第三节　幂级数

一、函数项级数的概念

二、幂级数及其收敛性

三、幂级数的运算

一、 函数项级数的概念

设 $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 为定义在区间 I 上的函数，称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 I 上的**函数项级数**.

对 $x_0 \in I$，若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，称 x_0 为其**收敛点**，所有收敛点的全体称为其**收敛域**；

若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散，称 x_0 为其**发散点**，所有发散点的全体称为其**发散域**.

在收敛域上, 函数项级数的和是 x 的函数 $S(x)$, 称它为级数的**和函数**, 并写成

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

和函数的定义域是收敛域

若用 $S_n(x)$ 表示函数项级数前 n 项的和, 即

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$$

令余项 $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$

则在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x),\qquad \lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$$

例如 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

它的收敛域是 $(-1,1)$，当 $x \in (-1,1)$时，有和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

思考 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$ 的收敛域是 $\underline{(-\infty,+\infty)}$

二、幂级数及其收敛性

形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 +$

$$\cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为**幂级数**，其中数列 $a_n\ (n=0,1,\cdots)$ 称为幂级数的**系数**.

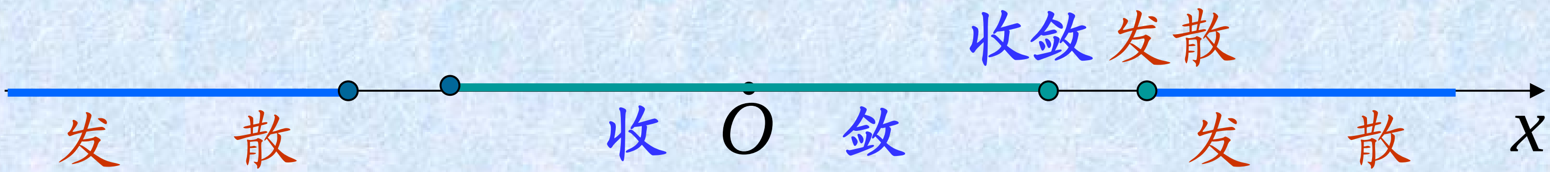
下面着重讨论 $x_0 = 0$ 的情形，即

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

例如，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$，$|x| < 1$ 即是此种情形.

定理1(Abel定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 点收敛，则对满足不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 幂级数都绝对收敛.

反之, 若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散，则对满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x，该幂级数也发散.



证　设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 则必有 $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, 于是存在

常数 $M > 0$, 使 $\left| a_n x_0^n \right| \le M \quad (n = 1, 2, \cdots)$

$$\left| a_n x^n \right| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = \left| a_n x_0^n \right| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

当 $|x| < |x_0|$ 时, $\underline{\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n x^n \right|$

也收敛, 故原幂级数绝对收敛 .

等比级数

反之, 若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散, 用反证法证明.

假设有一点 x_1 满足 $|x_1| > |x_0|$ 且使级数收敛, 则由前面的证明可知, 级数在点 x_0 也应收敛, 与所设矛盾, 故假设不真.

所以若当 $x = x_0$ 时幂级数发散, 则对一切满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的 x, 原幂级数也发散.

定理1（Abel定理）若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 点收敛，则对满足不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 幂级数都绝对收敛.

反之，若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散，则对满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x，该幂级数也发散.

由Abel 定理可以看出，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是以原点为中心的区间.

推论 如果幂级数$\sum a_n x^n$不是仅在点$x=0$一点收敛, 也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个完全确定的正数R存在, 使得

当$|x|<R$时, 幂级数绝对收敛;

当$|x|>R$时, 幂级数发散;

当$x=R$与$x=-R$时, 幂级数可能收敛也可能发散.

注： $\pm R$ 是幂级数收敛与发散的分界点.

R 称为收敛半径，$(-R, R)$ 称为收敛区间.

$(-R, R)$加上收敛的端点称为**收敛域**. 收敛域有以下四种情况:

$$(-R,R),[-R,R),(-R,R],[-R,R]$$

思考

1. 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 2$ 处条件收敛，问该级数收敛半径是多少？

答：根据Abel定理可知，级数在 $|x| < 2$ 收敛，

$|x| > 2$ 时发散．故收敛半径为 $R = 2$.

2. 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 3$ 处发散，则该级数在 $x = -5$ 处是收敛还是发散？

提示：发散

定理2 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$, 则

1) 当$\rho \neq 0$ 时， $R = {}^{1}\!/_{\rho}$;

2) 当$\rho = 0$ 时，$R = +\infty$;

3) 当$\rho = +\infty$时，$R = 0$.

证 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = \rho|x|$$

1) 若$\rho \neq 0$, 则根据比值审敛法可知:

当 $\rho|x| < 1$, 即 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时, 原级数收敛;

当 $\rho|x| > 1$, 即 $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时, 原级数发散.

因此级数的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

2) 若$\rho=0$, 则根据比值审敛法可知, 对任意 x 原级数绝对收敛, 因此 $R=+\infty$;

3) 若 $\rho=+\infty$, 则对除 $x=0$ 以外的一切 x 原级数发散, 因此 $R=0$.

说明 据此定理

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 的收敛半径为 } R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

例1 求幂级数 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$

的收敛半径及收敛域.

解 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$

对端点 $x=1$, 级数为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, 收敛;

对端点 $x=-1$, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$, 发散.

故收敛域为 $(-1,1]$.

例2 求下列幂级数的收敛域：

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n; \qquad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n.$$

解 (1)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$$

所以收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$(2)\quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

所以级数仅在 $x=0$ 处收敛.

例3 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径 .

解 级数缺少奇次幂项,不能直接应用定理2, 故直接由比值审敛法求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}}{\frac{[2n]!}{[n!]^2}x^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}x^2 = 4x^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } 4x^2<1 \text{ 即 } |x|<\frac{1}{2} \text{ 时级数收敛} \\ \text{当 } 4x^2>1 \text{ 即 } |x|>\frac{1}{2} \text{ 时级数发散}\end{array}\right\}\text{故收敛半径为 } R=\frac{1}{2}.$$

例4 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$ 的收敛域.

解 令 $t=x-1$, 级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^n$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n n}\Big/\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}=2$$

当 $t=2$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 此级数发散;

当 $t=-2$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 此级数条件收敛;

因此级数的收敛域为 $-2\le t<2$, 故原级数的收敛域为

$-2\le x-1<2$, 即 $-1\le x<3$.

三、幂级数的运算

❖幂级数的运算

设幂级数$\sum a_n x^n$及$\sum b_n x^n$分别在区间$(-R, R)$及$(-R', R')$内收敛, 则在$(-R, R)$与$(-R', R')$中较小的区间内有

加法: $\sum a_n x^n + \sum b_n x^n = \sum (a_n + b_n) x^n$,

减法: $\sum a_n x^n - \sum b_n x^n = \sum (a_n - b_n) x^n$.

乘法: $\sum a_n x^n \sum b_n x^n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x$

$$+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots$$

$$+ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n + \cdots.$$

❖幂级数的和函数的性质

性质1 幂级数$\sum a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛域I上连续.

性质2 幂级数$\sum a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛域I上可积,并且有逐项积分公式

$$\int_0^x s(x)dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \ (x \in I),$$

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

性质3 幂级数$\sum a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛区间$(-R, R)$内可导，并且有逐项求导公式

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (|x| < R)$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

例5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ 的和函数 $S(x)$.

解 易求出幂级数的收敛半径为 1，$x=\pm 1$ 时级数发散，故当 $x \in (-1,1)$ 时，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\Big)'$$

$$= x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

例6 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数 $S(x)$.

解 易求出幂级数的收敛半径为 1 , 且 $x=-1$时级数收敛 , $x=1$ 时级数发散, 则在 $[-1,1)$ 中, 当 $x\neq 0$ 时, 有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big)\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1-x)\qquad (0<|x|<1 \text{ 及 } x=-1)$$

$$S(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)\,,\quad (\,0 < |\,x\,| < 1 \text{ 及 } x = -1\,)$$

而 $x=0$ 时级数收敛于1, $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\ln(1-x)}{x}\right) = 1$,

因此由和函数的连续性得:

$$S(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}\ln(1-x)\,, & x \in [-1,0) \cup (0,1) \\ 1\,, & x = 0 \end{cases}$$

例7　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数．

解　由例2可知级数的收敛半径 $R=+\infty$．设

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=S(x)$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

故有

$$\left(\mathrm{e}^{-x}S(x)\right)'=0$$

因此得

$$S(x)=C\,\mathrm{e}^{x}$$

由 $S(0)=1$ 得 $S(x)=\mathrm{e}^{x}$，故得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^{x}$．

作业

P277　1　(1), (3), (4), (7)

2　(1), (3)

阿贝尔(1802 – 1829)

阿贝尔，N.H.

挪威数学家, 近代数学发展的先驱者. 他在22岁时就解决了用根式解5 次方程的不可能性问题, 他还研究了更广的一类代数方程, 后人发现这是一类交换群, 并称之为阿贝尔群. 在级数研究中, 他得到了一些判敛准则及幂级数求和定理. 他是椭圆函数论的奠基人之一, 他的一系列工作为椭圆函数研究开拓了道路. C. 埃尔米特曾说: 阿贝尔留下的思想可供数学家们工作150年.