

南阳师范学院 《数学分析》 ---定积分

(数学与应用数学)

一、判断正误题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×)

1. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则对任意的三个常数 a, b, c , 都有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx. \quad (\quad)$$

2. $6 \leq \int_1^4 (1+x^2) dx \leq 10$.

(\quad)

3. 设函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则 $\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt, a \in R$. (\quad)

4. $\left| \int_a^b \sin^3 x dx \right| \leq \int_a^b |\sin^3 x| dx$ (其中 $a < b$) . (\quad)

5. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充要条件. (\quad)

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\frac{d}{dx} \left(\int_a^b x f(t) dt \right) = 0$. (\quad)

7. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x) \geq 0$, 且 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$. (\quad)

8. 若 $\int_0^x f(t) dt = \cos x e^x$, 则 $f(x) = e^x (\cos x - \sin x)$. (\quad)

9. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 单调, 则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积. (\quad)

10 曲线 $y = \int_0^x e^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是凸的, 在 $(0, \infty)$ 上是凹的. (\quad)

11. 如果 $\int_e^{e^2} \frac{\alpha}{x \ln x} dx = 1$, 则 $\alpha = e$. (\quad)

12. 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int_0^1 e^x f(e^x) dx = F(1) - F(0)$. (\quad)

13. $\int_{-1}^1 \frac{x^{2015}}{1+x^2} dx = 0$. (\quad)

14. 若函数 $f(x)$ 在 R 上连续, 则 $\int_a^b 3x^2 f(x^3) dx = \int_a^b f(t) d(t)$. (\quad)

15. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x^2} \sin t dt$ 是 x^2 的高阶无穷小. (\quad)

二、填空题 (将正确答案填写在横线上)

1. $f(x) = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的平均值为_____.

2. $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin^5 x dx =$ _____.

3. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $f(x) =$ _____.

4. $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 x \cos t^2 dt =$ _____

三、 选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 () .

- A $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 B $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界
C $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导 D $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微

2. 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上都连续, 则下列等式不一定成立的是 () .

- A $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
B $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k 为常数) .
C $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(x) dx$
D $\int_a^b f(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$

3. 设 $f(x)$ 是连续函数且 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则下列等式错误的是 () .

- A $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$ B $\left[\int_a^x F(t) dt \right]' = F(x)$
C $\int_a^x F'(t) dt = f(x)$ D $\left[\int_a^x F'(t) dt \right]' = f(x)$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\int_a^b f(x) dx = 1$, 求 $\int_a^b f(a+b-x) dx$ () .

- A 1 B 2 C -1 D -2 .

5. 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 则 $\int_0^1 f(1-x) dx =$ () .

- A 1 B 2 C -1 D -2

6. 在闭区间 $[-1, 1]$ 上不可积的函数是 () .

- A: $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ B: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

3. 设 $f(x)$ 有连续的导数, $f(0)=0$, $f'(0) \neq 0$, $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)f(t)dt$,

讨论当 k 取何值时, $F'(x)$ 与 x^k 是 $x \rightarrow 0$ 时的同阶无穷小.

4. 设函数 $F(x) = \int_1^x t(t-1)dt$. 求

(1) 求函数 $F(x)$ 的单调区间;

(2) 求函数 $F(x)$ 的极值.

五、综合题

1. 证明 若函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则 $\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt, a \in R$.

2. 证明 若函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 连续, 且 $f(x)$ 是偶函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

3. 证明 若函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 连续, 且 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 R 连续, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b \frac{1}{f(t)}dt, \quad x \in [a, b]$$

证明方程 $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内有且仅有一个根.

6. 叙述并证明积分第一中值定理.