

南阳师范学院《数学分析》第一部分（极限）自测题

一、判断正误题（判断下列各题是否正确，正确的划√，错误的划×）

1. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n \geq N, \text{有} |a_n - a| \leq \varepsilon$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. ()

2. 若 $\forall k \in \mathbf{N}_+, \exists N_k \in \mathbf{N}_+, \forall n \geq N_k, \text{有} |a_n - a| < \frac{1}{k}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. ()

3. 若有无限多个 $\varepsilon > 0$, 对每个 ε 存在 $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}_+, \forall n \geq N(\varepsilon), \text{有} |a_n - a| \leq \varepsilon$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. ()

4. 若 $\forall \varepsilon > 0, \text{有无限多个} a_n, \text{有} |a_n - a| < \varepsilon$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. ()

5. 若 $\forall k \in \mathbf{N}_+, \text{只有有限个} a_n \text{位于区间} \left(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\right) \text{之外}, \text{则} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. ()

6. 若 $\forall \varepsilon > 0, \text{只有有限个} a_n \text{位于} U(a; \varepsilon) \text{之外}, \text{则} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. ()

7. 若数列 $\{a_n\}$ 有界, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛. ()

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^{30}(n+100)^{69}}{(n+1)^{99}} = 1$. ()

9. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{2\sin x} - 1$ 比是 x 高阶的无穷小量. ()

10. 数列 $\{\frac{1}{3^n} - 1\}$ 是收敛数列, 数列 $\{\frac{1}{2^n} + (-1)^n\}$ 是发散数列. ()

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = 0$. ()

12. 曲线 $y = e^{-\frac{1}{x^2-1}}$ 的水平渐近线是 $y = 1$. ()

13. 无限个无穷小量之和仍为无穷小量. ()

14. 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin^3 x$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷小量. ()

15. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f^2(x)+1} = 0$. ()

二、填空题（将正确答案填写在横线上）

1. 写出“数列 $\{a_n\}$ 有界”的定义_____.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^4} + \frac{5}{3^n} \right) =$ _____.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \sin \frac{3}{n^4} \right) =$ _____.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{2n} =$ _____.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 1}{8x^3 + 3x + 100} =$ _____.
6. 设数集 $E = \left\{ 1 + \frac{4}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$, 则 $\sup E =$ _____, $\inf E =$ _____.
7. 设数集 $E = \left\{ x \mid x = \frac{n}{n+1}, n = 1, 2, \dots \right\}$, 则 $\sup E =$ _____, $\inf E =$ _____.
8. 若 $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{2}{n^3 + 1} < x_n < 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____.
9. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$ _____.
10. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| =$ _____.
11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1-x) \sim \tan ax$, 则 $a =$ _____.
12. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2x_{n+100} =$ _____.
13. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{2n}| + x_{2n-1}}{2} =$ _____.

14. $\lim_{x \rightarrow 2} |x - 2| \operatorname{sgn}(x - 2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、选择题（将正确答案的序号填写在括号内）

1. 下列数列发散的是（ ）.

A $\left\{ \frac{(-1)^n + n}{n} \right\}$ B $\left\{ \frac{3}{10^n} \right\}$ C $[(-1)^n + 1] \frac{n-1}{n}$ D $\left\{ \frac{2^n - 1}{3^n} \right\}$

2. 下列结论错误的是（ ）.

- A 单调递增有上界的数列必收敛 B 发散的数列必无界
 C 单调递减有下界的数列必收敛 D 收敛的数列必有界

3. 下列结论正确的是（ ）.

- A 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左右极限存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 一定存在
 B 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处无定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 一定不存在
 C 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左右极限至少有一个不存在
 D 以上说法都错误

4. 下列结论正确的是（ ）.

- A 若数列 $\{a_n\}$ 无界, 则数列 $\{a_n\}$ 一定发散
 B 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ 一定存在
 C 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 D 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 一定不存在

5. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则下列结论错误的是（ ）.

- A $\{x_n\}$ 必有界 B 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$
 C 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = a$ D 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+10000} = a$

6. 下列等式不成立的是（ ）.

A $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n n} = 0$

B $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$

C $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$

D $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 1$

7. 下列数列收敛的是 () .

A $\{(-1)^{n+1}\}$ B $\{2^n\}$ C $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ D $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$

8. 下列数列发散的是 () .

A $\left\{\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}\right\}$ B $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$ C $\left\{5 + \frac{1}{n^2}\right\}$ D $\{n(-1)^n\}$

9. 下列结论正确的是 ()

A 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$, 则 $f(x) > 0$

B 若 $f(x) < g(x)$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

C 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 一定在点 x_0 的某个去心邻域内有界

D 设 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ 为函数 $f(x)$ 定义域内的两个收敛于 x_0 数列, 且 $x_n \neq x_0$,

$y_n \neq x_0$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 一定存在

10. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \sin ax^3$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则 ()

A $a+b=0$ B $a-b=0$ C $a+b=1$ D $a-b=1$

11. 下列结论错误的是 ()

A 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左右极限至少有一个不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在

B 若 $f(x+0) \neq f(x-0)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在

C $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $f(x+0), f(x-0)$ 都存在

D $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $f(x+0), f(x-0)$ 都存在且相等

12. 下列结论错误的是 ()

A: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

B: $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

C: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} = e$

D: $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^{-x} = e$

13. 设有命题 (1) 收敛数列必定有界; (2) 有界数列必定收敛;
 (3) 发散数列必定无界; (4) 无界数列必定发散.

上述命题中正确命题的个数是 ()

- A、一; B、二; C、三; D、四.

14. 设 $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$, 则 ()

- A、 $\{a_n\}$ 单调递增无上界, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$;
 B、 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 故有极限;
 C、 $\{a_n\}$ 单调递减有下界, 故有极限且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;
 D、 $\{a_n\}$ 单调递减有下界, 故有极限且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$.

四、计算题

1. 求下列极限:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}\right)$;
 (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{3}{x}$; (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{e^{2x} - 1}$;
 (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)^3}{\tan x}$; (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{2 \arcsin x^3}$.

2. 利用迫敛性求下列极限:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.
 (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \cos x}{x}$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 4}$.

3. 试问 $y = |x|$ 是初等函数吗?

4. 设 f 和 g 都是初等函数, 定义

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad m(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \quad x \in D$$

试问 $M(x)$ 和 $m(x)$ 是否为初等函数?

5. 讨论狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 的有界性, 单调性与周期性.

6. 试求下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}; & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin x; & \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}; \\ (4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x; & \quad (5) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin \frac{1}{x}; \end{aligned}$$

分析 这几个极限不小心时容易混淆. 把 (1) 误认为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$; (2) 与 (4) 函数相同, 但变量 x 的趋向不同; (3) 与 (5) 也有类似的情况. 注意变量的趋向是避免出错的关键.

7. 讨论下列函数在 $x \rightarrow 0$ 时的极限或左、右极限:

$$(1) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (2) f(x) = [x] \quad (3) f(x) = \begin{cases} 2^x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1+x^2 & x < 0 \end{cases}$$

五、证明题

$$1. \text{ 设函数 } f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ 1+x^2, & x < 0 \end{cases},$$

(1) 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的左、右极限以及极限;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否连续.

$$2. \text{ 当 } a \text{ 取何值时, 函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0, \\ a + \ln(1+x^2), & x \leq 0. \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 存在极限.}$$