第十二章 无穷级数

$$\text{无穷级数}\begin{cases}\text{数项级数}\\\text{幂级数}\\\text{傅里叶级数}\end{cases}$$

$$\text{无穷级数是研究函数的工具}\begin{cases}\text{表示函数}\\\text{研究性质}\\\text{数值计算}\end{cases}$$

第一节 常数项级数的概念和性质

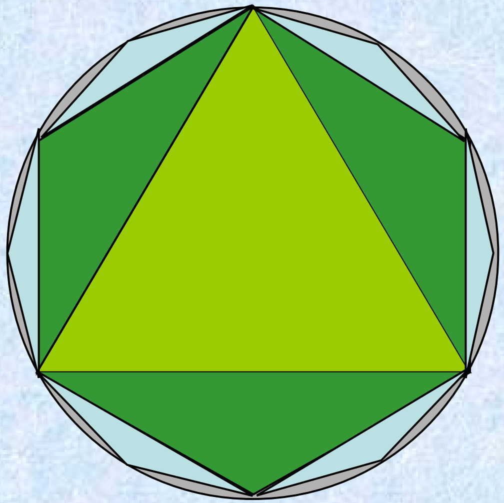
一、常数项级数的概念

二、收敛级数的基本性质

一、常数项级数的概念

引例 用圆内接正多边形面积逼近圆面积.

依次作圆内接正 3×2^n $(n=0,1,2,\cdots)$ 边形, 设 a_0 表示内接正三角形面积, a_k 表示边数增加时增加的面积, 则圆内接正 3×2^n 边形面积为



$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$n\to\infty$ 时, 这个和逼近于圆的面积 A .

即

$$A=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

定义 给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 将各项依次相加, 简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称上式为**无穷级数**, 其中第 n 项 u_n 叫做级数的**一般项**.

❖级数举例

级数的展开形式	简写形式	一般项	备注
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	调和级数
$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$	$\frac{1}{n(n+1)}$	——
$a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots$	$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$	aq^{n-1}	等比级数 几何级数
$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$	$\frac{1}{n^p}$	p级数

定义 给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 将各项依次相加, 简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称上式为**无穷级数**, 其中第 n 项 u_n 叫做级数的**一般项**,

级数的前 n 项和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

称为级数的**部分和**.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在, 则称无穷级数**收敛**,并称S为级数的**和**, 记作 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在, 则称无穷级数**发散** .

当级数收敛时, 称差值 $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$

为级数的**余项**. 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

（只在级数收敛的时候余项才有意义）

例1 讨论等比级数(又称**几何级数**)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

(q 称为公比) 的敛散性.

解 (1) 若 $q \neq 1$, 则部分和

$$S_n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^{n-1} = \frac{a - a q^n}{1 - q}$$

当 $|q| < 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$

因此级数收敛 , 其和为 $\frac{a}{1-q}$;

当 $|q| > 1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$,

因此级数发散 .

(2). 若 $|q|=1$, 则

当 $q=1$时, $S_n = na \to \infty$, 因此级数发散;

当 $q=-1$时， 级数成为

$$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$$

因此 $S_n = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在, 因此级数发散.

综合 (1)、(2)可知, $\boxed{\begin{array}{l} |q|<1 \text{ 时, 等比级数收敛;} \\ |q|\geq 1 \text{ 时, 等比级数发散.} \end{array}}$

例2 判别下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n};\qquad\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

解 (1)

$$S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=(\cancel{\ln 2}-\ln 1)+(\cancel{\ln 3}-\cancel{\ln 2})+\cancel{\cdots}+(\ln(n+1)-\cancel{\ln n})$$

$$=\ln(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty)$$

所以级数 (1) 发散；

技巧:

利用“拆项相消”求和

(2) $$S_n=\underline{\frac{1}{1\cdot 2}}+\underline{\frac{1}{2\cdot 3}}+\underline{\frac{1}{3\cdot 4}}+\cdots+\underline{\frac{1}{n\cdot(n+1)}}$$

$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\to 1\quad(n\to\infty)$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1 .

技巧:

利用 "拆项相消" 求和

练习　证明级数

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots$$

是发散的.

证　此级数的部分和为

$$s_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

显然，$\lim_{n\to\infty} s_n=\infty$，因此所给级数是发散的．

二、无穷级数的基本性质

性质1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和S, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ 也收敛，且其和为 cS .

证 令$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, 则$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} c u_k = c S_n$,

于是 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = c S$

这说明$\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$收敛，其和为 $c S$.

说明: 级数各项同乘以非零常数后其敛散性不变 .

性质2 设有两个收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\ \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛, 且其和为 $S\pm\sigma$.

证 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\ \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$, 则

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k\pm v_k)=S_n\pm\sigma_n\to S\pm\sigma\quad(n\to\infty)$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

说明

(1) 性质2 表明收敛级数可逐项相加或相减 .

(2) 若两级数中一个收敛一个发散 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散 . **(用反证法可证)**

注: 但若两级数都发散 , $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ *不一定发散.*

例如, 取 $u_n = (-1)^{2n}$, $v_n = (-1)^{2n+1}$,

而 $u_n + v_n = 0$

性质3 在级数中去掉、加上或改变有限项, 不会改变级数的敛散性.

证 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$ 的部分和为

$$\sigma_n = \sum_{l=1}^{n} u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$$

由于 $n \to \infty$ 时, σ_n 与 S_{k+n} 或者同时具有极限,或者同时没有极限, 所以两级数敛散性相同.

类似可证前面加上有限项的情况.

性质4 收敛级数任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变.

推论 若加括号后所成的级数发散，则原级数必发散.

用反证法可证

注意： 如果加括号后所成的级数收敛，则不能断定原来的级数 也收敛.

例如，$(1-1)+(1-1)+\cdots=0$，但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散.

性质5（级数收敛的必要条件）

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to 0} u_n = 0.$

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为s_n, 且 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$，则

$$\lim_{n\to 0} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0\,.$$

注 (1) 如果一般项不趋于零，则级数必发散.

因此此性质常用于判断级数发散.

例如，级数 $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1} + \cdots,$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1} \neq 0,$ 因此这个级数发散.

注 (2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 不能断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例如, 调和级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

虽然 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 但此级数**发散**.

事实上, 假设调和级数收敛于 S, 则

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$$

但 $\displaystyle S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

矛盾! 所以假设不真.

作业

P255　1(3) ;　 2(2);　3(2);　4(3);