第二节 常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

二、交错级数及其审敛法

三、绝对收敛与条件收敛

一、正项级数及其审敛法

若 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数 .(如调和级数, **p**级数)

定理 1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：它的部分和数列$\{s_n\}$有界 .

证 "必要性" 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 , 则$\{s_n\}$收敛 , 故有界.

"充分性" 由 $u_n \geq 0$, 所以部分和数列$\{s_n\}$单调递增, 又已知$\{s_n\}$有界, 故 $\{s_n\}$收敛 , 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛.

定理2(比较审敛法)

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数,且 $u_n \le v_n$ $(n=1, 2, \cdots)$.

（1）若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;(大的收敛，小的也收敛)

（2）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.(小的发散，大的也发散)

证（1）设级数$\sum v_n$收敛,其和为σ,则级数$\sum u_n$的部分和

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n \le v_1+v_2+\cdots+v_n \le \sigma \,(n=1, 2, \cdots),$$

即部分和数列$\{s_n\}$有界，因此由定理1级数$\sum u_n$收敛.

（2）反证法：利用（1）的结论.

定理2(比较审敛法)

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数,且$u_n \le v_n\ (n=1, 2, \cdots)$.

(1)若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;(大的收敛,小的也收敛)

(2)若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.(小的发散,大的也发散)

•推论

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数,且$u_n \le k v_n (k>0, n \ge N)$.

若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

例1 讨论 p 级数 $\boxed{1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots}$ (常数 $p>0$) 的敛散性.

正项级数

解（1）若 $p\le 1$, 因为对一切 $n\in Z^+$,

$$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 由比较审敛法可知 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

（2） 若 $p>1$, 因为当 $n-1\le x\le n$ 时, $\dfrac{1}{n^p}\le\dfrac{1}{x^p}$, 故

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\,\mathrm{d}x$$

$$\le\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$$

$$\left[1-\frac{1}{2^{p-1}}\right]+\left[\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right]$$

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^{p-1}}-\frac{1}{(k+1)^{p-1}}\right]=1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

故该级数收敛, 由比较审敛法知 p 级数收敛 .

p-级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$: 当 $p>1$ 时收敛,当 $p\leq 1$时发散.

调和级数与 p 级数是两个常用的比较级数.

练习　若存在$N\in Z^{+}$, 对一切$n\geq N$,

(1) $u_n\geq\frac{1}{n}$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

(2) $u_n\leq\frac{1}{n^p}$ $(p>1)$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

例2 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

证 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散

根据比较审敛法可知, 所给级数发散.

定理3 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$，则有

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时，两个级数同时收敛或发散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

$\sum u_n, \sum v_n$ 是两个**正项级数**, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$,

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时, 两个级数同时收敛或发散;

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时, $\sum u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时, $\sum u_n$ 也发散.

思考　取 $v_n = \dfrac{1}{n^p}$, 对正项级数 $\sum u_n$, 可得如下结论:

$$\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l \begin{cases} p \le 1,\ 0 < l \le \infty \Longrightarrow \sum u_n \ \underline{\text{发散}} \\ p > 1,\ 0 \le l < \infty \Longrightarrow \sum u_n \ \underline{\text{收敛}} \end{cases}$$

例3 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n} = 1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

例4 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性.

解 $\lim_{n\to\infty} n^2\ln\left[1+\frac{1}{n^2}\right] = \lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1}{n^2} = 1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛.

定理4 (比值审敛法, 达朗贝尔判别法

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .

(3) 当 $\rho=1$ 时, 级数可能收敛也可能发散.

例如 $p-$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}=1$

但 $\begin{cases} p>1, \text{ 级数收敛 ;} \\ p\le 1, \text{ 级数发散 .}\end{cases}$

例5 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\ (x>0)$ 的敛散性 .

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)x^n}{n x^{n-1}}=x$$

根据定理4可知:

当$0<x<1$时, 级数收敛 ;

当$x>1$时, 级数发散 ;

当$x=1$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} n$发散.

例6 证明级数

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}+\cdots$$

是收敛的.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$,

所以，根据比值审敛法可知所给级数收敛.

练习 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 的敛散性.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty$,

所以，根据比值审敛法可知所给级数发散.

定理5（根值审敛法，柯西判别法）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则

(1) 当 $\rho < 1$ 时，级数收敛；

(2) 当 $\rho > 1$ 时，级数发散．

(3) 当 $\rho = 1$ 时，级数可能收敛也可能发散．

例7 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 收敛．

解 $$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

由定理5可知该级数收敛．

二、交错级数及其审敛法

设 $u_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, 则各项符号正负相间的级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

称为**交错级数**.

定理6（Leibnitz 判别法）若交错级数满足条件:

(1) $u_n \ge u_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 且其和 $S \le u_1$, 其余项满足

$$|r_n| \le u_{n+1}.$$

证 $S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})\geq 0$

$$S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})$$

$$-u_{2n}\leq u_1$$

S_{2n}是单调递增有界数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S\leq u_1$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$

故级数收敛于S, 且 $S\leq u_1$, S_n的余项:

$$r_n=S-S_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots)$$

$$\therefore\quad |r_n|=u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots\leq u_{n+1}$$

用Leibnitz 判别法判别下列级数的敛散性:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$ 收敛

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\cdots$ 收敛

3) $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\cdots$ 收敛

上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛？

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$.

发散 收敛 收敛

三、绝对收敛与条件收敛

定义 对常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；

若原级数收敛，但取绝对值以后的级数发散，则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

例如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为条件收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{10^n}$$ 均为绝对收敛.

定理7. 绝对收敛的级数一定收敛 .

证　设$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 , 令

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

显然$v_n \ge 0$, 且 $v_n \le |u_n|$, 根据比较审敛法$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,

$$u_n = 2v_n - |u_n|$$

$$\Big\downarrow \ \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|,\ \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n \text{ 收敛}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛

例7 证明下列级数绝对收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$.

证 (1)因为 $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right|\le\frac{1}{n^4}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 收敛，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \text{收敛，因此} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4} \text{ 绝对收敛}.$$

(2) 令 $u_n = \frac{n^2}{e^n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\frac{n^2}{e^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{e} < 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n^2}{e^n}\right|$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛.

- 思考

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛？

提示 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n^2}{u_n}=\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

由比较判敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛。

注意：反之不成立。例如，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{ 收敛}，\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{ 发散}.$$

作业

P268　1 (2), (4) ;

2 (2), (3) ;

4 (1), (2), (4) ;

5 (1), (3), (5)