# 第二十二章　　曲面积分

**教学课节：**



前页 后页 返回

# §1 第一型曲面积分

**教学内容：**

一、第一型曲面积分的概念

二、第一型曲面积分的计算

# 一、第一型曲面积分的概念

如同第一型曲线积分, 当质量分布在某一曲面块 $S$, 且密度函数 $\rho(x,y,z)$ 在 $S$上连续时，曲面块 $S$ 的质量为极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\ ,$$

其中 $T=\{S_1,S_2,\ldots,S_n\}$ 为曲面块的分割, $\Delta S_i$ 表示小曲面块 $S_i$ 的面积, $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 为 $S_i$ 中任意一点, $\|T\|$ 为分割 $T$ 的细度，即为诸 $S_i$ 中的最大直径.

**定义1** 设 $S$ 是空间中可求面积的曲面，$f(x,y,z)$ 为定义在 $S$ 上的函数. 对曲面 $S$ 作分割 $T$, 它把 $S$ 分成 $n$ 个小曲面块 $S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$, 以 $\Delta S_i$ 记小曲面块 $S_i$ 的面积, 分割 $T$ 的细度 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\{S_i \text{ 的直径}\}$，在 $S_i$ 上任取一点 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$, 若存在极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i = I,$$

且与分割 $T$ 及 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 的取法无关, 则称此极限为 $f(x,y,z)$ 在 $S$ 上的**第一型曲面积分**, 记作

前页 后页 返回

$$I=\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S\ . \tag{1}$$

于是, 前述曲面块的质量由第一型曲面积分表示为:

$$m=\iint_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}S\ .$$

特别地, 当 $f(x,y,z)\equiv 1$ 时,曲面积分 $\iint_S \mathrm{d}S$ 就是曲面块 $S$ 的面积.

前页 后页 返回

## 二、第一型曲面积分的计算

第一型曲面积分可化为二重积分来计算.

**定理22.1** 设有光滑曲面

$$S: z = z(x, y),\ (x, y) \in D,$$

$f(x,y,z)$ 为 $S$ 上的连续函数, 则

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad \cdots\cdots(2)$$

**例1** 计算 $\displaystyle\iint_S \frac{1}{z}\,\mathrm{d}S$，其中 $S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 所截得的顶部（图22-1）.

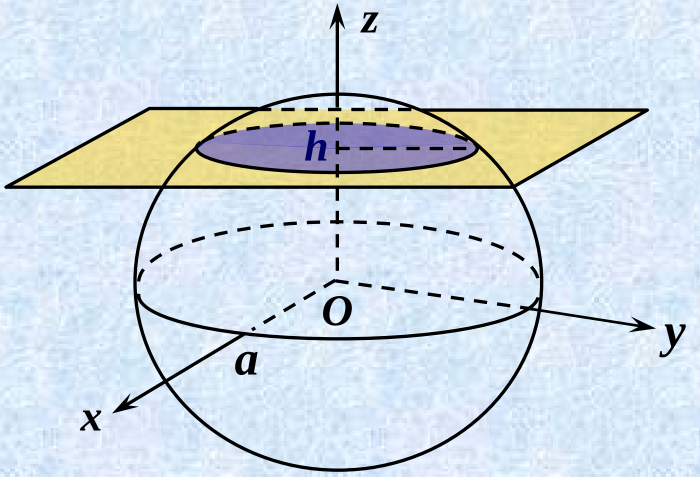


图 22－1

前页 后页 返回

例2 计算 $\iint\limits_{S}(xy+zx+yz)\mathrm{d}S$,

其中 $S$ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所割下的部分 (图22-2).

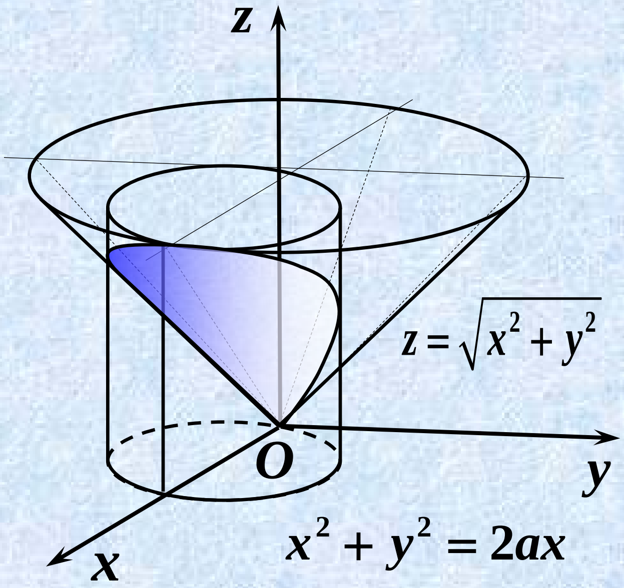

图 22 – 2

# §2 第二型曲面积分

**教学内容:**

一、曲面的侧
二、第二型曲面积分的概念
三、第二型曲面积分的计算

# 一、曲面的侧

设连通曲面 $S$ 上到处都有连续变动的切平面 (或法线), 曲面在其上每一点处的法线有两个方向：当取定其中一个指向为正方向时, 另一个指向就是负方向. 又设 $M_0$ 为 $S$ 上任一点, $L$ 为 $S$ 上任一经过点 $M_0$, 且不超出 $S$ 边界的闭曲线. 当 $S$ 上的动点 $M$ 从 $M_0$ 出发沿 $L$ 连续移动一周而回到 $M_0$ 时, 如果有如下特征:出发时 $M$ 与 $M_0$ 取相同的法线方向, 而回来时仍保持原来的法线方向不变, 则称该曲面 $S$ 是双侧的.

前页 后页 返回

否则, 若 $M$ 由某一点 $M_0$ 出发, 沿 $S$ 上某一封闭曲线回到 $M_0$ 时, 其法线方向与出发时的方向相反, 则称 $S$ 是单侧曲面.

通常遇到的曲面大多是双侧曲面. 单侧曲面的一个典型例子是默比乌斯(Möbius)带. 它的构造方法如下: 取一矩形长纸条 $ABCD$ (如图22-4(a)), 将其一端扭转 $180^\circ$ 后与另一端粘合在一起 (即让 $A$ 与 $C$ 重合, $B$ 与 $D$ 重合, 如图22-4(b)所示).

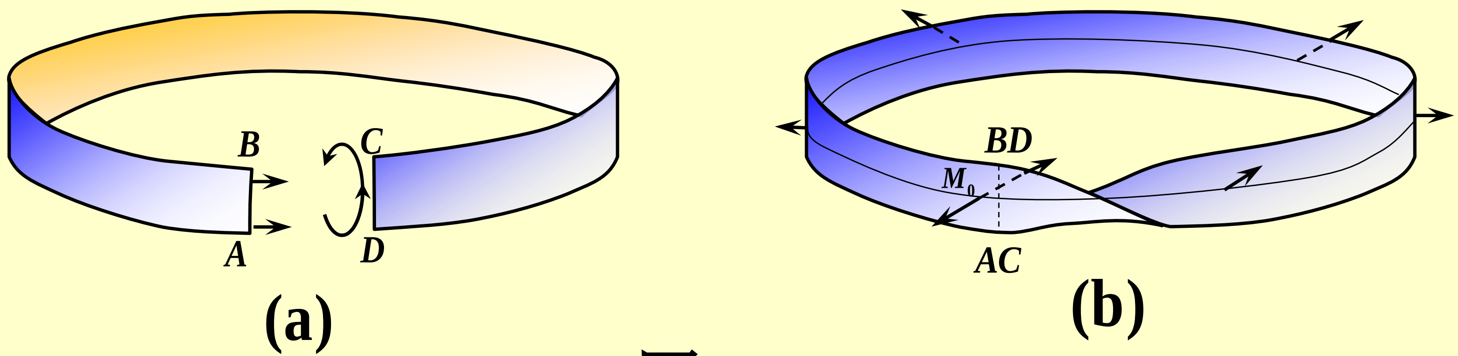


图 22 – 4

通常由 $z=z(x,y)$ 所表示的曲面都是双侧曲面, 其法线方向与 $z$ 轴正向的夹角成锐角的一侧称为上侧, 另一侧称为下侧. 当 $S$ 为封闭曲面时, 法线方向朝外的一侧称为外侧，另一侧称为内侧．习惯上把上侧作为正侧, 下侧作为负侧; 又把封闭曲面的外侧作为正侧，内侧作为负侧.

## 二、第二型曲面积分的概念

先考察一个计算流量的问题. 设某流体以流速

$$\vec{v} = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

从曲面 $S$ 的负侧流向正侧 (图22-5), 其中 $P, Q, R$ 为所讨论范围上的连续函数, 求在单位时间内流过曲面 $S$ 的总流量 $E$.

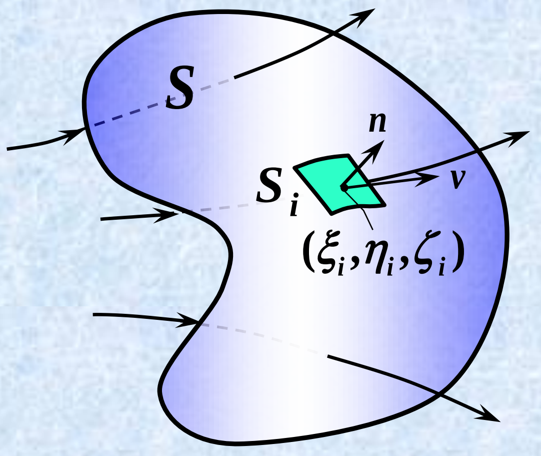

图 22－5

设在 $S$ 上任一点 $(x,y,z)$ 处的正向单位法向量为

前页 后页 返回

$$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

这里 $\alpha, \beta, \gamma$ 都是 $x, y, z$ 的函数. 则单位时间内流经小曲面块 $S_i$ 的流量

$$\Phi_i \approx \vec{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{n}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

$$=[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i$$

$$+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i,$$

其中 $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S_i$ 是任意取定的一点;

$\vec{n}_i=(\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$ 是点 $M_i$ 处的单位法向量;

$\Delta S_i\cos\alpha_i, \Delta S_i\cos\beta_i, \Delta S_i\cos\gamma_i$ 分别是 $S_i$ 在坐标面

$yz, zx, xy$ 上投影区域的近似面积, 分别记作 $\Delta S_{i(yz)}$, $\Delta S_{i(zx)}$, $\Delta S_{i(xy)}$. 于是单位时间内由 $S_i$ 的负侧流向正侧的流量 $\Phi_i$ 也就近似等于

$$P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i(yz)}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i(zx)}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i(xy)}.$$

所以, 单位时间内由 $S$ 的负侧流向正侧的总流量

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i(yz)}$$
$$+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i(zx)}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i(xy)}\Big].$$

这种与曲面的侧有关的和式极限就是所要讨论的第

二型曲面积分.

定义1 设 $P, Q, R$ 为定义在双侧曲面 $S$ 上的函数. 对 $S$ 作分割 $T$, 它把 $S$ 分为 $S_1, S_2, \cdots, S_n$, 分割 $T$ 的细度为

$$\|T\| = \max_{1\le i\le n}\{S_i \text{ 的直径}\}.$$

$\Delta S_{i(yz)}, \Delta S_{i(zx)}, \Delta S_{i(xy)}$ 分别表示 $S_i$ 在三个坐标面上的投影区域的面积, 它们的符号由 $S_i$ 的方向来确定:

$$\Delta S_{i(xy)}\begin{cases}\ge 0, & S_i \text{ 取上侧}, \\ \le 0, & S_i \text{ 取下侧};\end{cases}$$

$$\Delta S_{i(yz)} \begin{cases} \geq 0, & S_i \text{ 取前侧}, \\ \leq 0, & S_i \text{ 取后侧}; \end{cases}$$

$$\Delta S_{i(zx)} \begin{cases} \geq 0, & S_i \text{ 取右侧}, \\ \leq 0, & S_i \text{ 取左侧}. \end{cases}$$

$\forall(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in S_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$. 若

$$I = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i(yz)}$$

$$+ \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i(zx)}$$

$$+ \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i(xy)}$$

前页 后页 返回

中的三个极限都存在, 且与分割 $T$ 和点 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 的的选取无关, 则称此极限 $I$ 为向量函数

$$\vec{F}=P(x,y,z)\,\mathrm{i}+Q(x,y,z)\,\mathrm{j}+R(x,y,z)\,\mathrm{k}$$

在曲面 $S$ 所指定一侧上的第二型曲面积分, 记作

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I, \qquad \cdots\cdots(1)$$

或

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_S Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I.$$

据此定义, 某流体以速度 $\vec{v}=(P, Q, R)$ 从曲面 $S$ 的负侧流向正侧的总流量即为

$$\Phi=\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又如, 若空间中的磁场强度为

$$\vec{E}=\left(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\right),$$

则按指定方向穿过曲面 $S$ 的磁通量(磁力线总数)为

$$H=\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若以 $S^-$ 表示曲面 $S$ 的另一侧, 由定义易知

$$\iint_{S^-} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= -\iint_{S} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

第二型曲面积分有类似于第二型曲线积分的性质:

1. 若 $\iint_S P_i\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q_i\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (i = 1, 2, \cdots, k)$ 存在,

则有 $\iint_S \left(\sum_{i=1}^{k} c_i P_i\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\sum_{i=1}^{k} c_i Q_i\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\sum_{i=1}^{k} c_i R_i\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_i \iint_{S_i} P_i\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q_i\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其 中$c_i(i=1,2,\cdots,k)$是常数.

2. 若曲面$S$是由两两无公共内点的曲 面$S_1,S_2,\cdots,S_k$所组成, 则有

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \iint_{S_i} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

## 三、第二型曲面积分的计算

**定理22.2** 设 $R(x,y,z)$ 是定义在光滑曲面

$$S: z = z(x,y), (x,y) \in D_{(xy)}.$$

上的连续函数, 以 $S$ 的上侧为正侧(这时 $S$ 的法线方向与 $z$ 轴正向成锐角), 则有

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{(xy)}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (2)$$

**例1** 计算 $\iint\limits_{S} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 $S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$

在 $x\geq 0, y\geq 0$ 部分并取球面

的外侧(图 22-6).

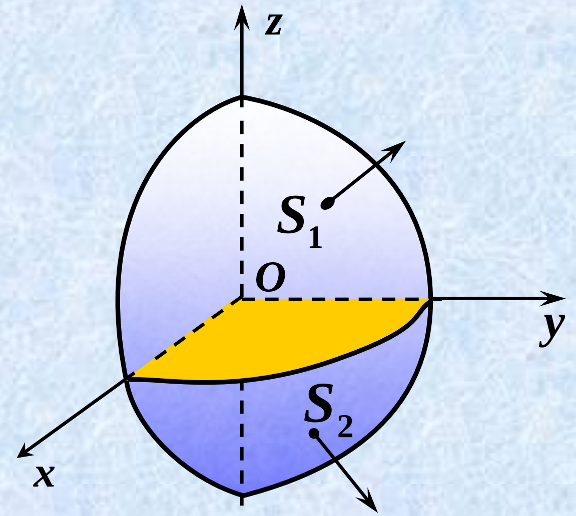


图 22 – 6

例2 计算 $\iint\limits_{S} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}} \mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 其中 $S$ 是由曲面

$$y = x^2 + z^2 \text{ 与 } y = 1, y = 2$$

所围立体表面的外侧.

例3 计算 $\iint\limits_{S} x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $S$ 为椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的上半部分, 并取外侧.

# §3 高斯公式与斯托克斯公式

## 教学内容：

一、高斯公式

二、斯托克斯公式

# 一、高斯公式

定理22.3 设空间区域 $V$ 由分片光滑的双侧封闭曲面 $S$ 围成. 若函数 $P, Q, R$ 在 $V$ 上连续, 且有一阶连续偏导数, 则

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \qquad (1)$$

其中 $S$ 取外侧. (1) 式称为高斯公式.

前页 后页 返回

**例1** 计算

$$I = \oiint_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (y^2+zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

其中 $S$ 是边长为 $a$ 的正立方体表面并取外侧.

**注** 若在高斯公式中 $P=x, Q=y, R=z$, 则有

$$\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V (1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

于是得到应用第二型曲面积分计算空间区域 $V$ 的体积的公式: $\Delta V = \dfrac{1}{3}\oiint_{S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$

例2 计算 $\iint\limits_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 $S$ 为曲面 $z=5-x^2-y^2$ 上 $z\geq 1$ 的部分, 并取

上侧.

例3 证明电学中的高斯定理: 在由点电荷 $q$ 所产生的静电场中, 电场强度 $\vec{E}$ 向外穿过任何包含 $q$ 在其内部的光滑封闭曲面 $S$ 的电通量都等于 $4\pi q$.

## 二、斯托克斯公式

先对双侧曲面 $S$ 的侧与其边界曲线 $L$ 的方向作如下规定:设有人站在 $S$ 上指定的一侧, 若沿 $L$ 行走, 指定的侧总在人的左方, 则人前进的方向为边界线 $L$ 的正向;若沿 $L$ 行走, 指定的侧总在人的右方, 则人前进的方向为边界线 $L$ 的负向. 这个规定也称为右手法则, 如图 22-9 所示.

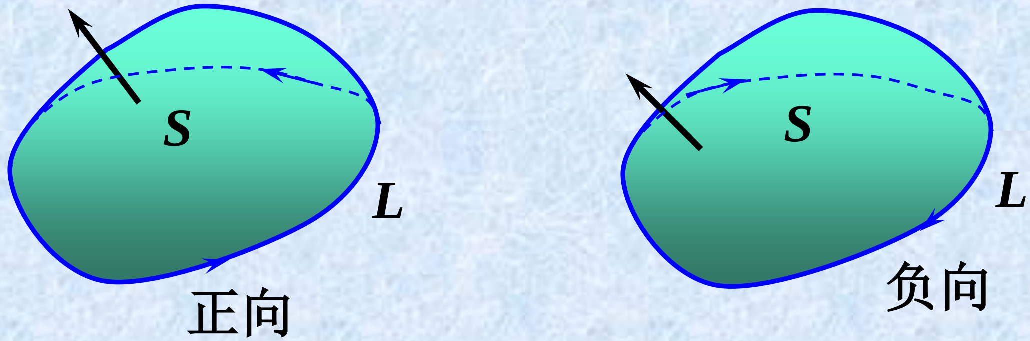


图 22 – 9

**定理22.4** 设光滑曲面 $S$ 的边界 $L$ 是按段光滑的连续曲线. 若函数 $P, Q, R$ 在 $S$ ( 连同 $L$ ) 上连续, 且有一阶连续偏导数, 则有**斯托克斯公式**如下:

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\,, \qquad (2)$$

其中 $S$ 的侧与 $L$ 的方向按右手法则确定.

为了便于记忆, 斯托克斯公式也常写成如下形式:

$$\iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\,.$$

**例4** 计算 $\int_L (2y+z)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-z)\mathrm{d}z$，其中

$L$ 为平面 $x+y+z=1$ 与各坐标面的交线, 取图 22-8

所示的方向.

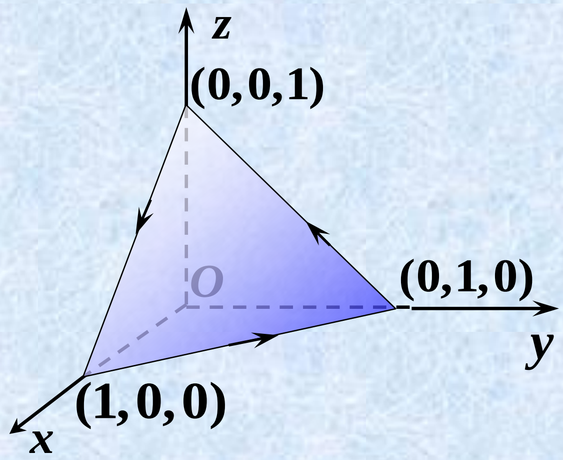


图 $22-10$

前页 后页 返回

区域 $V$ 称单连通, 如果 $V$ 内任一封闭曲线皆可不经过 $V$ 以外的点而连续收缩于属于 $V$ 的一点. 例如:两同心球面所界定的区域仍是单连通的;而形如车胎状的环形区域则是非单连通的.

注 上述之单连通, 又称为“按曲面单连通”. 其意义是: 对于 $V$ 内任一封闭曲线 $L$, 均能以 $L$ 为边界, 绷起一个位于 $V$ 中的曲面.

**定理22.5** 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 为空间单连通区域. 若函数 $P$, $Q$, $R$ 在 $\Omega$ 上连续, 且有一阶连续偏导数, 则以下四个条件是等价的:

(i) 对于 $\Omega$ 内任一按段光滑的封闭曲线 $L$ 有

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0\,;$$

(ii) 对于 $\Omega$ 内任一按段光滑的封闭曲线 $L$, 曲线积分

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

与路线无关;

(iii) $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 是 $\Omega$ 内某一函数 $u$ 的全微分,

即
$$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\,; \tag{6}$$

(iv) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$ 在 $\Omega$ 内处处成立.

例5 验证曲线积分

$$\int_L (y+z)\mathrm{d}z + (z+x)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$$

与路线无关, 并求被积表达式的原函数 $u(x,y,z)$.