第十五章　傅里叶级数

一、基本内容

- 1、傅里叶级数
- 2、收敛定理及其证明
- 3、以2π为周期的函数的展开式
- 4、以$2l$为周期的函数的展开式
- 5、偶函数与奇函数的傅里叶级数

二、目的与要求

- 掌握计算Fourier系数的公式；会写出以2π为周期的函数的Fourier级数以及奇函数、偶函数的Fourier级数展开式；了解Fourier级数的收敛定理及其证明、理解Riemann引理的证明思想。

三、重点与难点

- Fourier级数展开式；Fourier级数的收敛定理及其证明

§15.1　傅里叶级数

- **1、正交函数系**

三角函数列（也称为三角函数系）

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots \quad (1)$$

称为三角函数系

且具有共同的周期 2π.

在三角函数系(1)中，任何两个不相同的函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$上的积分等于零, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x=0\quad(m\neq n),\\&\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x=0\quad(m\neq n),\\&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,\mathrm{d}x=0\,.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

而(1)中任何一个函数的平方在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分都

不等于零，即

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\pi,\\&\int_{-\pi}^{\pi}1^2\mathrm{d}x=2\pi\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

若两个函数 φ 与 ψ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x=0$$

则称φ与ψ在$[a,b]$上是正交的, 或在$[a,b]$上具有正交性. 由此三角函数系(4)在 $[-\pi,\pi]$ 上具有正交性.

或者说(1)是正交函数系.

2、以 2π 为周期的函数的傅里叶级数

函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积. 由

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\,, n = 0,1,2,\cdots, \qquad (5a)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\,, n = 1,2,\cdots, \qquad (5b)$$

则可按公式(5)计算出 a_n 和 b_n，它们称为函数 f (关于三角函数系(1)) 的傅里叶系数, 以 f 的傅里叶系数构成的级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx). \qquad (6)$$

称为 f 的傅立叶级数。

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

f

3、收敛定理

定理15.3（傅里叶级数收敛定理）若以 2π 为周期的函数 f 在$[-\pi, \pi]$上按段光滑, 则在每一点$x \in [-\pi, \pi]$, f 的傅里叶级数(12)收敛于f 在点x 的左、右极限的算术平均值，即

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中 a_n, b_n 为f 的傅里叶系数.

概念解释

（1）. 若f 的导函数在$[a, b]$上连续, 则称f在$[a, b]$上光滑.

（2）. 如果定义在$[a, b]$上函数f 至多有有限个第一类间断点, 其导函数在$[a, b]$上除了至多有限个点外都存在且连续, 并且在这有限个点上导函数 f' 的左、右极限存在, 则称 f 在$[a, b]$上按段光滑.

重要性质

在$[a, b]$上按段光滑的函数 f, 有如下重要性质:

(1) f 在$[a, b]$上可积.

(2) 在 $[a, b]$上每一点都存在 $f(x \pm 0)$, 如果在不连续点补充定义 $f(x) = f(x+0)$, 或 $f(x) = f(x-0)$, 则还有

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} = f'(x+0),$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{-t} = f'(x-0),$$

(3) 在补充定义 f'在$[a, b]$上那些至多有限个不存在导数的点上的值后 (仍记为 f'), f' 在$[a, b]$上可积.

从几何图形上讲, 在区间$[a, b]$上按段光滑光滑函数, 是由有限个光滑弧段所组成, 它至多有有限个第一类间断点 (图15-1).

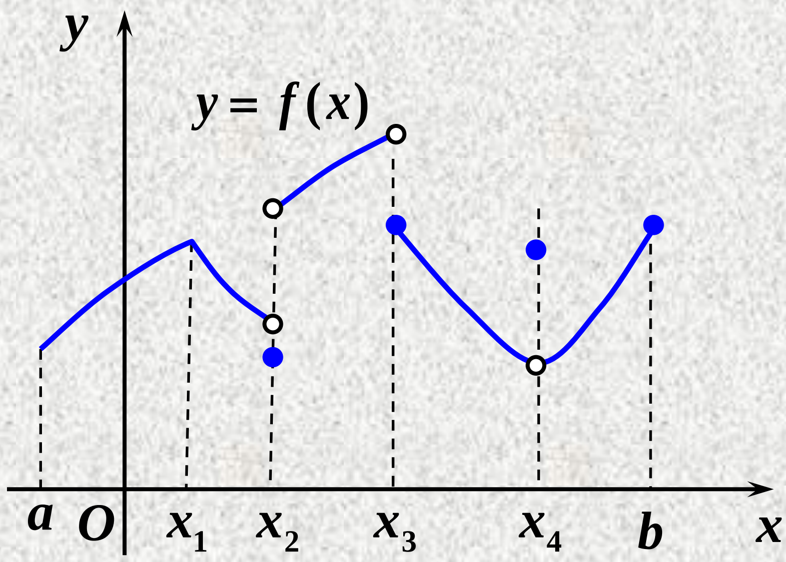

图 15 – 1

4、收敛定理的证明

预备定理1 (贝塞尔(Bessel)不等式) 若函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 则

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x, \qquad (7)$$

其中 a_n,b_n 为 f 的傅里叶系数. (7)式称为贝塞尔不等式

推论1 若 f 为可积函数, 则

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0,\\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0,\end{aligned}\right\}\qquad (8)$$

因为(1)的左边级数收敛, 所以当 $n\to\infty$ 时, 通项 $a_n^2+b_n^2\to 0$, 亦即有 $a_n\to 0$ 与 $b_n\to 0$, 这就是 (8) 式, 这个推论称为黎曼一勒贝格定理.

推论2 若 f 为可积函数, 则

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x=0,\\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x=0,\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

预备定理2 若 f 是以 2π 为周期的函数, 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 则它的傅里叶级数的部分和 $S_n(x)$ 可写成

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t,\qquad(10)$$

称为狄利克雷积分

当 $t=0$ 时，被积函数中的不定式由极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=n+\frac{1}{2}$$

来确定.

利用预备定理1和预备定理 2证明定理15.3

收敛定理指出, f 的傅里叶级数在点 x 处收敛于 f 在该点的左、右极限的算术平均值 $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$;

而当 f 在点 x 连续时, 则有

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=f(x),$$

即此时f的傅里叶级数收敛于 $f(x)$. 这样便有

推论 若 f 是以 2π 为周期的连续函数, 且在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑, 则 f 的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛于 f .

注1 根据收敛定理的假设, f 是以 2π 为周期的函数, 所以系数公式(10)中的积分区间 $[-\pi, \pi]$ 可以改为长度为 2π 的任何区间, 而不影响 a_n, b_n 的值:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad n = 0,1,2,\cdots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad n = 1,2,\cdots, \end{aligned} \tag{10'}$$

其中 c 为任何实数.

注2 在具体讨论函数的傅里叶级数展开式时, 经常只给出函数在 $(-\pi, \pi]$ (或 $[-\pi, \pi)$)上的解析式, 但读

者应理解为它是定义在整个数轴上以2π为周期的函数, 即在$(-\pi, \pi]$以外的部分按函数在 $(-\pi, \pi]$上的对应关系做周期延拓.　也就是说函数本身不一定是定义在整个数轴上的周期函数,　但我们认为它是周期函数. 如 f 为 $(-\pi, \pi]$上的解析表达式, 那么周期延拓后的函数为

$$\hat{f}(x)=\begin{cases} f(x), x\in(-\pi,\pi], \\ f(x-2k\pi), x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi], \end{cases}$$

$$k=\pm 1, \pm 2, \cdots .$$

如图15-2所示. 因此当笼统地说函数的傅里叶级数时就是指函数 $\hat{f}$ 的傅里叶级数.

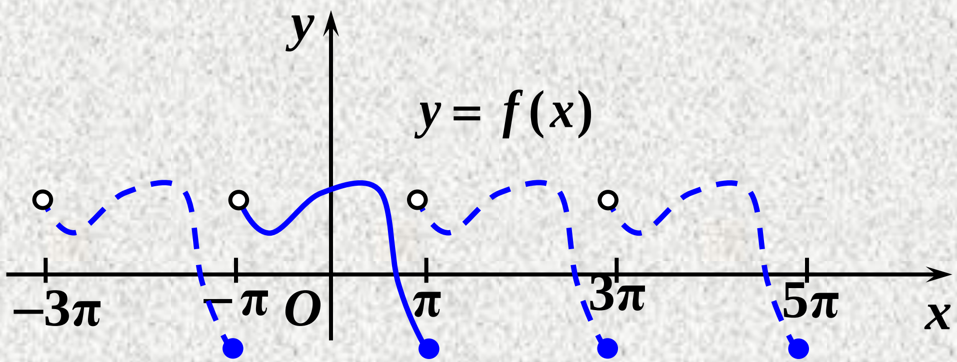

图15－2 实线与虚线的全体表示 $y = f(x)$

例 1 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0, \end{cases}$ 求 f 傅里叶级数展开式.

例2 将下列函数展开成傅里叶级数:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0<x<\pi, \\ 0\ , & x=\pi, \\ -x^2, & \pi<x\le 2\pi. \end{cases}$$

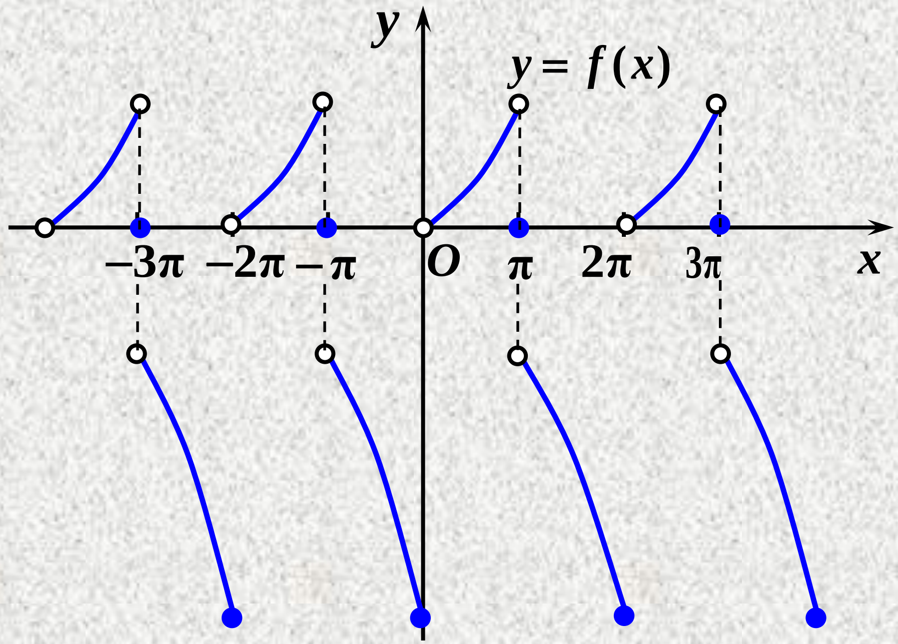

图15－5

思考题

设函数 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 并且 $f(-\pi) \neq f(\pi)$, 这样的函数能否求出其傅里叶级数?

§ 15.2 以 2*l* 为周期的函数的展开式

1、以2*l*为周期的函数的傅里叶级数

设 f 是以 $2l$ 为周期的函数，通过变量替换：

$$\frac{\pi x}{l}=t \quad 或 \quad x=\frac{lt}{\pi},$$

就可以将 f 变换成以 2π 为周期的关于变量 t 的函数

$F(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$. 若 f 在 $[-l, l]$ 上可积，则 F 在 $[-\pi, \pi]$ 上也可积，这时函数 F 的傅里叶级数展开式是：

$$F(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (1)$$

前页 后页 返回

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos nt\mathrm{d}t,\qquad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\sin nt\mathrm{d}t,\qquad n=1,2,\cdots. \tag{2}$$

因为 $t=\dfrac{\pi x}{l}$, 所以 $F(t)=f\left(\dfrac{lt}{\pi}\right)=f(x)$.于是由(1)与(2)式分别得

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{3}$$

与

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\qquad n=1,2,3,\cdots. \tag{4}$$

这里(4)式是以$2l$为周期的函数f的傅里叶系数，(3)式是f的傅里叶级数.

若函数f在$[-l,l]$上按段光滑，则同样可由收敛定理知道

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \qquad (5)$$

例1 将函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & -5\le x<0,\\ 3, & 0\le x<5\end{cases}$$

展开成傅里叶级数.

2、偶函数与奇函数的傅里叶级数

设 f 是以 $2l$ 为周期的偶函数，或是定义在 $[-l,l]$ 上的偶函数，则在 $[-l,l]$ 上，$f(x)\cos nx$ 是偶函数，$f(x)\sin nx$ 是奇函数．因此，f 的傅里叶系数(4)是

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad n=0,1,2,\cdots, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = 0,\ n=1,2,\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

前页 后页 返回

于是 f 的傅里叶级数只含有余弦函数的项，即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{7}$$

其中如 (6) 式所示 (7) 式右边的级数称为余弦级数.

同理, 若 f 是以 $2l$ 为周期的奇函数，或是定义在 $[-l,l]$ 上的奇函数，类似可推得

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = 0, n = 0,1,2,\cdots, \\ b_n &= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n = 1,2,\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

前页 后页 返回

所以当 f 是奇函数时，它的傅里叶级数只含有正弦函数的项，即

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{9}$$

其中 b_n 如 (8) 式所示. (9) 式右边的级数称为正弦级数.

若 $l=\pi$, 则偶函数 f 所展开成的余弦函数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{10}$$

其中

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

当且 f 为奇函数时，则它展成的正弦级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{11}$$

其中

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \tag{12}$$

注 如何将定义在 $[0, \pi]$ 上(或更一般地 $[0, l]$ 上)的函数展开成余弦级数或正弦级数？方法如下：首先将定义在 $[0, \pi]$ 上的函数作偶式延拓或奇式延拓到

$[-\pi, \pi]$ 上(如图15-8(a)或(b)). 然后求延拓后函数的傅里叶级数, 即得(10)或(12)形式.

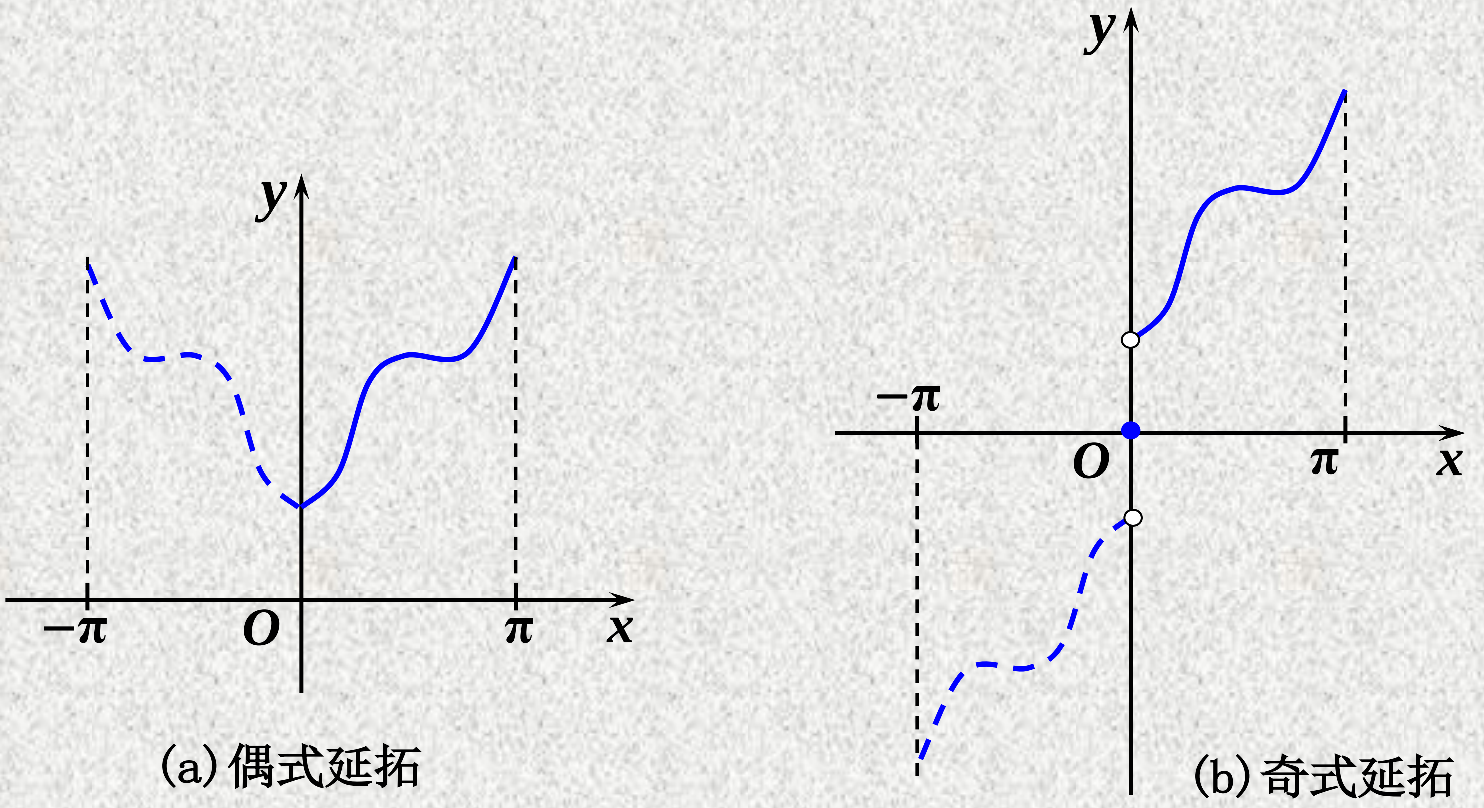

图15−8

也可以不作延拓直接使用公式(11)或(12), 计算出它的傅里叶系数，从而得到余弦级数或正弦级数.

例2 设函数

$$f(x) = |\sin x|, -\pi \le x < \pi,$$

求 f 的傅里叶级数展开式.

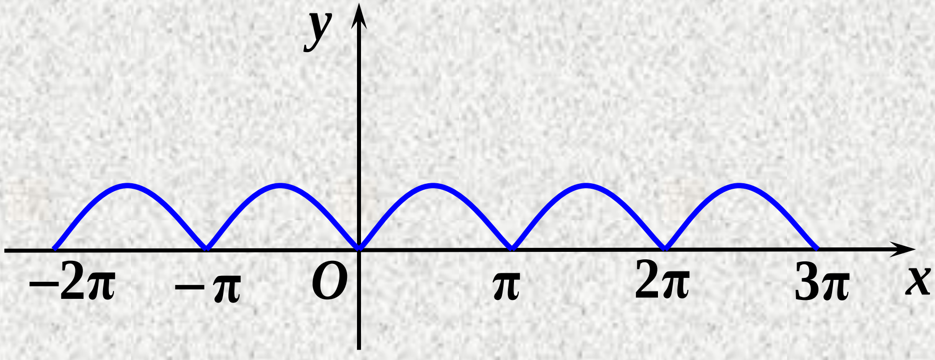

图15－9

前页 后页 返回

例3 求定义在 $[0, \pi]$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<h, \\ \frac{1}{2}, & x=h, \\ 0, & h<x\le\pi \end{cases}$$

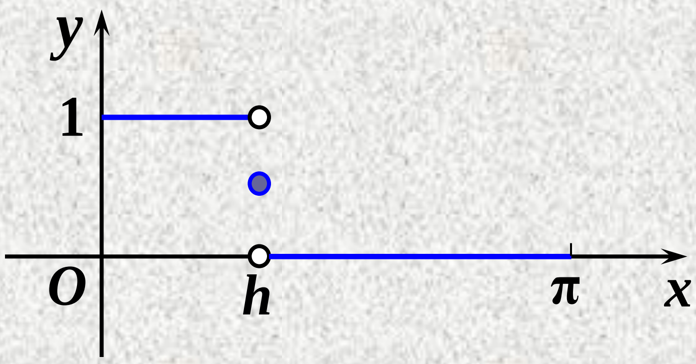

图 15-10

(其中 $0<h<\pi$)的正弦展开式.

例4 把 $f(x)=x$ 在 $(0, 2)$ 内展开成:

(i) 正弦级数; (ii)余弦级数.

前页 后页 返回