定积分考研（数二）真题

一、选择题（将最佳答案的序号填写在括号内）

1.（95 年，3 分）曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围成的图形的面积可表示为（ ）

（A）$-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

（B）$\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

（C）$-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

（D）$\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

2.（96 年，3 分）设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)<f(x)<m$（m 为常数），由曲线 $y=f(x),y=g(x)$， $x=a,x=b$ 及所围平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体体积为（ ）

（A）$\int_a^b \pi\left[2m-f(x)+g(x)\right]\left[f(x)-g(x)\right]dx$

（B）$\int_a^b \pi\left[2m-f(x)-g(x)\right]\left[f(x)-g(x)\right]dx$

（C）$\int_a^b \pi\left[m-f(x)+g(x)\right]\left[f(x)-g(x)\right]dx$

（D）$\int_a^b \pi\left[2m-f(x)-g(x)\right]\left[f(x)-g(x)\right]dx$

3.（08 年，4 分）曲线方程为 $y=f(x)$ 的函数在区间 $[a,b]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx=(\ )$

（A）曲边梯形面积 ABCD

（B）梯形 ABCD 面积

（C）曲边三角形 ACD 面积

（D）三角形 ACD 面积

二、填空题

1.（96 年，3 分）曲线 $y=x+\dfrac{1}{x},x=2$ 及 $y=2$ 轴所围成的图形的面积为 $S=$______

2.（98 年，3 分）曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积为 $A=$______

3.（03 年，5 分）设曲线的极坐标方程为 $\rho=e^{a\theta}(a>0)$，则该曲线上相应于 θ 从 0 变到的 2π 一段弧与极轴所围成的图形的面积为______

4.（10 年，4 分）当 $0\le\theta\le\pi$ 时，对数螺线 $r=e^{\theta}$ 的弧长为____

5.（11 年，4 分）曲线 $y=\int_0^x \tan x dx\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 s 为______

三、计算

1. （94 年，9 分）求曲线 $y=3-\left|x^2-1\right|$ 与轴 x 围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体体积.

2. （95 年，5 分）求摆线 $\begin{cases} x=1-\cos t \\ y=t-\sin t \end{cases}$ 一拱 $(0\le t\le 2\pi)$ 的弧长.

3. （96 年，5 分）设有正椭球柱体，其底面的长短轴分别为 $2a,2b$，用过此柱体底面的短轴与底面成 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 角的平面截此柱体，得一锲形体，求此锲形体的体积 V.

4. （97 年，8 分）设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$M(r,\theta)$ 为 L 上任意一点，$M_0(2,0)$ 为 L 上一定点，若极径 OM_0,OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上，$M.M_0$ 两点间弧长值的一半，求曲线 L 的方程.

5. （99 年，8 分）设函数 $y(x)(x\ge 0)$ 二阶可导，且 $y'(x)\ge 0, y(0)=1$，过曲线 $y(x)$ 上任意一点 $p(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程。

6. （00 年，5 分）设 xoy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ 直线 $l: x+y=t\,(t\ge 0)$，若 $s(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求 $\int_0^x s(t)dt\,(x\ge 0)$.

7. （01 年，7 分）设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)(x\ge 1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\dfrac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\dfrac{d\rho}{ds}\right)$ 的值.

8.（02 年，7 分）某阀门的形状和大小如图所示，其中直线 l 为对称轴。阀门的上方都为矩形 $ABCD$，下方由二次抛物线与线段 AB 所围成，当水面与阀门的上端相平时，欲使阀门矩形部分承受的水压力与阀门下部承受的水压力之比为 5:4，阀门矩形部分的高 l 应为多少米？

9. （03 年，11 分）设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2})$，其上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 x 轴平分.

（1） 求曲线 $y=f(x)$ 的方程；

（2） 已知曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 l，试用 l 表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长 s.

10.（04 年, 10 分）有一平底容器，其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)(y\geq 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面（如图），容器的底面圆的半径为 2m. 根据设计要求，当以 $3m^3/\min$ 的速率向容器内注入液体时，液面的面积将以 $\pi m^2/\min$ 的速率均匀扩大(假设注入液体前,容器内无液体).

(1) 根据 t 时刻液面的面积，写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式；

(2) 求曲线 $x=\varphi(y)$ 的方程.

(注：m 表示长度单位米，min 表示时间单位分.)

11.（04 年, 12 分）曲线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0, x=t(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体, 其体积为 $V(t)$. 侧面积为 $S(t)$, 在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(1) 求 $\dfrac{S(t)}{F(t)}$　　(2) 计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$

12.（05 年, 11 分）如图，C_1 和 C_2 分别是 $y=\dfrac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y=e^x$ 的图象，过点 $(0,1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数的图象. 过 C_2 上任一点 M(x, y) 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y. 记 C_1, C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$；C_2, C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$，求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.

13.（06 年, 10 分）已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases}x=l^2+1\\ y=4l-t^2\end{cases}, (t\geq 0)$（1）讨论 L 的凹凸性；（2）过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线，求切点 (x_0,y_0)，并写出切线的方程；（3）求此切线 L（对应于 $x\leq x_0$ 的部分）及 x 轴所围成的平面图形的面积。

14.（08 年，10 分）曲线 $y=f(x)$ 满足 $f(0)=1$, 对于任意的 t 曲线是严格递增，在 x 轴上 $t>0$，该曲线与直线 $x=0, x=t(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体，其体积为 $V(t)$, 侧面积为 $S(t)$. 如果 $f(x)$ 二阶可导, 且 $\dfrac{S(t)}{V(t)}=2$，求曲线 $y=f(x)$.

15.（09 年, 10 分）设非负函数 $y=f(x)(x\geq 0)$。满足微分方程 $xy''-y'+2=0$，当曲线 $y=f(x)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域的面积为 D，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

16.（11 年, 11 分）一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而形成的曲面，该曲线由 $x^2+y^2=2y(y\geq\dfrac{1}{2})$ 与 $x^2+y^2=1(y\leq\dfrac{1}{2})$ 连接而成，(1）求容器的容积；(2）若将容器　内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？（长度单位：m，重力加速度 gm/s^2，水的密度为 $10^3kg/m^3$）