  的一个原函数, 求  $\int xf'(x)dx$ .

7. 试用多种解法求不定积分  $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$ .

8. 用第二换元积分法求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx;$$

$$(2) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}};$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} (a \neq b)$$

9. 求下列不定积分 (降幂法):

$$(1) \int (2x-1)\cos 3x dx;$$

$$(2) \int x^2 e^{3x} dx$$

10. 求下列不定积分 (升幂法):

$$(1) \int (2x-1)\ln x dx;$$

$$(2) \int (x^2-1)\arctan x dx;$$

$$(3) \int x^2 \arcsin x dx.$$

## 五、证明题

1. 设  $f'(x) = \frac{1}{x}$  且  $f(1) = 0$ , 证明对一切正数  $x, y$ ,  $f(xy) = f(x) + f(y)$  恒成立.

2. 验证下列等式

$$(1) \int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$(2) \int df(x) = f(x) + C$$

3. 验证  $y = \frac{x^2}{2} \operatorname{sgn} x$  是  $|x|$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的一个原函数.