《高等数学》第二章——导数与微分练习题

练习题（A）

一、判断正误题（判断下列各题是否正确，正确的划√，错误的划×）

（1）若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ （ ）

（2）若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f'(x)|_{x=x_0}=f'(x_0)$ （ ）

（3）设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0\\ x^{\frac{1}{3}}, & x>0\end{cases}$，则函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处左导数存在，右导数不存在 （ ）

（4）若 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0,\\ -1, x<0.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 （ ）

（5） $f(x)=|x-1|x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内只有一个不可导的点 （ ）

（6）$[\ln(-x)]'=-\dfrac{1}{x}$ （ ）

（7）若 $y=e^{2x}+e^{-x}$，则 $y''-y'=2y$ （ ）

（8）曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t,\\ y=e^t\cos t,\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时相应点处的法线的斜率为 1 （ ）

（9）若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y-f'(x_0)\Delta x$ 是比 Δx 高阶的无穷小量. （ ）

（10）函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微且 $f'(x_0)\ne 0$，则 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ （ ）

（11）$(e^{ax})^{(100)}=a^{100}e^{ax}$ （ ）

（12)）$y=f(x)$ 在 x_0 可微的充要条件是 $y=f(x)$ 在 x_0 可导 （ ）

二、填空题（将正确答案填写在横线上）

1. 若 $f(x)=|x|$，则 $f_-'(x_0)=$________，$f_+'(x_0)=$________.
2. 等轴双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线的斜率为_____，切线方程为__________.
3. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=$_________
4. 若 $f(x)=e^{\sin x}$，则 $\dfrac{df}{dx}\Big|_{x=0}=$___________
5. 若 $\begin{cases}x=e^t+1,\\ y=e^{-t}-1,\end{cases}$ 则 $\dfrac{dy}{dx}=$______________
6. 若 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ 则 $f^{(n)}(x)=$____________
7. 若 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+99)$，则 $f'(0)=$___________
8. $[2\sin x+4\cos x]^{(10)}|_{x=0}=$_____________
9. 若 $y=x^3-x, x_0=2, \Delta x=0.002$，$dy|_{x_0=2,\Delta x=0.002}=$ __________________
10. $(\arctan x+arc\cot x)'=$ __________________

三、选择题（将正确答案的序号填写在括号内）

（1）一物体的运动方程是 $s=t^3+10$，则（ ）

A：在 $t=1$ 时的瞬时速度 $v=3$

B：在 $t=1$ 到 $t=2$ 时的平均速度 $\bar{v}=3$

C：在 $t=1$ 时的加速度 $a=1$

D：在 $t=1$ 时的加速度 $a=2$

（2）下列结论错误的是（　　　）

A：当 $\Delta x\to 0$ 时，若 Δy 与 Δx 是等价无穷小量，则 $f'(x_0)$ 存在且 $f'(x_0)=1$

B：当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 与 Δx 是同阶无穷小量，则 $f'(x_0)$ 存在但 $f'(x_0)\neq 0$

C：当 $\Delta x\to 0$ 时 Δy 是比 Δx 较高阶的无穷小量，则 $f'(x_0)$ 存在且 $f'(x_0)=0$

D：当 $\Delta x\to 0$ 时 Δy 是比 Δx 较低阶的无穷小量，则 $f'(x_0)$ 存在

（3）下列结论错误的是（　　　）

A：若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，则函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导

B：若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不连续，则函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可导

C：若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，则函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续

D：若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可导，则函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处也可能连续

（4）若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则（　　　）

A：函数 $|f(x)|$ 也在点 x_0 处一一定可导　　B：函数 $\sqrt{f(x)}$ 在点 x_0 处一定可导

C：函数 $2f^2(x)+1$ 在点 x_0 处一定可导　　D：函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在点 x_0 处一定可导

（5）下列结论错误的是（　　　）

A：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左、右导数都存在且相等

B：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导的充要条件是左、右导数都不存在

C：若左、右导数至少有一个不存在，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导

D：若左、右导数都存在但不相等，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导

（6）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，函数 $g(x)$ 在点 x_0 处不可导，则（　　　）

A：$f(x)\pm g(x)$ 在点 x_0 处一定可导

B：$f(x)\cdot g(x)$ 在点 x_0 处一定可导

C：$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 处一定可导

D：$\sin f(x)$ 在点 x_0 处一定可导

（7）函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，下列结论正确的是（　　　）

A：在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续且可导

B：在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续但在 $x=0$ 处不可导

C：在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处不可导

D：在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处不可微

（8）设 $u=u(x),v=v(x)$ 可微，则下列结论正确的是（　　）

A：$d(uv)=vdu+udv$　　B：$d(uv)=du\cdot dv$

C：$d(\dfrac{u}{v})=\dfrac{du}{dv}$　　D：$d(u+1)=du+1$

四、计算题

1. 已知 $y=e^x(\sin x-\cos x)$, 求 $y'|_{x=0}$

2. 设 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}}$，求 y'.

3. 求曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与法线方程.

4. 参数方程 $\begin{cases}x=\cos t+1\\ y=\sin t-1\end{cases}$ 确定函数 $y=f(x)$，求 y''.

5. 设 $y=f(x\sin x)$, 其中 $f(x)$ 可导，求 y'.

6. 利用一阶微分的形式不变性求 $y=\tan^2(1+x^2)$ 在 $x=1$ 处的微分 dy.

7. 利用一阶微分的形式不变性求$e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$的微分dy，并求出$\dfrac{dy}{dx}$.

五、证明题

1. 设函数$f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$，证明$dy=\dfrac{1}{x^2+1}dx$

2 . 证明：函数$f\left(x\right)=\begin{cases} ax+b, x>0 \\ e^x-1, x\le 0 \end{cases}$ 在$x=0$处可导的充要条件是$a=1,b=0$.

3. 证明：$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, x\ne 0 \\ 0 \quad x=0 \end{cases}$在定义域内处处可微.

《高等数学》第二章---导数与微分

练习题（B）

一、判断正误题（判断下列各题是否正确，正确的划√，错误的划×）

（1）若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$　（　）

（2）若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$　（　）

（3）若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则必有 $f'(x)|_{x=x_0}=\dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$　（　）

（4）设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ \ln(1+x), & x\ge 0\end{cases}$，则函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处左导数存在，右导数不存在　（　）

（5）若 $f(x)=|x-1|$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导　（　）

（6）$f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内均可导　（　）

（7）若函数 $f(u)$ 可导，则 $[f(\ln x)]'=f'(\ln x)$　（　）

（8）若 $y=x^2e^x$，则 $y''-2y'+y=0$　（　）

（9）曲线 $y^3+y^2=2x$ 在 $(1,1)$ 处的法线的斜率为 $\dfrac{2}{5}$　（　）

（10）若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\ne 0$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta y}=0$　（　）

（11）当 $|x|$ 很小时，则 $\sqrt[5]{1-3x}\approx 1+\dfrac{3}{5}x$　（　）

（12）若函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 内单调可导，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 I_x 内总是可导的，且有 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$　（　）

（13）$(\sin 2x)^{(50)}=2^{50}\sin 2x$　（　）

（14）$y=f(x)$ 在 x_0 不可微的充要条件是 $y=f(x)$ 在 x_0 不可导　（　）

（15）连续的曲线上每一点处都有切线　（　）

二、填空题（将正确答案填写在横线上）

1. 若 $f(x)=\begin{cases}x^3 & x\le 0\\ e^{4x} & x>0\end{cases}$，则 $f_-'(0)=$________，$f_+'(0)=$________.

2. 若 $y=3x^{10}+5x^7-6x^3+4$，则 $y^{(10)}=$________，$y^{(100)}=$________

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}=$________

4. 若 $f(x)=5\arcsin\dfrac{x}{2}$，则 $\dfrac{df}{dx}=$__________

5. 若 $y=(1+x^2)\arctan x$，则 $y''=$____________

6. 若方程 $xy-\sin(\pi y^2)=0$ 确定 y 是 x 的函数，则 $\dfrac{dy}{dx}=$___________

7. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)\ (n\ge 2)$，则 $f'(0)=$__________

8. $\left[e^{3x}+\cos 5x\right]^{(20)}\Big|_{x=0}=$____________

9. 若 $y=\ln(1+e^{x^2}), x_0=1, \Delta x=0.002$，$dy|_{x_0=1,\Delta x=0.002}=$________________

10. d ____________ $=\sec^2 4xdx$.

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan^2 x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=$ ________________

12. $\left(\arctan\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=$ ________________

三、选择题（将正确答案的序号填写在括号内）

（1）若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$，则$f(x)$在$x=0$处（　　）

A：可导，且$f'(0)=0$　B：可导，且$f'(0)\neq 0$

C：不可导　　D：以上答案都不正确

（2）若$f(x)$可导，$f'(0)=0, f(0)=0$，则$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f^2(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$（　　）

A：在$x=0$处连续但不可导　B：在$x=0$处可导

C：在$x=0$处不连续　D：在$x=0$处不可导

（3）下列结论错误的是（　　）

A：函数$f(x)$在点x_0可导是函数$f(x)$在点x_0连续的充分但非必要条件

B：函数$f(x)$在点x_0连续是函数$f(x)$在点x_0可导的充分但非必要条件

C：函数$f(x)$在点x_0可微是函数$f(x)$在点x_0连续的充分但非必要条件

D：函数$f(x)$在点x_0可微是函数$f(x)$在点x_0可导的充要条件

（4）若曲线$y=x^2+ax+b$和$y=x^3+x$在点$(1,2)$处相切（其中a,b是常数），

则a,b之值为（　　）

A：$a=2,b=-1$　B：$a=1,b=-3$

C：$a=0,b=-2$　D：$a=-3,b=1$

（5）下列结论正确的是（　　）

A：若左、右导数都存在，则函数$f(x)$在点x_0处可导

B：函数$f(x)$在点x_0处不可导的充要条件是左、右导数都不存在

C：若函数$f(x)$在点x_0处不可导，则函数$f(x)$在点x_0处左、右导数只有一个不存在

D：函数$f(x)$在点x_0处可导的充分必要条件是左、右导数都存在且相等

（6）若函数$f(x)$、$g(x)$在点x_0处都不可导，则（　　）

A：$f(x)\pm g(x)$在点x_0处一定不可导

B：$f(x)\cdot g(x)$在点x_0处一定不可导

C：$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在点x_0处一定不可导

D：$f(x)\pm g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$、$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在点x_0处可能可导，也可能不可导

（7）设$y=f(u),u=g(x)$均为可微函数，则复合函数$y=f(g(x))$的微分$dy=$（　　）

A：$f'(x)dx$　B：$f'(u)du$

C：$f(g'(x))dx$　D：$f(g(x))g'(x)dx$

四、计算题

1. 设 $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$，求 $y'|_{x=0}$

2. 设 $f(x)=\sin nx\cdot\cos^n x$ ，n 为常数，求 y'

3. 设 $y=x\cdot\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ ，求 y'.

4. 设 $y=(\sin x)^{\tan x}$，求 y'.

5. 曲线 $\begin{cases}x=2\sin 3\theta\cos\theta,\\ y=3\sin 3\theta\sin\theta,\end{cases}$ 上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 的点处的切线与法线方程.

7. 设 $y=f(e^x\sin^2 x)+f(e^x\cos^2 x)$，其中 $f(x)$ 可导，且 $f'(1)=1$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

8. 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(1)=1$， $f''(1)=1$，函数 $y=y(x)$

   由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定. 设 $z=f(y)$，求 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$.

9. 利用一阶微分的形式不变性求 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 的微分 dy，并求出 $\dfrac{dy}{dx}$.

10. 求 $\arcsin 0.5002$ 的近似值.

五、证明题

1. 设函数 $f(x),g(x)$ 可导，$y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$，证明：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$$

2 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^p\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，

证明：（1）当 $p=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续不可导；

（2）当 $p\geq 2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导，且

$$f'(x)=\begin{cases}px^{p-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{p-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

3. 证明函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & x<0\\ 0, & x=0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$ 在定义域内只有一个不可导点.

4. 证明：函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是在点 x_0 可导，且当在点 $f(x)$ 可微时，其微分一定是 $dy=f'(x_0)\Delta x$.

《高等数学》第二章——导数与微分

自测题（A）

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一. 判断题（判断下列各题是否正确，正确的划√，错误的划×。每小题 2 分，共 20 分）

1. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=0$，则 $f'(x_0)=0$ （ ）

2. 若函数 $f(x)$ 在点 x 处可导，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x+\Delta x)-f(x)$ 一定是无穷小量. （ ）

3. 基本初等函数在其定义域上处处可导. （ ）

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处左、右导数都存在. （ ）

5. 可导的偶函数的导数是奇函数. （ ）

6. 若函数 $f(x),g(x)$ 在点 x 处不可导，则 $f(x)\pm g(x)$ 在点 x 处也不可导. （ ）

7. $(\arcsin x+\arccos x)'=(\arctan x+\operatorname{arc}\cot x)'$. （ ）

8. 如果单调函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间内可导，而且 $\varphi'(y)\neq 0$，那么它的反函数 $y=f(x)$ 在对应的区间内也可导且 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$. （ ）

9. 若函数 $f(x)$ 在点 x 处可导，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y-f'(x)\Delta x$ 是比 Δx 高阶的无穷小. （ ）

10. 在区间 I 上，若 $f'(x)=g'(x)$，则必有 $f(x)=g(x)$ （ ）

二. 单项选择题（在每小题的备选答案中选出一个正确答案，并将正确答案的代码填在题干上的括号内。每小题 2 分，共 12 分）

1. 下列结论错误的是（ ）

A：若函数 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 不存在，则函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可导

B：当 $\Delta x\to 0$ 时，若 Δy 是比 Δx 较低阶的无穷小量，则函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可导

C：若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的左右导数至少有一个不存在在，则函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可导

D：若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的左右导数都存在，则函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导

2. $f(x)=|\sin x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不可导点有（ ）

A： 1 个　　B：2 个　　C： 3 个　　D：无数个

3. 设 $u=u(x),v=v(x)$ 可导，则下列结论正确的是（ ）

A： $(uv)'=u'v+uv'$　　B： $(uv)'=u'\cdot v'$

C： $(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'}{v'}$　　D： $(u+1)'=u'+1$

4. 设 $y=f(u),u=g(x)$ 均为可微函数，则复合函数 $y=f(g(x))$ 的微分 $dy=$ （ ）

A： $f'(x)dx$　　B： $f'(u)du$　　C： $f(g'(x))dx$　　D： $f(g(x))g'(x)dx$

5. 下列结论错误的是（ ）

A：若 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微

B：若 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不连续，则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可微

C：若 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微，则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续

D：若 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可微，则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处也可能连续

6. 下列结论正确的是（ ）

A：函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 在定义域内处处连续且可导

B：函数 $f(x)=\max\{x,1\}$ 在定义域内处处连续且可导

C：函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在定义域内处处连续且可导

D：函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}$ 在定义域内处处连续且只有一个不可导的点

三．填空题（将正确答案填写在空格上，每小题 2 分，共 16 分）

1. $f(0)=0, f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$________

2. 设 $f'(x_0)$ 存在，当 $\Delta x\to 0$ 时，若 Δy 与 Δx 是等价无穷小量，则 $f'(x_0)=$____.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=$__________ .

4. 若 $f(x)=\ln(\ln x)$，则 $\dfrac{df}{dx}=$______________ .

5. $f(x)=2^{\sin x}$，则 $f''(0)=$__

6. $\left[\sin x+\cos x+e^x+x^{101}+x^{99}\right]^{(100)}\Big|_{x=0}=$______________

7. 函数 $f(u)$ 可导，并且 $f'(1)=0.5$， $y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=1$ 处取得增

$\Delta x=0.1$ 时应的函数增量 Δy 的线性主部为________

8. 已知物体的运动规律是 $h=3t+\frac{1}{2}t^3$，则该物体在 $t=2s$ 时的加速度为______________ .

四．计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 已知 $y=e^x(\sin 2x-\cos 2x)$，求 $y'|_{x=0}$.

2. 已知函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}+1$， 求 $f'(0)$.

3. 已知 $y=x^{x^2}$，求 dy.（6 分）

4. 已知曲线 $\begin{cases} x=\cos^3 2t \\ y=\sin^3 2t \end{cases}$，求该曲线在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 时的切线方程.

5. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y+xy-x+1=0$ 所确定的隐函数. 求微分 dy.

五．证明题（共 22 分）

1. 证明函数 $f(x)=|x-1|$ 在 $x=1$ 处连续但不可导.（8 分）

2. 证明函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在定义域内处处可导，并且

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$ （8 分）

3. 设 $x^2-y^2=1$，证明 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{y^3}(y\neq 0)$. （6 分）

《高等数学》第二章——导数与微分

自测题（B）

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一. 判断题（判断下列各题是否正确，正确的划√，错误的划×。每小题 2 分，共 20 分）

1. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则必有 $\dfrac{df(x_0)}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.　（ ）

2. 若函数 $f(x)$ 在点 x 处可微，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x+\Delta x)-f(x)$ 一定是无穷小量.　（ ）

3. 初等函数在其定义区间上处处可导.　（ ）

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处左、右导数都存在.　（ ）

5. 若 $u=u(x), v=v(x)$ 可导，则 $(uv)'=u'\cdot v'$，且 $(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'}{v'}$　（ ）

6. 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x 处不可导，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x 处也不可导.　（ ）

7. $(\arctan x)'-(\arcsin x\cdot\arccos x)'=\dfrac{2}{1-x^4}$.　（ ）

8. 如果单调函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间内可导，那么它的反函数 $y=f(x)$ 在对应的区间内也可导且 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$.　（ ）

9. 若函数 $f(x)$ 在点 x 处可导，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y-f'(x)\Delta x$ 是与 Δx 等价的无穷小.　（ ）

10. 在区间 I 上，若 $f'(x)=g'(x)$，则必有 $f(x)=g(x)+1$　（ ）

二. 单项选择题（在每小题的备选答案中选出一个正确答案，并将正确答案的代码填在题干上的括号内。每小题 2 分，共 12 分）

1. 下列结论错误的是（ ）

A：若函数 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ 不存在，则函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可导

B：函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导

C：函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续是函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导的充分不必要条件

D：函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微是函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的充分不必要条件

2. $f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot\tan x$ 在定义域内不可导点有（ ）

A： 1 个　　B：2 个　　C： 3 个　　D：无数个

3. 则下列结论正确的是（ ）

A：可导的偶函数的导数是偶函数

B：可导的奇函数的导数是奇函数

C：可导的偶函数的导数是奇函数

D：可导的周期函数的导数不是周期函数

4. 设 $y=f(u), u=g(x)$ 均为可微函数，则复合函数 $y=f(g(x))$ 的微分 $dy=$ （ ）

A： $f'(x)dx$　　B： $f'(u)du$　　C： $f(g'(x))dx$　　D： $f(g(x))g'(x)dx$

5. 若 $f(x)=x^{100}+2x^{98}-6x^3+4x+1$，则（ ）

A：当 $k=99$ 时，$f^{(k)}(x)=99!x$　　B：当 $k=100$ 时，$f^{(k)}(x)=0$

C：当 $k>100$ 时，$f^{(k)}(1)=1$　　D：以上答案都不正确

6. 下列结论正确的是（　）

A：函数 $f(x)=|\sin x|$ 在定义域内处处连续且可导

B：函数 $f(x)=\max\{x,1\}$ 在定义域内处处连续且可导

C：函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在定义域内只有一个不可导的点.

D：函数 $f(x)=[x]$ 在 $[1,2]$ 处处连续且可导

三．填空题（将正确答案填写在空格上，每小题 2 分，共 12 分）

1. 设 $f'(x_0)$ 存在，当 $\Delta x\to 0$ 时，若 Δy 与 Δx 是高阶无穷小量，则 $f'(x_0)=$______ .

2. 若 $f(x_0)=0, f'(x_0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{10}(x)}{x-x_0}=$________.

3. $\left.\left(2^{-x}\right)'\right|_{x=-1}=$______________ .

4. $\left.\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)^{(100)}\right|_{x=0}=$_____________.

5. 函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2\ln x)$ 当自变量 x 在 $x=1$ 处取得增量 $\Delta x=0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(0)=$________.

6. 若曲线 $y=ax^2+b$ 与 $y=2\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处相切，则 $a=$____，$b=$_____.

四．计算题（共 36 分）

1. 已知 $y=\ln\left[\cos\left(1-x^2\right)\right]$，求 y'.（6 分）

2. 已知函数 $y=\left(1+x^2\right)\arctan x$ ，求 $f''(0)$.（7 分）

3. 已知 $y=(\sin x)^{\tan 2x}$，求 dy .（7 分）

4. 已知 $\begin{cases} x=\cos^3 2t \\ y=\sin^3 2t \end{cases}$ ，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.（8 分）

5. 设函数 $y=f(x)$ 由方程方程 $y-xe^y+1=0$ 所确定，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的法线方程.（8 分）

五．证明题（共 20 分）

1. 证明函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}\sin x$ 在 $x=0$ 连续且可导（6 分）

2. 证明函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin x}-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$ 在定义域内处处可导，并且

$$f'(x)=\begin{cases} e^{\sin x}\cos x & x<0 \\ 1, & x=0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0 \end{cases}.$$（8 分）

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=e^{f(x)}, f(1)=0$，证明：

$$f^{(n)}(1)=(n-1)!$$（6 分）