# 第一部分　矩阵与行列式

一、选择题

1.设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{13} & a_{11}+a_{12} \\ 2a_{21} & a_{23} & a_{21}+a_{22} \\ 2a_{31} & a_{33} & a_{31}+a_{32} \end{bmatrix}$，且 $|A|=m$，则 $|B|=$

（A）$m$；（B）$-8m$；（C）$2m$；（D）$-2m$。

2.下列 n 阶行列式中，取值必为-1 的是

（A）$\begin{vmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{vmatrix}$；　（B）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$；

（C）$\begin{vmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$；　（D）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均为 4 维列向量，$A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1], B=[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2]$，且

$|A|=1, |B|=2$，则 $|A+B|=$

（A）9；　（B）6；　（C）3；　（D）1.

4.设 $A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 是三阶矩阵，则 $|A|=$

（A）$|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1|$；　（B）$|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1|$；

（C）$|\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_1|$；　（D）$|\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_1|$。

5.已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}$ 都是 3 维列向量，且行列式

$|\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\gamma}|=|\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{\gamma}|=|\boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\gamma}|=|\boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{\gamma}|=3$，

那么 $|-2\boldsymbol{\gamma} \quad \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2|=$

（A）-18；　（B）-36；　（C）64；　（D）-96.

6.设 n 阶矩阵 $A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n], B=[\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}]$，若行列式 $|A|=1$，则 $|A-B|=$

（A）0；　（B）2；　（C）$1+(-1)^{n+1}$；　（D）$1+(-1)^{n}$

7.设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&-2&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 $B$ 满足 $AB+B+A+2E=O$，则 $|B+E|=$

（A）-6；（B）6；（C）$-\dfrac{1}{12}$；（D）$\dfrac{1}{12}$

8.已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&3\\0&2&5\end{bmatrix}$，矩阵 $B$ 满足 $A^{*}B+2A^{-1}=B$，其中 $A^{*}$ 是 $A$ 的伴随矩阵，则 $|B|=$

（A）$\dfrac{2}{15}$；（B）$\dfrac{2}{9}$；（C）$\dfrac{1}{30}$；（D）$\dfrac{1}{12}$。

9.设 $A$ 为三阶方阵，$A^{*}$ 是 $A$ 的伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{3}$，则 $|4A-(3A^{*})^{-1}|=$

（A）$\dfrac{1}{3}$；（B）3；（C）6；（D）9.

10.已知 $2n$ 阶行列式 $D$ 的某一列元素及其余子式都等于 $a$，则 $D=$

（A）0；（B）$a^{2}$；（C）$-a^{2}$；（D）$na^{2}$。

11.设 $A$ 是三阶矩阵，$A^{*}$ 是 $A$ 的伴随矩阵，已知 $A$ 的每行元素之和为 $k$，$A^{*}$ 的每行元素之和为 $m$，则 $|A|=$

（A）$km$；（B）$(-1)^{n}km$；（C）$\dfrac{m}{k}$；（D）$(-1)^{n}\dfrac{k}{m}$。

12.设 A 是三阶矩阵，其中 $a_{11}\neq 0$，$A_{ij}=a_{ij},i=1,2,3,\ j=1,2,3$，则 $|2A^{T}|=$

（A）0；（B）2；（C）4；（D）8.

13.设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，且 $n>m$，则必有

（A）$|AB|=0$；（B）$|BA|=0$；（C）$|AB|=|BA|$；（D）$\big||AB|AB\big|=|AB||AB|$。

14.设 $A,B$ 是 $n$ 阶矩阵，则下列结论正确的是

（A）$AB=O\Leftrightarrow A=O$ 且 $B=O$；

（B）$A=O\Leftrightarrow |A|=0$；

（C）$|AB|=0\Leftrightarrow |A|=0$ 或 $|B|=0$；

（D）$|A|=1\Leftrightarrow A=E$。

15.设 $A=\begin{bmatrix}0&0&5&2\\0&0&2&1\\1&3&0&0\\1&2&0&0\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$

（A）$\begin{bmatrix}0&0&1&-2\\0&0&-2&5\\2&-3&0&0\\-1&1&0&0\end{bmatrix}$；（B）$\begin{bmatrix}0&0&-2&3\\0&0&1&-1\\1&-2&0&0\\-2&5&0&0\end{bmatrix}$；

（C）$\begin{bmatrix}0&0&1&-3\\0&0&-1&2\\1&-2&0&0\\-2&5&0&0\end{bmatrix}$；（D）$\begin{bmatrix}0&0&-1&3\\0&0&1&-2\\-1&2&0&0\\2&-5&0&0\end{bmatrix}$。

16.设 $A,B$ 均为 n 阶可逆矩阵，正确的法则是

（A）$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$；

（B）$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$；

（C）$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$；

（D）$(AB)^*=B^*A^*$。

17.设 $A$ 是 $n$ 阶可逆阵，则下列等式不成立的是

（A）$(A+A^{-1})^2=A^2+2AA^{-1}+(A^{-1})^2$；

（B）$(A+A^T)^2=A^2+2AA^T+(A^T)^2$；

（C）$(A+A^*)^2=A^2+2AA^*+(A^*)^2$；

（D）$(A+E)^2=A^2+2AE+E^2$。

18.设 $A,B$ 均为 $n$ 阶可逆矩阵，且 $(A+B)^2=E$，则 $(E+BA^{-1})^{-1}=$

（A）$(A+B)B$；（B）$E+AB^{-1}$；（C）$A(A+B)$；（D）$(A+B)A$。

19. 设 $A,B$ 均为 $n$ 阶方阵，且 $(AB)^2=E$，则必有

（A）$A^{-1}=B$；（B）$AB=E$ 或 $AB=-E$；（C）$AB=E$；（D）$A^{-1}=BAB$

20 下列命题中，（1）如果矩阵 $AB=E$，则 $A$ 可逆，且 $A^{-1}=B$；（2）如果 $n$ 阶矩阵 $A,B$ 满

足$(AB)^2=E$，则$(BA)^2=E$；（3）如果矩阵$A,B$均为$n$阶不可逆，则$A+B$必不可逆；（4）如果矩阵$A,B$均不可逆，则$AB$必不可逆。

上述命题中，正确的命题有
（A）（1）（2）；（B）（1）（4）；（C）（2）（3）；（D）（2）（4）。

21. 设$A,B$均为$n$阶矩阵，且$AB=A+B$，则

（1）若$A$可逆，则$B$可逆，（2）若$B$可逆，则$A+B$可逆，（3）若$A+B$可逆，则$AB$可逆，（4）$A-E$恒可逆。
上述命题中，正确的命题共有
（A）1 个；（B）2 个；（C）3 个；（D）4 个。

22. 关于命题“方阵$A$满足$A^2=A$，且$A\neq E$，则$A$不可逆”有如下四种证明，正确的是

（A）由于$A^2=A$，所以$|A|^2=|A|$，故$|A|(|A|-1)=0$，因为$A\neq E$，故$|A|\neq 1$，因此$|A|=0$，$A$不可逆。

（B）由于$A^2=A$，故$A(A-E)=0$，由于$A\neq E$，从而$A-E\neq O$，故$A=O$，所以$A$不可逆。

（C）反证法：若$A$可逆，在$A^2=A$两边左乘$A^{-1}$，得$A=E$，与假设条件$A\neq E$矛盾，所以$A$不可逆。

（D）由于$A^2=A$，故$A(A-E)=0$，从而$|A||A-E|=0$，而$A\neq E$，所以$|A-E|\neq 0$，因此$|A|=0$，$A$不可逆。

23. 设$A,B$均为$n$阶对称矩阵，则下列结论不正确的是

（A）$A+B$是对称矩阵。（B）$AB$是对称矩阵。

（C）$A^*+B*$是对称矩阵。（D）$A-2B$是对称矩阵。

24. 设$A,B$均为三阶反对称矩阵，且$AB=BA$，则下列结论不正确的是

（A）$A+B$是反对称矩阵。（B）$AB$是对称矩阵。

（C）$A^*+B*$是反对称矩阵。（D）$2A+3B$是反对称矩阵。

25. 设$A=E-2\xi\xi^T$，其中$\xi=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$，且有$\xi^T\xi=1$，则结论（1）$A$是对称阵；（2）$A^2$是单位阵；（3）A 是正交阵；（4）A 是可逆阵中正确的个数是

（A）1.　（2）2.　（3）3.　（4）4.

26. 设 A 为正交矩阵，则下列不一定为正交阵的是

（A） $A^T$ 。（B） $A^2$ 。（3） $A^*$ 。（4） $kA(k\neq 0)$ 。

27. 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+2a_{11} & a_{32}+2a_{12} & a_{33}+2a_{13} \end{bmatrix}$,

$P_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, P_3=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $B=$

（A） $P_1P_3A$ 。 （B） $P_2P_3A$ 。（C） $AP_3P_2$ 。（D） $AP_1P_3$ 。

28.已知 $A,B$ 均是三阶矩阵，将 $A$ 中第 3 行得-2 倍加至第 2 行得到矩阵 $A_1$，将 $B$ 中第 2 列加至第 1 列得到矩阵 $B_1$，又知 $A_1B_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $AB=$

（A） $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$。（B） $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$。（C） $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$。（D） $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$。

29.设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，那么 $\left(P^{-1}\right)^{2012} A(Q^{2011})^{-1}=$

（A） $\begin{bmatrix} 8045 & 10057 & 12069 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$。（B） $\begin{bmatrix} 4023 & 2 & 3 \\ 10059 & 5 & 6 \\ 16095 & 8 & 9 \end{bmatrix}$。

（C） $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2015 & 4027 & 6039 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$。 （D） $\begin{bmatrix} 1 & 2013 & 3 \\ 4 & 8049 & 6 \\ 7 & 14085 & 9 \end{bmatrix}$。

30.设 $A$ 与 $B$ 均为 $n$ 阶矩阵，且 $A$ 与 $B$ 等价，则不正确的命题是

（A） $|A|>0$，则 $|B|>0$。

（B）如果 $|A|\neq 0$，则有可逆矩阵 $P$ 使 $PB=E$ 。

（C）如果 $A$ 等价于 $E$，则 $B$ 是可逆矩阵。

（D）有可逆矩阵 $P$ 与 $Q$，使 $PAQ=B$ 。

31.设 $A=\begin{bmatrix} a & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & a & -3 \end{bmatrix}$，$B$ 是 $4\times 2$ 的非零矩阵，且 $AB=0$，则

（A）$a=1$ 时，$B$ 的秩必为 2.　（B）$a=1$ 时，$B$ 的秩必为 1.
（C）$a\neq 1$ 时，$B$ 的秩必为 1.　（D）$a\neq 1$ 时，$B$ 的秩必为 2.

32.若 $A,A^*$ 和 $B$ 均是 $n$ 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则必有 $r(B)=$

（A）1.　（B）2.　（C）$n-1$。　（D）条件不够不能确定。

33.已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$，$A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，若 $r(A^*)=1$，则 $a=$

（A）3.　（B）2.　（C）1.　（D）1 或 3.

34.设 $A$ 为四阶方阵，且满足 $A^2=A$，则 $r(A)+r(A-E)=$

（A）4.　（B）3.　（C）2.　（D）1.

二、填空题

1. $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix}=$ ______.

2. $\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2+b & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3+b & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4+b \end{vmatrix}=$ ________.

3. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & d_2 \end{vmatrix}=$ ________.

4.行列式 $D=\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=$ _____.

5.行列式$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4\\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4\\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4\end{vmatrix}=$______.

6.方程$\begin{vmatrix}x & a & b\\ a & x & b\\ a & b & x\end{vmatrix}=0$的根是__________。

7.设$f(x)=\begin{vmatrix}1 & 0 & x\\ 1 & 2 & x^2\\ 1 & 3 & x^3\end{vmatrix}$，则$f(x+1)-f(x)=$_______.

8.在$xOy$平面上，平面曲线方程$y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & x\\ 3 & 9 & x^2\end{vmatrix}$，则平面曲线与$x$轴的交点的坐标是_____.

9.设$A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$是 3 阶矩阵，且$|A|=4$，若$B=[\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3]$，则$|B|=$______.

10.设四阶方阵$A=[\boldsymbol{\alpha},\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4],A=[\boldsymbol{\beta},\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$，其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$均为四维列向量，且$|A|=4,|B|=-1$，则$|A-3B|=$_______.

11.若三阶矩阵$A$与$B$相似，矩阵$A$的特征值为 1,3，-2，$B^*$是$B$的伴随矩阵，则行列式$\left|\left(\frac{1}{2}A\right)^T B^*\right|=$______.

12.设四阶行列式$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & 4 & 6\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2\end{vmatrix}$，则$A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}=$_____.

13.设$\boldsymbol{\alpha}=(1,3,-2)^T,\boldsymbol{\beta}=(2,0,0)^T,A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，则$A^3=$______.

14.设$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$，则$A^{99}=$________.

15.若 $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&4&0\\0&0&5\end{bmatrix}$，则矩阵 $A$ 的伴随矩阵 $A^*=$__________.

16.已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,0)^T$ 且

$A\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1)^T,A\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1)^T,A\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-4)^T$，则 $A=$_________.

17.设 $A=E+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 $n$ 维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$，则 $(A+2E)^{-1}=$__________.

18.设 $A$ 是 $n$ 阶矩阵，满足 $A^5=O$，则 $(E-A)^{-1}=$__________.

19.设 $A,B$ 均为三阶矩阵，$E$ 是三阶单位矩阵，已知 $AB=2A+3B$，$A=\begin{bmatrix}9&0&-6\\0&15&0\\0&0&21\end{bmatrix}$，

则 $(B-2E)^{-1}=$__________.

20.设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\6&1&0\\3&6&1\end{bmatrix}$，$B=(E-A)(E+2A)^{-1}$，则 $(B-E)^{-1}=$________.

21.四阶矩阵 A 和 B 满足 $2ABA^{-1}=AB+6E$，若 $A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-1&0\end{bmatrix}$，则 $B=$_________.

22.设矩阵 $A$ 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}4&-2&0&0\\-3&1&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$，则 $A=$__________.

23.设 $A=\begin{bmatrix}1&a&a^2&a^3\\0&1&a&a^2\\0&0&1&a\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$A_{ij}$ 是 $|A|$ 中元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}=$________.

24.设 $A$ 为 $n$ 阶可逆矩阵，其每一行元素之和都等于 $a$，则 $A^{-1}$ 每一行的元素之和为______.

25.已知三阶矩阵 $A$ 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，则矩阵 $A$ 的伴随矩阵 $A^*$ 的逆矩阵

$(A^*)^{-1} =$ ____.

26. 已 知 $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$， 若 $X$ 满 足 $AX+2B=BA+2X$， 那 么 $X^2 =$ ________.

27.设 $A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\2&1&5\\0&1&1\end{bmatrix}$， $B$ 是三阶矩阵，则满足 $AB=O$ 的所有的 $B=$ ______.

28.若 $\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2&3\\4&6\end{bmatrix}$，则 $X=$ ______.

29.已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&1&-1&2\\0&-1&2&3\\0&0&1&4\\0&0&0&2\end{bmatrix}$，则秩 $r(AB+2A)=$ ___________.

30.设 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$， $A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，则 $r\left((A^*)^*\right)=$ ____.

31.设 $A$ 是五阶矩阵，$A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，若 $\eta_1,\eta_2$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的两个坐标不成比例的解，那么 $r(A^*)=$ ______.

32.设 $A=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&-2&2\end{bmatrix}$ 经初等行变换化成 3 阶梯形矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&-2&2\\0&2&-1\end{bmatrix}$，初等变换过程如下 $A=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&-2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&2\\0&6&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&2\\0&2&-1\end{bmatrix}=B$。故矩阵在可逆阵 $P$，使得 $PA=B$，其中 $P=$ ________.

33.已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似，则 $r(A+E)=$ ____.