第四节　函数展开成幂级数

一、泰勒 (**Taylor**) 级数

二、函数展开成幂级数

问题

函数$f(x)$是否能在某个区间内“展开成幂级数”，就是说，是否能找到这样一个幂级数，它在某区间内收敛，且其和恰好就是给定的函数$f(x)$.

如果能找到这样的幂级数，则称函数$f(x)$在该区间内能展开成幂级数.

一、泰勒 (Taylor) 级数

复习 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则在该邻域内有：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

等式右端的多项式当其项数趋于无穷时，将成为幂级数，这个幂级数就称为$f(x)$的泰勒级数.

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数, 则称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 $f(x)$ 的**泰勒级数**.

当 $x_0=0$ 时, 泰勒级数又称为**麦克劳林级数**.

待解决的问题:

(1) 对此级数, 它的收敛域是什么?

(2) 在收敛域上, 和函数是否为 $f(x)$?

定理1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式余项满足: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$

证明 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \,, \quad x \in U(x_0)$

令 $S_{n+1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

$$f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} [\, f(x) - S_{n+1}(x)] = 0 \,, \quad x \in U(x_0)$$

二、函数展开成幂级数

展开方法 $\begin{cases} \text{直接展开法 — 利用泰勒公式} \\ \text{间接展开法 — 利用已知其级数展开式的函数展开} \end{cases}$

1. 直接展开法

由泰勒级数理论可知, 函数 $f(x)$ 展开成幂级数的步骤如下：

第一步 求函数及其各阶导数在 $x=0$ 处的值；

第二步 写出麦克劳林级数，并求出其收敛半径 R；

第三步 判别在收敛区间$(-R, R)$ 内 $\lim_{n\to\infty} R_n(x)$是否为 0.

例1 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x,\ f^{(n)}(0)=1\ \ (n=0,1,\cdots)$, 故得级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

其收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}\Big/\dfrac{1}{(n+1)!}=+\infty$

对任何有限数 x, 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

(ξ 在0与 x 之间)

故 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$

例2 将 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $$f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\tfrac{\pi}{2})$$

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\(-1)^k, & n=2k+1\end{cases}\qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

得级数: $x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$

其收敛半径为 $R=+\infty$, 对任何有限数 x, 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$\therefore\ \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

$$x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

对上式两边求导可推出:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

2. 间接展开法

利用一些已知的函数展开式及幂级数的运算性质，将所给函数展开成 幂级数.

例4 将函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

把 x 换成 x^2 ，得

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

例3 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

从 0 到 x 积分, 得

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\ \boxed{-1<x\le 1}$$

上式右端的幂级数在 $x=1$ 收敛，而 $\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 有定义且连续, 所以展开式对 $x=1$ 也是成立的, 于是收敛域为 $-1<x\le 1$.

例4 将 $\sin x$ 展成 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解 $\sin x=\sin\left[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})\right]$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left((x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

例5 将 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解 $$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(3+x)}$$

$$=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}$$

$$(|x-1|<2)$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}+\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{8}\left[1-\frac{x-1}{4}+\frac{(x-1)^2}{4^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \qquad (-1<x<3)$$

思考

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处“有泰勒级数”与“能展成泰勒级数”有何不同？

提示: 后者必需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, 前者无此要求.

2. 如何求 $y=\sin^2 x$ 的幂级数？

提示: $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x \quad =\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n}, \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

作业

P285　4；5

备用题 **1.** 将下列函数展开成 x 的幂级数

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$$

解： $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$

$$\therefore\ f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$x=\pm1$ 时, 此级数条件收敛, $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$, 因此

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

2. 将 $f(x)=\ln(2+x-3x^2)$ 在$x=0$处展为幂级数.

解: $f(x)=\ln(1-x)+\ln 2+\ln(1+\frac{3}{2}x)$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\qquad(-1\le x<1)$$

$$\ln(1+\frac{3}{2}x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n\qquad(-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$

因此 $$f(x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n$$

$$=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1+(-\frac{3}{2})^n]x^n\qquad(-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$