微分中值定理与导数的应用考研（数二）真题

一、选择题（将最佳答案的序号填写在括号内）

1.（94 年，3 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则（　　）

（A）$a=1,b=-\dfrac{5}{2}$　　（B）$a=0,b=-2$

（C）$a=0,b=-\dfrac{5}{2}$　　（D）$a=1,b=-2$

2.（95 年，3 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$、$f'(1)$、$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是（ ）

（A）$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　（B）$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

（C）$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　（D）$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

3.（97 年，3 分）已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足

$$xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$$

若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$，则（　　）

（A）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

（B）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

（C）$(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

4.（98 年，3 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续，且 $f(a)$ 为其极大值，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，必有（　）

（A）$(x-a)[f(x)-f(a)]\geq 0$　　（B）$(x-a)[f(x)-f(a)]\leq 0$

（C）$\lim\limits_{t\to x}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geq 0(x\neq a)$　　（D）$\lim\limits_{t\to x}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\leq 0(x\neq a)$

5.（99 年，3 分）设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, x>0\\ x^2g(x), x\leq 0\end{cases},$$

其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　）

（A）极限不存在　　（B）极限存在，但不连续

（C）连续，但不可导　　（D）可导

6.（00 年，3 分）设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则（　　）

（A）$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

（B）$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

（C）点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

7.（00 年，3 分）设函数 $f(x)$、$g(x)$ 是大于零的可导函数

$$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0,$$

则当 $a<x<b$ 时，有（ ）

（A） $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　（B） $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

（C） $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　（D） $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

8.（00 年，3 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为（　　）

（A）0　（B）6　（C）36　（D）∞

9.（01 年，3 分）曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为（　　）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

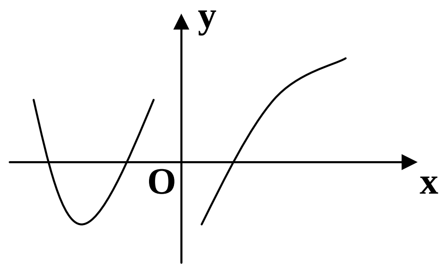
10.（03 年，4 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有（　　）

(A)　一个极小值点和两个极大值点.

(B)　两个极小值点和一个极大值点.

(C)　两个极小值点和两个极大值点.

(D)　三个极小值点和一个极大值点.



11.（04 年，4 分）设 $f(x)=|x(1-x)|$，则（　　）

（A） $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（B） $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（C） $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D） $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

12.（06 年，4 分）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分. 若 $\Delta x>0$，则（　）

（A） $0<dy<\Delta y$　　（B） $0<\Delta y<dy$

（C） $\Delta y<dy<0$　　（D） $dy<\Delta y<0$

13.（09 年，4 分）当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（　　）

（A） $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　（B） $a=1,b=\dfrac{1}{6}$

（C） $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　（D） $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

14.（09 年，4 分）若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内（　）

（A）有极值点，无零点　　（B）无极值点，有零点

（C）有极值点，有零点　　（D）无极值点，无零点

二、填空题

1.（94 年，3 分）若 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, x\neq 0 \\ a, x=0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，

则 $a=$________.

2.（96 年，3 分）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sin\ln(1+\dfrac{3}{x})-\sin\ln(1+\dfrac{1}{x})\right]=$__________.

3.（97 年，3 分）设

$$f(x)=\begin{cases} (\cos x)^{x^{-2}}, x\neq 0 \\ a, x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则 $a=$____________________.

4.（98 年，3 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$____________________.

5.（00 年，3 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$____________________.

6.（01 年，3 分）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$____________________.

7.（02 年，3 分）设函数

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, x>0 \\ ae^{2x}, x\leq 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则 $a=$____________________.

8.（03 年，4 分）$y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是________.

9.（07 年，4 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\arctan x-\sin x}=$____________________.

10.（08 年，4 分）求函数 $f(x)=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点________________.

三、计算

1.（95 年，5 分）求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

2.（96 年，8 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，试求 $y=y(x)$ 的驻点，并判定它是否为极值点.

3.（97 年，5 分）求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$..

4.（99 年，5 分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

5.（01 年，7 分）求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

6.（04 年，10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

7.（08 年，10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sin x-\sin(\sin x)\right]\sin x}{x^4}$.

8.（09 年，9 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}$.

四、证明

1.（96 年，8 分）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且

$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$.

证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

2.（02 年，8 分）设 $0<a<b$，证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

3.（04 年，12 分）设 $e<a<b<e^2$，证明

$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

4.（05 年，12 分）已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：

（I）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

（II）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

5.（06 年，7 分）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\ldots)$

求：（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求之。

（2）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$。

6.（07 年，11 分）设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$.

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=g''(\xi).$$

7.（09 年，11 分）（1）证明拉格朗日中值定理.

（2）若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

8.（10 年，10 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\dfrac{1}{3}$.

证明：存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2}),\eta\in(\frac{1}{2},1)$ 使得

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2.$$