

# 南阳师范学院 《数学分析》 ---定积分

(数学与应用数学)

## 一、判断正误题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×)

1. 若函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 则对任意的三个常数  $a, b, c$ , 都有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx. \quad ( \quad )$$

2.  $6 \leq \int_1^4 (1+x^2) dx \leq 10$  .

( \quad )

3. 设函数  $f(x)$  是以  $T$  为周期的连续函数, 则  $\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt, a \in R$ . ( \quad )

4.  $\left| \int_a^b \sin^3 x dx \right| \leq \int_a^b |\sin^3 x| dx$  (其中  $a < b$ ) . ( \quad )

5. 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续是函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积的充要条件. ( \quad )

6. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $\frac{d}{dx} \left( \int_a^b x f(t) dt \right) = 0$ . ( \quad )

7. 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(x) \geq 0$ , 且  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , 则  $f(x) \equiv 0$ . ( \quad )

8. 若  $\int_0^x f(t) dt = \cos x e^x$ , 则  $f(x) = e^x (\cos x - \sin x)$ . ( \quad )

9. 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  单调, 则函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  可积. ( \quad )

10 曲线  $y = \int_0^x e^{t^2} dt$  在  $(-\infty, 0)$  上是凸的, 在  $(0, \infty)$  上是凹的. ( \quad )

11. 如果  $\int_e^{e^2} \frac{\alpha}{x \ln x} dx = 1$ , 则  $\alpha = e$ . ( \quad )

12. 如果  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int_0^1 e^x f(e^x) dx = F(1) - F(0)$ . ( \quad )

13.  $\int_{-1}^1 \frac{x^{2015}}{1+x^2} dx = 0$ . ( \quad )

14. 若函数  $f(x)$  在  $R$  上连续, 则  $\int_a^b 3x^2 f(x^3) dx = \int_a^b f(t) d(t)$ . ( \quad )

15. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\int_0^{x^2} \sin t dt$  是  $x^2$  的高阶无穷小. ( \quad )

## 二、填空题 (将正确答案填写在横线上)

1.  $f(x) = \sin x$  在  $[0, \pi]$  上的平均值为\_\_\_\_\_.

---

2.  $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin^5 x dx =$  \_\_\_\_\_.

3. 设  $f(x)$  是连续函数, 且  $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

4.  $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 x \cos t^2 dt =$  \_\_\_\_\_

### 三、 选择题

1. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则 ( ) .

A  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续    B  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界

C  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导    D  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可微

2. 若函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $[a, b]$  上都连续, 则下列等式不一定成立的是 ( ) .

A  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

B  $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$  ( $k$  为常数) .

C  $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(x) dx$

D  $\int_a^b f(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$

3. 设  $f(x)$  是连续函数且  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , 则下列等式错误的是 ( ) .

A  $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$                       B  $\left[ \int_a^x F(t) dt \right]' = F(x)$

C  $\int_a^x F'(t) dt = f(x)$                               D  $\left[ \int_a^x F'(t) dt \right]' = f(x)$

4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $\int_a^b f(x) dx = 1$ , 求  $\int_a^b f(a+b-x) dx$  ( ) .

A 1                      B 2                      C -1                      D -2 .

5. 若  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续,  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ , 则  $\int_0^1 f(1-x) dx =$  ( ) .

A 1                      B 2                      C -1                      D -2

6. 在闭区间  $[-1, 1]$  上不可积的函数是 ( ) .

A:  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

B:  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$



---

3. 设  $f(x)$  有连续的导数,  $f(0)=0$ ,  $f'(0) \neq 0$ ,  $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)f(t)dt$ ,

讨论当  $k$  取何值时,  $F'(x)$  与  $x^k$  是  $x \rightarrow 0$  时的同阶无穷小.

4. 设函数  $F(x) = \int_1^x t(t-1)dt$ . 求

(1) 求函数  $F(x)$  的单调区间;

(2) 求函数  $F(x)$  的极值.

### 五、综合题

1. 证明 若函数  $f(x)$  是以  $T$  为周期的连续函数, 则  $\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt, a \in R$ .

2. 证明 若函数  $f(x)$  在  $[-a, a]$  连续, 且  $f(x)$  是偶函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

3. 证明 若函数  $f(x)$  在  $[-a, a]$  连续, 且  $f(x)$  是奇函数, 则  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ .

4. 设函数  $f(x)$  在  $R$  连续, 则  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ .

5. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ ,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b \frac{1}{f(t)}dt, \quad x \in [a, b]$$

证明方程  $F(x) = 0$  在  $(a, b)$  内有且仅有一个根.

6. 叙述并证明积分第一中值定理.