

《高等数学》第三章——中值定理与导数的应用

练习题 (A)

一、判断正误题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×)

- (1) 可导函数的极值点一定是驻点, 但驻点不一定是极值点. ()
- (2) 若罗尔定理的三个条件有一个不成立, 则定理的结论可能不成立. ()
- (3) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 则方程 $f'(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个实根. ()
- (4) 在两个高度相同的点之间的连续曲线上, 若除去端点外的每一点都有不垂直于轴的切线, 则其中必至少有一条水平切线. ()
- (5) 若函数 $y = f(x)$ 在 $[x, x + \Delta x]$ 上连续, 在 $(x, x + \Delta x)$ 内可导, 则必有 $\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x$ 其中 $0 < \theta < 1$. ()
- (6) 在两个高度不相同的点之间的连续曲线上, 若除去端点外的每一点都有不垂直于轴的切线, 则其中必至少有一条切线平行于两端点的连线. ()
- (7) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 则至少有一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(x)$ 在 ξ 处的瞬时变化率等于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上平均变化率. ()
- (8) $f(x) \equiv C$ (常数) $(\forall x \in I) \Leftrightarrow f'(x) = 0$ $(\forall x \in I)$. ()
- (9) 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $e^\xi (\sin b - \sin a) = (e^b - e^a) \cos \xi$. ()
- (10) 若 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 也一定不存在. ()
- (11) 若 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$. ()
- (12) 若 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的邻近有连续的二阶导数, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2, \quad ,$$

其中 ξ 在 x_0 和 x 之间. ()

- (13) 函数 $y = x - \sin^2 x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减. ()
- (14) 如果函数在某驻点两边的导数同号, 则不改变函数的单调性. ()
- (15) 曲线 $y = \ln(-x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 是凹的. ()
- (16) 若 $y = f(x)$ 在定义域内一阶导数单调, 则曲线 $y = f(x)$ 无拐点. ()
- (17) 函数的极值点可能在区间内部取得, 也可能在端点取得. ()
- (18) 函数的极大值不一定比极小值大. ()

二、填空题 (将正确答案填写在横线上)

- (1) 下列函数中满足罗尔定理条件的是 ()
- A: $f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in [-1, 1]$ B: $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$
- C: $f(x) = x^3, x \in [-1, 1]$ D: $f(x) = \ln \sin x, x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$
- (2) 设函数 $f(x) = (x^2 + x - 2) \cos x$, 则方程 $f'(x) = 0$ 在 $(-2, \pi)$ 内根的个数是 ()
- A: 0 个 B: 至多一个 C: 至少 3 个 D: 2 个
- (3) 下列函数中满足拉格朗日中值定理条件的是 ()
- A: $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, x \in [-1, 1]$
- B: $f(x) = |\sin x|, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- C: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, x \in [-1, 1]$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^x} =$ _____.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100} - 1}{x^{100} + 1} =$ _____.

4. $y = x^{\frac{2}{3}}$ 在 _____ 上单调增加, 在 _____ 上单调减少.

5. 曲线 $y = x^3$ 的拐点为 _____.

6. 设函数 $y = f(x)$ 二阶可导, 如果 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = -1$, 则点 x_0 是函数 $y = f(x)$ 的极 _____ 值点.

7. 曲线 $y = \frac{x^2}{1+x}$ 的斜渐近线是 _____.

8. 函数 $y = |\sin x|$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内的极小值点为 _____.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} =$ _____.

四、计算题

1. 求下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\sin^2 2x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{x^2})}{x^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-x^2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x})$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x)$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

(7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

(8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 + x^n}$

2. 求函数 $y = (x^2 - 1)^2 + 1$ 的单调区间、极值及在 $[-1, 1]$ 上的最值.

3. 求曲线 $y = \sqrt[3]{x-1}$ 的拐点.

五、证明题

1. 证明方程 $x^5 + x^3 - 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内最多有一个实根.

2. 证明当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

3. 证明 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$.

《高等数学》第三章——中值定理与导数的应用

练习题 (B)

一、判断正误题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×)

1. 可导函数的驻点一定是极值点. ()
2. 若罗尔定理的三个条件有一个不成立, 则定理的结论一定不成立. ()
3. 若方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根, 则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)$. ()
4. $\sin(x+\Delta x)-\sin x=\cos(x+\theta\Delta x)\Delta x$ 其中 $0<\theta<1$. ()
5. 在连续曲线上, 若除去端点外的每一点都有不垂直于轴的切线, 则其中必至少有一条切线平行于两端点的连线. ()
6. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 则至少有一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(x)$ 在 ξ 处的瞬时变化率等于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上平均变化率. ()
7. $[f(x)-g(x)]'=0 (\forall x\in I) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+C$ (常数) $(\forall x\in I)$ ()
8. 至少存在一点 $\xi\in(a,b), (a>-1)$, 使得
$$\frac{1}{1+\xi}(\sin b-\sin a)=(\ln(1+b)-\ln(1+a))\cos \xi$$
 ()
9. 极限 $\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 不能使用洛必达法则求出. ()
10. $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{\cos \theta x}{4!}x^4$ ($0<\theta<1$). ()
11. 两坐标轴 $x=0, y=0$ 都是函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的渐近线. ()

12. 如果 $y=f(x)$ 在区间 I 内单调, 则在区间 I 内没有极值点. ()
13. $[-1,1]$ 是 $y=\frac{2x}{1+x^2}$ 的递增区间. ()
14. 曲线 $y=e^{-2x}$ 在 $(-\infty,0)$ 是凹的. ()
15. $(1,0)$ 是曲线 $f(x)=(x-1)^4$ 的拐点. ()
16. 函数的极值一定在区间内部取到. ()
17. 函数的极大值一定大于极小值. ()
18. 若点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点, 则必有 $f''(x_0)=0$. ()

二、选择题 (将正确答案的序号填写在括号内)

1. 在给定区间上, 下列函数中满足罗尔中值定理条件的是 ()

A: $f(x)=\begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, x \in [-1,1]$

B: $f(x)=\operatorname{sgn} x \sin x, x \in [-1,1]$

C: $f(x)=e^{3x}(\sin x+\cos x), x \in [-\pi, \pi]$

D: $f(x)=\begin{cases} x^2 \sin^2 \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, x \in \left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$

2. 设函数 $f(x)=(x^2-1)x \sin x$, 则方程 $f'(x)=0$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内根的个数是 ()
- A: 至多 1 个 B: 2 个 C: 3 个 D: 至少 4 个

3. 下列函数中满足拉格朗日中值定理条件的是 ()

A: $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad x \in [-1, 1]$

B: $f(x) = \begin{cases} \arctan x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ e^{\sin x} - 1, & x < 0 \end{cases} \quad x \in [-1, 1]$

C: $f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad x \in [-1, 1]$

D: $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}, \quad x \in [-2, 2]$

4. 曲线 $y = (x-1)^2 x$ 的拐点个数为 ()

- A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

5. 若 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调区间的分界点, 则 ()

- A: 点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点 B: x_0 是 $y = f(x)$ 的极值点
C: $f'(x_0) = 0$ D: $f''(x_0) = 0$

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0)$ 、 $f'(1)$ 、 $f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是 ()

- A: $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$ B: $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$
C: $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$ D: $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

7. 下列没有最值的函数是 ()

A: $y = 2x^3 - 3x^2 \quad (-1 \leq x \leq 4)$ B: $y = \sqrt{100 - x^2} \quad (0 \leq x \leq 8)$

C: $y = x^{\frac{2}{3}} \quad (-1 \leq x \leq 1)$ D: $y = x^3 \quad (-1 < x < 1)$

8. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + xf(x)}{x^2} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+f(x)}{x}$ 为 ()

- A: 0 B: $\frac{1}{2}$ C: 1 D: ∞

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$, 则下列说法正确的是 ()

- A: $x = 0$ 为极小值点 B: $x = 0$ 为极大值点
C: $f(x)$ 在定义域内无极值 D: $f(x)$ 在定义域内单调递减

10. 下列结论正确的是 ()

- A: $x = 0$ 是函数 $f(x) = |x|$ 的极大值点
B: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导, 且 $f''(x) < 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点
C: 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, $\Delta x < 0$, 则 $\Delta y < dy$
D: 曲线 $y = x^{1000}$ 没有拐点

三、填空题 (将正确答案填写在横线上)

1. 函数 $f(x) = x^4$ 在区间 $[1, 2]$ 上应用拉格朗日中值定理时所得到的点 $\xi =$ _____

2. 设 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 方程 $f'(x) = 0$ 至少有 _____ 个根, 它们分别在区间 _____ 上

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} =$ _____

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - e^{-x}} =$ _____

5. 函数 $y = x^2 - \ln x^2$ 的单调区间为 _____.

6. 曲线 $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ 的拐点为_____
7. 若函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内二阶可导, 则曲线 $f(x)$ 在 (a, b) 内取凹的充分条件是_____.
8. 曲线 $y = \frac{1}{x-1}$ 的水平渐近线为_____, 铅直渐近线为_____
9. $y = 2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是_____
10. 函数 $y = |\cos x|$ 在 $(0, \pi)$ 内的极小值点为_____
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n^3} =$ _____
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} =$ _____

四、计算题

1. 求下列极限

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\arccot x}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^m \ln x) \quad (m > 0)$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$
- (6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$
- (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-\sin x} - 1}{\arcsin x^3}$
- (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\tan x^3}$

2. 求函数 $y = 2x + \frac{8}{x} \quad (x > 0)$ 的单调区间, 极值及在 $[1, 3]$ 上最值

3. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 所确定, 试求 $y = y(x)$ 的驻点, 并判定它是否为极值点.

4. 求函数 $y = \ln(x^2 + 1)$ 图形的拐点及凹凸区间
5. 若曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 在 $x = 0$ 处有极值 $y = 0$, 点 $(1, 1)$ 为拐点, 求 a, b, c, d 的值

五、证明题

1. 证明方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 只有一个正根
2. 证明对函数 $y = px^2 + qx + r$ 应用拉氏中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.
3. 设 $e < a < b < e^2$, 证明: $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$.
4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$ 使

$$f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)].$$

5. 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$.
6. 证明: 方程 $\sin x - x = 0$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内有且仅有一解

《高等数学》第三章——中值定理与导数的应用

自测题 (A)

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一. 判断题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×。每小题 2 分, 共 24 分)

1. 函数 $y = |x|$ 在 $[-1, 1]$ 上既不满足罗尔定理的所有条件, 也不满足罗尔定理的结论. ()

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上满足拉格朗日中值定理的所有条件. ()

3. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 也不存在. ()

4. 至少存在一个 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\sin b - \sin a = (b - a) \cos \xi$ 成立. ()

5. 至少存在一个 $\xi \in (a, b)$ 使得 $(b^3 - a^3)e^\xi = 3(b - a)e^\xi \xi^2$ 成立. ()

6. 设 $f(x)$ 在 x_0 的附近有连续的二阶导数, 则

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2 \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x_0 + h \text{ 之间}) \quad ()$$

7. 定义域上连续单调的函数没有极值. ()

8. 曲线 $y = x^4$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是凸的. ()

9. $(0, 0)$ 不是 $y = x^2$ 的拐点. ()

10. 闭区间 $[a, b]$ 上连续函数的最小值一定是函数的极小值. ()

11. 当 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ 时 x_0 可能是极值点也可能不是极值点. ()

12. 可导函数的极值点一定是驻点. ()

二. 单项选择题 (在每小题的备选答案中选出一个正确答案, 并将正确答案的代码填在题干上的括号内。每小题 2 分, 共 10 分)

1. 下列结论正确的是 ()

A: 函数的极大值一定大于极小值 B: 函数的极值点一定是驻点

C: 函数的极值点一定在区间内 D: 函数的极值点一定唯一

2. 能直接使用洛必达法则求极限的是 ()

A: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tan n}{n}$ B: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

C: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ D: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x}$

3. 下列结论不正确的是 ()

A: 函数的最大值一定大于最小值

B: 函数的最值点可能不是极值点

C: 若函数的最大值在区间内取得, 则函数的最大值点一定是极值点

D: 函数的最值可能在驻点、导数不存在的点及区间端点处取得

4. 关于函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$, 则下列说法错误的是 ()

A: $f(x)$ 在 $x = 0$ 不可导 B: $f(x)$ 在定义域内单调递减

C: $(0, 0)$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点 D: $x = 0$ 为极小值点

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 则下列结论不正确的是 ()

- A: 若在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$ 则曲线弧 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凸的
- B: 若 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线弧 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的拐点, 则 $f''(x_0) = 0$
- C: 曲线弧 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上一定有拐点
- D: 若 $f'(x_0) = 0$ 则当 $f''(x_0) < 0$ 时函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

三. 填空题 (将正确答案填写在空格上, 每小题 2 分, 共 14 分)

1. 函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[-1, 1]$ 上应用拉格朗日中值定理时所得到的点 $\xi =$ _____
2. 若 $f(x)$ 二阶可导且 $f'(0) = f''(0) - 1 = 0$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极_____值点.
- 3 曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的水平渐近线为_____, 铅直渐近线为_____.
4. 设 $f(x) = x(x-1)(x+1)(x-2)$, 则方程 $f'(x) = 0$ 至少有_____个实根.
5. 若 $f'(x) - g'(x) = 0$, 则 $f(x) - g(x) =$ _____ .
6. 若 $m, n \in N^+$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} =$ _____.
7. $f(x) = x + \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上单调递 _____ .

四. 计算题 (共 32 分)

1. 用洛必达法则求下列极限 (每小题 4 分, 共 24 分)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \right)$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

2. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$,

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间及极大值和极小值. (6 分)
- (2) 求函数在 $[-2, 2]$ 上的最值点. (2 分)

五. 证明题 (共 20 分)

1. 证明: 方程 $x^3 + x - 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内最多有一个实根. (5 分)
2. 证明: 当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$. (5 分)
3. 证明: $(0, 0)$ 是曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点. (5 分)
4. 证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x > 1 + x$. (5 分)

《高等数学》第三章——中值定理与导数的应用

自测题 (B)

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一. 判断题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×. 每小题 2 分, 共 20 分)

- 存在这样的函数, 不满足罗尔定理的条件, 但满足其结论. ()
- $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $[-1, 1]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件. ()
- 可以使用洛必达法则求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$. ()
- 至少存在一个 $\xi \in (a, b)$, 使得 $(e^b - e^a) \frac{1}{1 + \xi} = \left(\ln \frac{1+b}{1+a} \right) e^\xi$ 成立. ()
- $x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$ 按 $(x-1)$ 的乘幂展开后 $(x-1)^3$ 的系数是 1. ()
- 若函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 左右邻域内的一阶导数同号, 则点 x_0 一定不是函数的极值点. ()
- 曲线 $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ 没有拐点. ()
- 闭区间 $[a, b]$ 上连续函数的最值可能在不可导点处取得. ()
- 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, 则 x_0 一定不是函数 $f(x)$ 的极值点. ()
- 若函数 $f(x)$ 在定义区间上连续, 除去有限个点外导数处处存在, 则 $f(x)$ 单调区间的分界点一定是驻点. ()

二. 单项选择题 (在每小题的备选答案中选出一个正确答案, 并将正确答案的代码填在题干上的括号内. 每小题 2 分, 共 10 分)

- 下列结论正确的是 ()

A: 函数的极小值一定小于极大值 B: 函数的驻点一定是极值点.

C: 函数的极值点一定在区间内 D: 函数的最大值一定是极大值.
- 在下列函数中, 在给定区间上满足拉格朗日中值定理条件但不满足罗尔中值定理条件的是 ()

A: $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin^2 \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, x \in [-1, 1]$

B: $f(x) = \max\{1, x\}, x \in [-1, 1]$

C: $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x^4} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, x \in [-1, 1]$

D: $f(x) = e^{3x} \sqrt{x-1}, x \in [1, 2]$
- 设函数 $f(x) = (x^2 + x - 2) \cos x$, 则方程 $f'(x) = 0$ 在 $(-2, 2)$ 内根的个数是 ()

A: 至少 3 个 B: 至多 1 个 C: 2 个 D: 至少 4 个
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$, 则下列说法错误的是 ()

A: $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导 B: $f(x)$ 在定义域内单调递减

C: $(0, 0)$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点 D: $x=0$ 为极小值点

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $f''(x) < 0$, 则 ()

- A: 曲线 $y = f(x)$ 在 $[0,1]$ 上为凸的 B: $x = 0$ 为 $f'(x)$ 的最小值点
 C: $x = 0$ 为 $f'(x)$ 的极小值点 D: $f'(0) < f(1) - f(0) < f'(1)$

三. 填空题 (将正确答案填写在空格上, 每小题 2 分, 共 14 分)

- 函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $[1, 2]$ 上应用拉格朗日中值定理时所得到的点 $\xi =$ _____
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} =$ _____
- 若 $m, n \in N^+$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} =$ _____.
- 函数 $y = 2x + \frac{8}{x} (x > 0)$ 的单调区间为 _____.
- 曲线 $y = \frac{\ln(1+x)}{e^x}$ 的水平渐近线为 _____.
- 设 $k > 0$ 常数, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数为 _____.
- 若 $f'(x) - g'(x) \equiv 0 (x \in I)$, 则 $f(x) - g(x) =$ _____.

四. 计算题 (共 40 分)

1. 用洛必达法则求下列极限: (每小题 3 分, 共 18 分)

- (1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\sin^2 2x}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right)$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x}$

- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ (6) 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

2. 用泰勒公式求下列极限: (每小题 5 分, 共 10 分)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2 \cos x - 3}{x^4}$.

3. 设函数 $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$

- (1) 求 $f(x)$ 的极值点及极值. (4 分)
 (2) 求 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最值点及最值 (2 分)

4. 试决定 $y = k(x^2 - 3)^2$ 中 k 的值, 使曲线的拐点处的法线通过原点. (6 分)

五. 证明题 (共 16 分)

- 证明方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 只有一个正根. (4 分)
- 设 $a > b > 0$, 证明: $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ (6 分)
- 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ (6 分)