第四章 函数的连续性

- 一、主要内容
- 1、连续性概念
- 2、连续函数的性质
- 3、初等函数的连续性

二、目的要求

- 1、 熟练掌握函数连续的定义，并能利用ε-δ语言对简单的函数的连续性给出证明；
- 2、掌握连续函数的局部性质并利用它对相关问题进行讨论；
- 3、掌握闭区间上的连续函数的性质并会利用它们证明相关命题；
- 4、了解判定间断点的方法及间断点的分类；
- 5、 理解反函数的定义、存在性和连续性，并且掌握判断反函数存在性和连续性的方法；
- 6、掌握初等函数的连续性； 理解函数的一致连续性。

三、重点难点

- 1、重点是连续性的概念闭区间上的连续函数的性质
- 2、难点是函数的一致连续性。

§1 连续函数的概念

一、函数在一点的连续性

二、间断点的分类

三、区间上的连续函数

前页 后页 返回

一、函数在一点的连续性

定义1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 且

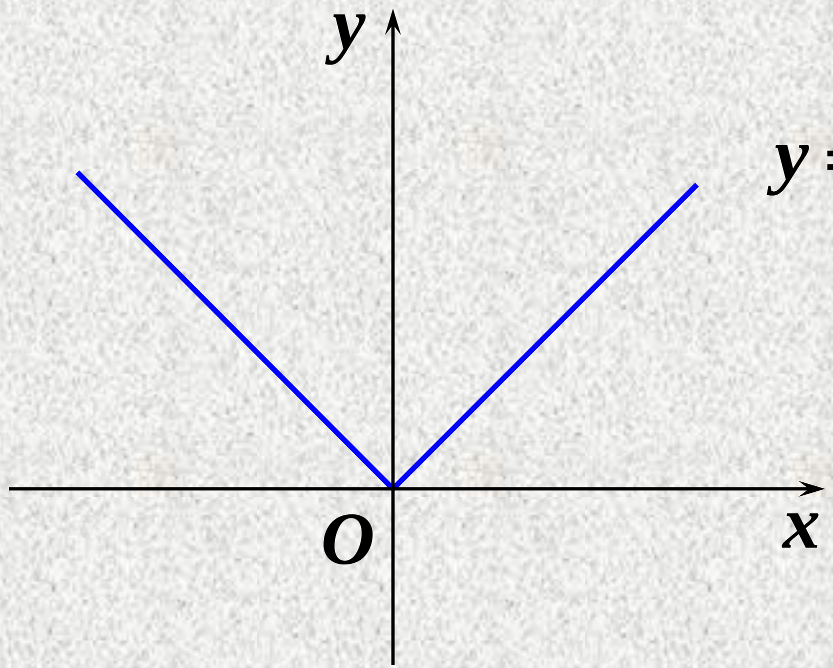
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

由定义1知，我们是通过函数的极限来定义连续性的，换句话说连续就是指 $f(x)$ 在点 x_0 的极限不仅存在, 而且其值恰为 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值 $f(x_0)$.

例如：$f(x)=x\operatorname{sgn}x$ 在 $x=0$ 处连续，这是因为

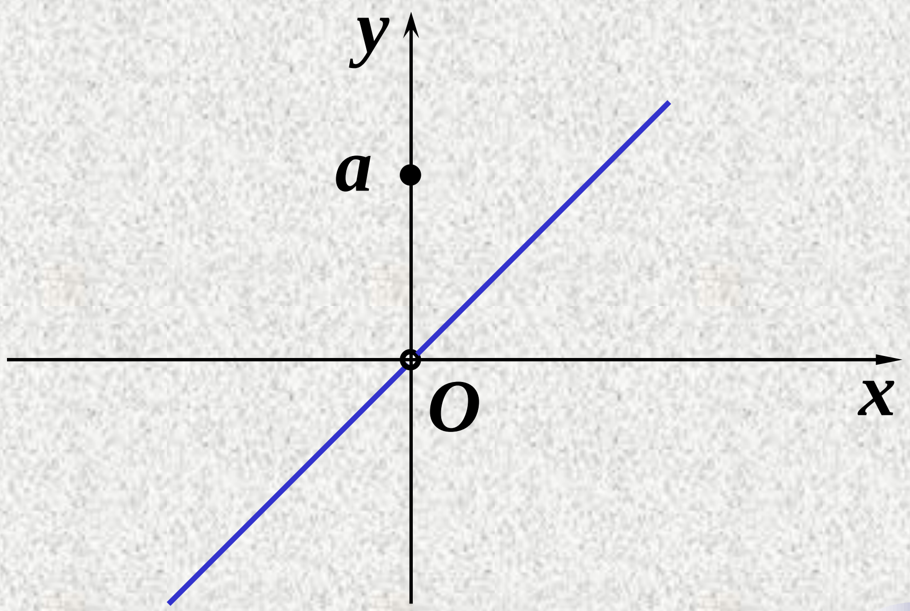
$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{sgn}x = 0 = f(0).$$



又如：函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases} \quad (a\neq 0)$$

在 $x=0$ 处不连续，这是因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\neq f(0)$.



前页 后页 返回

函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 在点 $x=0$ 处不连续, 这是因为极限 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ 不存在.

由极限的定义, 定义1可以叙述为: 对于任意正数 ε, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon. \qquad (2)$$

注意到(2)式在 $x=x_0$ 时恒成立, 因此 $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ 可改写为 $\left|x-x_0\right|<\delta$, 这样就得到函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的 $\varepsilon-\delta$ 定义.

定义2 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义.如果对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$,当 $|x - x_0| < \delta$,时

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

为了更好地刻划函数在点 x_0 的连续性，下面引出连续性的另外一种表达形式.

设 $\Delta x = x - x_0$,

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

前页 后页 返回

则函数在点 x_0 连续的充要条件是：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (3)$$

这里我们称 Δx 是自变量(在 x_0 处)的增量, Δy为相应的函数(在 y_0 处)的增量

例1 证明 $f(x)=xD(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数.

证 因为 $f(0)=0, |D(x)|\leq 1, \lim\limits_{x\to 0}x=0$, 所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}xD(x)=0=f(0).$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

注意:上述极限式绝不能写成

$$\lim_{x\to 0}xD(x)=\lim_{x\to 0}x\lim_{x\to 0}D(x)=0.$$

由上面的定义和例题应该可以看出: 函数在点 x_0 有极限与在点 x_0 连续是有区别的. 首先 $f(x)$ 在点 x_0 连续，那么它在点 x_0 必须要有极限(这就是说, 极限存在是函数连续的一个必要条件)，而且还要求这个极限值只能是函数在该点的函数值.

类似于左、右极限，下面引进左、右连续的概念.

定义3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个右邻域 $U_+(x_0)$ (左邻域$U_-(x_0)$) 有定义，若

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)\quad \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)\right),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 右(左)连续.

很明显, 由左、右极限与极限的关系以及连续函数的定义可得:

定理4.1 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是: f 在点 x_0 既是左连续，又是右连续.

例2 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ x+a, & x>0 \end{cases}$$ 在 $x=0$ 处的连续性.

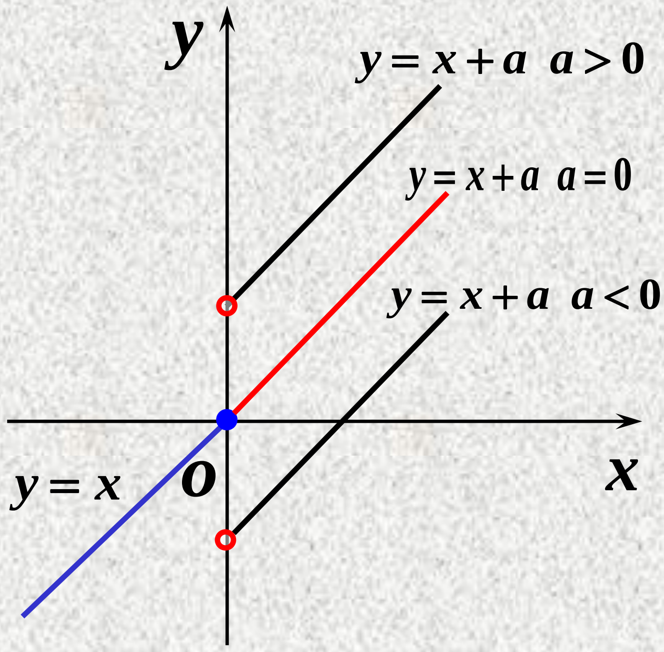
解 因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0=f(0),$$

所以 f 在 $x=0$ 处左连续.

又因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+a)=a,$$



点击上图动画演示

前页 后页 返回

所以，当 $a \neq 0$时，f 在 $x = 0$处不是右连续的；

当$a = 0$时，f 在 $x = 0$处是右连续的.

综上所述，当$a = 0$时，f 在$x = 0$处连续；

当$a \neq 0$时，在 $x = 0$处不连续.

二、间断点的分类

定义4 设函数 f 在 x_0 的某(空心)邻域 $(U^{\circ}(x_0))$ 内有定义. 若 f 在点 x_0 无定义, 或者在点 x_0 有定义但却在该点不连续, 那么称点 x_0 为函数的一个间断点或不连续点.

由此, 根据函数极限与连续之间的联系, 如果 f 在点 x_0 不连续, 则必出现下面两种情况之一:

(i) f 在点 x_0 无定义或者在点 x_0 的极限不存在;

(ii) f 在点 x_0 有定义且极限存在, 但极限值却不等于$f(x_0)$.

根据上面的分析, 我们对间断点进行如下分类:

1. 可去间断点: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 存在, 而 f 在点 x_0 无定义, 或者有定义但 $f(x_0) \neq A$, 则称 x_0 是 f 的一个可去间断点.

2. 跳跃间断点： 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$ 都存在, 但 $A\neq B$, 则称点 x_0 为 f 的一个跳跃间断点.

可去间断点和跳跃间断点统称为**第一类间断点.**

注 x_0 是 f 的跳跃间断点与函数 f 在点 x_0 是否有定义无关.

3. 第二类间断点： 若 f 在点 x_0 的左、右极限至少有一个不存在, 则称 x_0 是 f 的一个第二类间断点.

前页 后页 返回

例3 试证函数 $f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$处不连续，

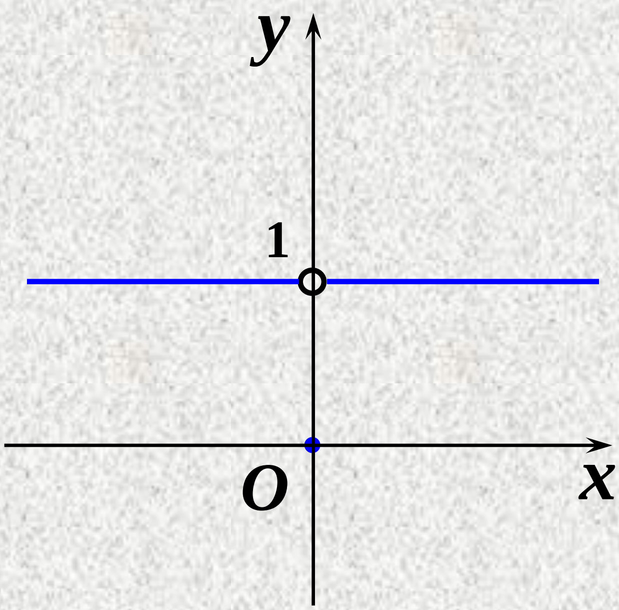
并且 $x=0$ 是 $f(x)$ 的一个可去间断点.

证 因为

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\neq f(0),$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)$的

一个可去间断点.



前页 后页 返回

注 1. 对于任意函数 $g(x)$,若它在 $x = x_0$ 处连续,

那么函数

$$F(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_0 \\ A, & x = x_0 \end{cases}$$

在 $A \neq g(x_0)$ 时, x_0 恒为$F(x)$的一个可去间断点.

2. 若点x_0是$f(x)$的可去间断点, 那么只要重新定义 $f(x)$ 在点 x_0 的值为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, 那么它就在点 x_0 连续.

例4 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{1/x}+1}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处是否连续？若不连续，则是什么类型的间断点？

前页 后页 返回

解 因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{e^{y}+1}=0=f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{e^{y}+1}=1\neq f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续而不左连续, 从而不连续. 既然它的左、右极限都存在，那么这个间断点是跳跃间断点.

例5 试问 $x=0$ 是函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 的哪一类间断点？

解 因为由归结原理可知，

$$\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x} \quad 与 \quad \lim_{x\to 0^-}\sin\frac{1}{x}$$

均不存在，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的一个第二类间断点.

三、区间上的连续函数

若函数 f 在区间I上的每一点都连续, 则称 f 为 I 上的连续函数.对于闭区间或半闭区间的端点,函数在该点连续是指相应的左连续或右连续.

例如, $y=c, y=x^n$ (n为正整数)以及 $y=\sin x$ 都是R上的连续函数；而函数 $y=\sqrt{1-x^2}$是区间 $[-1,1]$ 上的连续函数, 在 $x=-1, x=1$ 处的连续分别指右连续和左连续.

如果函数 f 在$[a, b]$上的不连续点都是第一类的,并且不连续点只有有限个, 那么称 f 是$[a, b]$上的一个按段连续函数.从几何上看,按段连续曲线就是由若干个小区间上的连续曲线合并而成(当然可能要添加或改变某些分段点处的值).

§2 连续函数的性质

在本节中,我们将介绍连续函数的局部性质与整体性质.熟练地掌握和运用这些性质是具有分析修养的重要标志.

一、连续函数的局部性质

二、闭区间上连续函数的性质

三、反函数的连续性

四、一致连续性

一、连续函数的局部性质

所谓连续函数局部性质就是指: 若函数 f 在点x_0连续(左连续或右连续), 则可推知 f 在点 x_0 的某个局部邻域(左邻域或右邻域)内具有有界性、保号性、四则运算的保连续性等性质.

定理4.2（局部有界性）若函数 f 在点 x_0 连续，则 f 在某邻域 $U(x_0)$ 上有界.

证 因为 f 在 x_0 连续，所以对 $\varepsilon = 1$,存在 $\delta > 0$,

当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < 1$, 故

$$|f(x)| \le |f(x_0)| + 1.$$

注意:我们在证明有界性时, 取 $\varepsilon = 1$ 这个特定的值, 而不是用术语“对于任意的 $\varepsilon > 0$ ”，这样可求得 $|f(x)|$ 的一个明确的上界.

定理4.3（局部保号性）若函数 f 在点 x_0 连续,且 $f(x_0)>0$ (或 $f(x_0)<0$)，则对任意一个满足 $0<r<f(x_0)$ 或($f(x_0)<-r<0$)的正数 r, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时,

$$f(x)>r \qquad (\text{或 } f(x)<-r<0),$$

证 因为 f 在 x_0 连续, 所以对正数 $\varepsilon_0=f\left(x_0\right)-r$, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0=f(x_0)-r,$$

前页 后页 返回

于是证得 $f(x) > r > 0.$

注 在具体应用保号性时, 我们经常取 $r = \dfrac{f(x_0)}{2}.$

定理4.4（连续函数的四则运算）若函数 $f(x), g(x)$ 均在点 x_0 连续,则函数

(1) $f(x)+g(x),$ (2) $f(x)-g(x),$

(3) $f(x)\cdot g(x),$ (4) $f(x)/g(x),\ g(x_0)\neq 0$

在点 x_0 也是连续的 .

此定理的证明可以直接从函数极限的四则运算得到, 具体过程请读者自行给出.

我们知道, 常函数 $y=c$ 与线性函数 $y=x$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, 故由四则运算性质, 易知多项式函数

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

也是连续函数.

同理, 有理函数

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

(分母不为零) 同样是连续函数.

下面这个定理刻划了连续这个性质在复合运算下是不变的.

定理4.5 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(u)$ 在点 u_0 连续, $u_0=f(x_0)$. 则复合函数 $g(f(x))$在点 x_0 连续.

证 由于 $g(u)$ 在点 u_0 连续, 因此对于任意的 $\varepsilon > 0$,

存在$\delta_1 > 0$, 当 $|u - u_0| < \delta_1$ 时, 有

$$|g(u) - g(u_0)| < \varepsilon,$$

又因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续，故对上述 $\delta_1 > 0$,

存在$\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - f(x_0)| = |u - u_0| < \delta_1,$$

于是

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| = |g(u) - g(u_0)| < \varepsilon,$$

这就证明了 $g(f(x))$ 在点 x_0 连续.

对这个定理我们再作一些讨论, 以加深大家对该定理的认识.

(1) 由 $\lim\limits_{u\to u_0} g(u)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=u_0$, 不一定有

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=A.$$

请大家仔细观察定理4.5 的证明, 看看此时究竟哪里通不过.

(2) 若 $g(u)$ 在 u_0 连续，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=u_0$， 则有

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(u_0)=g(\lim_{x\to x_0} f(x)). \qquad (*)$$

事实上, 只要补充定义（或者重新定义）$f(x_0)=u_0$ 使得 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 应用定理4.5, 就得到所需要的结论. 若将 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=u_0$ 改为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=u_0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=u_0 \text{ 或 } \lim_{x\to\infty} f(x)=u_0,$$

$(*)$ 式相应的结论仍旧是成立的.

前页 后页 返回

上述(1)和(2)究竟有什么本质的区别呢？请读者作出进一步的讨论.

例1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\sin(1-x^2)$.

解 $\sin(1-x^2)$可视为$g(u)=\sin u,\ u=(1-x^2)$的复合，所以

$$\lim_{x\to 1}\sin(1-x^2)=\sin(\lim_{x\to 1}(1-x^2))=0.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$.

解 因为 $g(u)=\sqrt{u}$ 在 $u=1$ 连续, 所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to 1}(2-\frac{\sin x}{x})}=\sqrt{2-1}=1.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(1+\dfrac{1}{x})^{x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}$, $\sin u$ 在点 $u=\mathrm{e}$ 连续, 所以

$$\lim_{x\to\infty}\sin(1+\frac{1}{x})^{x}=\sin\mathrm{e}.$$

二、闭区间上连续函数的性质

设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 在本节中将研究 f 在 $[a,b]$ 上的整体性质, 证明将在第七章里给出.

定义1 设 $f(x)$ 为定义在数集 D 上的一个函数. 若存在 $x_0 \in D$, 使得对一切 $x \in D$, 均有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有最大(小)值, x_0 称为最大(小)值点, $f(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在 D 上的最大(小)值.

例如, 符号函数 $y=\mathrm{sgn}\,x$ 的最大值为1, 最小值为-1;

正弦函数 $y=\sin x$ 的最大值为1, 最小值为-1; 函数

$y=x-[x]$ 的最大值不存在, 最小值为零. 注意:

$y=\sin x$ 在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上 既无最大值, 又无最小值.

(其上确界为1, 下确界为-1)

定理4.6（最大、最小值定理）若函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续, 则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有最大、最小值.

这个定理刻画了闭区间上连续函数的一个深刻的

内涵, 在今后的学习中有很广泛的应用.

推论 若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续, 则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

这是因为由定理4.6 可知, 函数 $f(x)$有最大、最小值, 从而有上界与下界, 于是 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上是有界的.

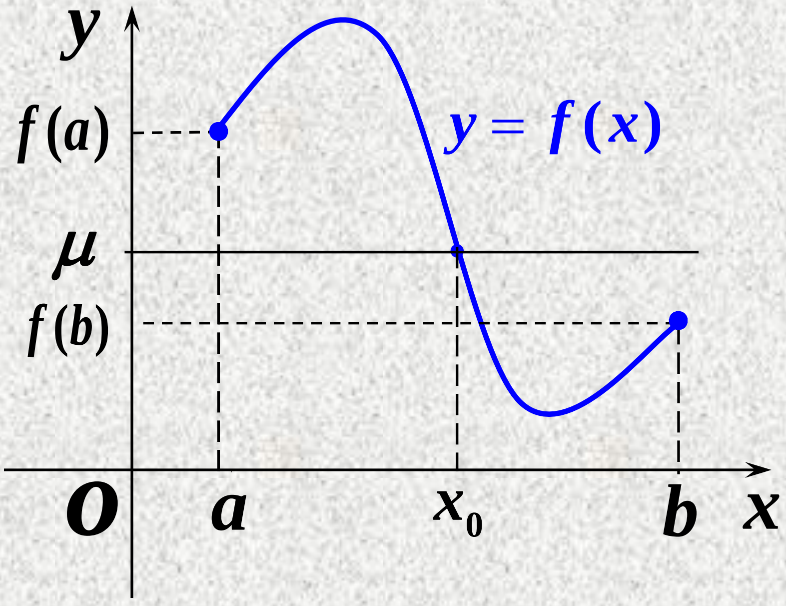
函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in(0,1)$ 虽然也是连续函数, 但是在$(0, 1)$上无界.

这说明定义在开区间和闭区间上的连续函数的性质有着根本的区别.

定理4.7（介值性定理）设函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)\neq f(b)$. 若μ是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一数($f(a)<\mu<f(b)$ 或 $f(b)<\mu<f(a)$), 则(至少)存在一点 $x_0\in(a,b)$, 使得

$$f(x_0)=\mu.$$

从几何上看，当连续曲线 $y=f(x)$ 从水平直线 $y=\mu$ 的一侧穿到另一侧时，两者至少有一个交点.



推论（根的存在性定理）若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 x_0， 使

$$f(x_0)=0$$

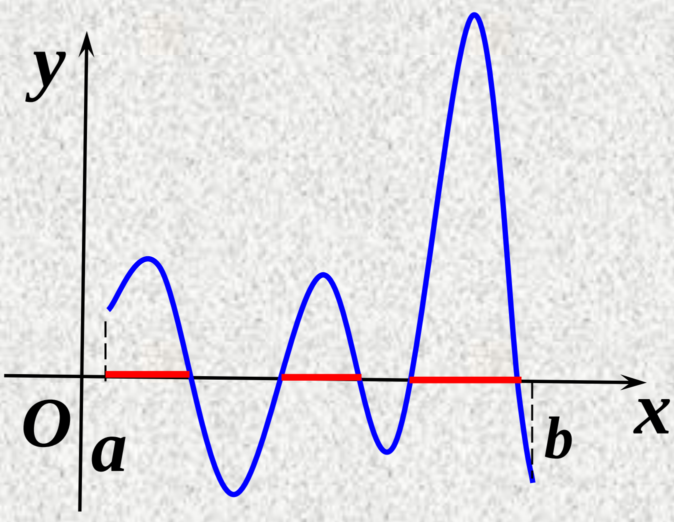
应当注意，此推论与定理4.7是等价的. 于是, 只要证明了推论, 也就完成了定理4.7 证明.

下面用确界定理来证明上述推论, 大家要注意学习确界定理的使用方法.

证 不妨设 $f(a)>0,\ f(b)<0,$ 并设

$$E=\{x\mid x\in[a,b],\ f(x)\geq 0\}.$$

(E为图中x轴上的红线部分)从几何上看，E的最大值就是函数的零点. 证明如下：



因为 $a \in E$，所以 $E \neq \varnothing$，又 E 是有界的, 故由确界定理, $x_0 = \sup E$ 存在，显然 $a \le x_0 \le b$.

我们来否定下面两种情形:

1. 若 $f(x_0) > 0$，则有 $a \le x_0 < b$. 由 $f(x)$在点 x_0是连续的, 根据保号性, 存在 $\delta > 0$ $(x_0 + \delta < b)$, 使当 $x \in [x_0, x_0 + \delta)$ 时，仍有

$$f(x) > 0.$$

特别是 $f(x_0 + \frac{\delta}{2}) > 0$, 使得 $x_0 + \frac{\delta}{2} \in E$, 这就与

前页 后页 返回

$x_0 = \sup E$ 相矛盾.

2. 若 $f(x_0) < 0$, 则有 $a < x_0 \le b$. 同样根据保号性,

$\exists\, \delta > 0\,(x_0 - \delta > a)$, 当 $x \in (x_0 - \delta\,, x_0]$时, $f(x) < 0$.

同时由 $x_0 = \sup E$, 对上述δ, 存在 x_1,使得

$$x_0 - \delta < x_1 \le x_0,\ x_1 \in E.$$

从而 $f(x_1) \ge 0$, 也导致矛盾.

排除了上面两种情形后, 就推得 $f(x_0) = 0$.

由介值性定理与最大、最小值定理立刻得到如下结论:

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 那么它的最大值 M 与最小值 m 存在, 并且

$$f([a,b])=[m,M].$$

下面再举一些应用介值性定理的例题.

例3 若 $r>0, n$ 为正整数， 则存在唯一的正数 x_0，使得 $x_0^n=r$.

证 先证存在性：

因为n为正整数，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$. 由极限的保号性知，存在 x_1，使 $x_1^n>r$. 又因为函数 $f(x)=x^n$ 在 $[0, x_1]$上连续，且 $f(0)<r<f(x_1)$，所以存在 $x_0\in(0,x_1)$，使得 $x_0^n=r$. 这个 x_0 我们记为 $x_0=\sqrt[n]{r}$ (读作 r 的 n 次算术根).

再证唯一性:

我们只需证明 $f(x)=x^n$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增

即可. 事实上, $\forall x, y$, 使 $0\le x<y$, 有

$$y^n-x^n=(y-x)(y^{n-1}+y^{n-2}x+\cdots\cdots+yx^{n-2}+x^{n-1})$$

$$>0,$$

即 $f(x)<f(y)$.

例4 设 f 在$[a,b]$上连续, $f([a,b])\subset[a,b]$. 求证:

存在 $x_0\in[a,b]$, 使 $f(x_0)=x_0$.

证 由条件知$a \le f(a)$, $f(b) \le b$.

若$a = f(a)$或$b = f(b)$, 则结论成立.

现设$a < f(a)$, $f(b) < b$. 作辅助函数

$$F(x) = f(x) - x,$$

则 $F(a) \cdot F(b) = (f(a) - a) \cdot (f(b) - b) < 0.$

因$f(x)$在$[a, b]$上连续, 故$F(x)$在$[a, b]$上也连续.

由介值性定理，存在$x_0 \in (a, b)$, 使$F(x_0) = 0$, 即

$$f(x_0) = x_0.$$

前页 后页 返回

例5 设 $f(x)$ 在区间(a, b)内满足介值性,并且对于任意的实数 r, $f(x)=r$ 至多有有限个解. 证明:

$f(x)$在(a,b)内连续.

证 只要证$\forall x_0 \in (a,b)$, $f(x)$ 在点 x_0 连续. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由条件, 方程

$$f(x)=f(x_0)+\varepsilon \quad 与 \quad f(x)=f(x_0)-\varepsilon$$

的解至多为有限个.

1. 设这有限个解为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 记

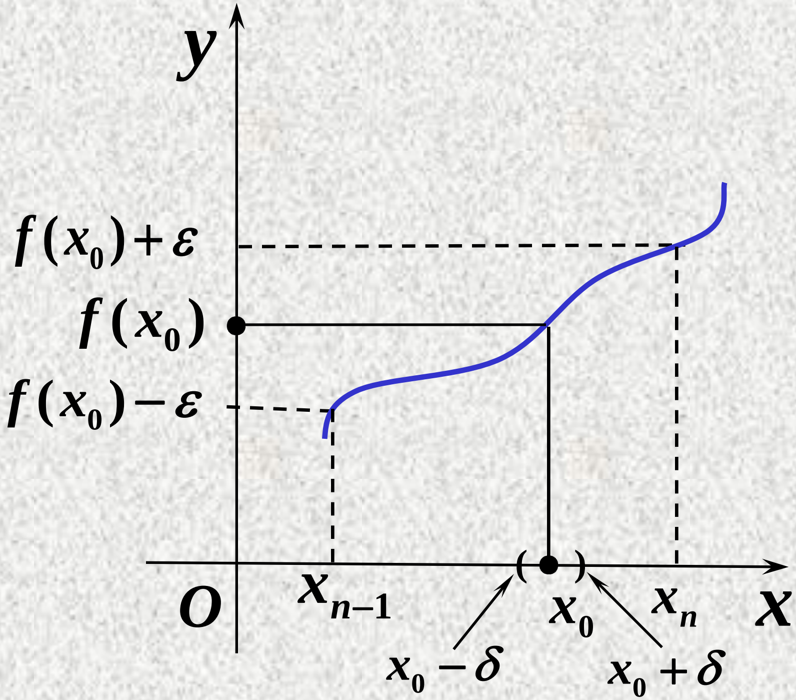
$$\delta = \min\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|, \cdots, |x_n - x_0|\},$$

显然 $\delta > 0$.

由介值性条件不难证明:

当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.



前页 后页 返回

2. 如果解为空集, 任意取 $\delta > 0$, $U(x_0;\delta) \subset (a,b)$,

当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

即 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

三、反函数的连续性

定理4.8 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调且连续，则反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 或 $[f(b),f(a)]$ 上连续，且 $f^{-1}(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的单调性.

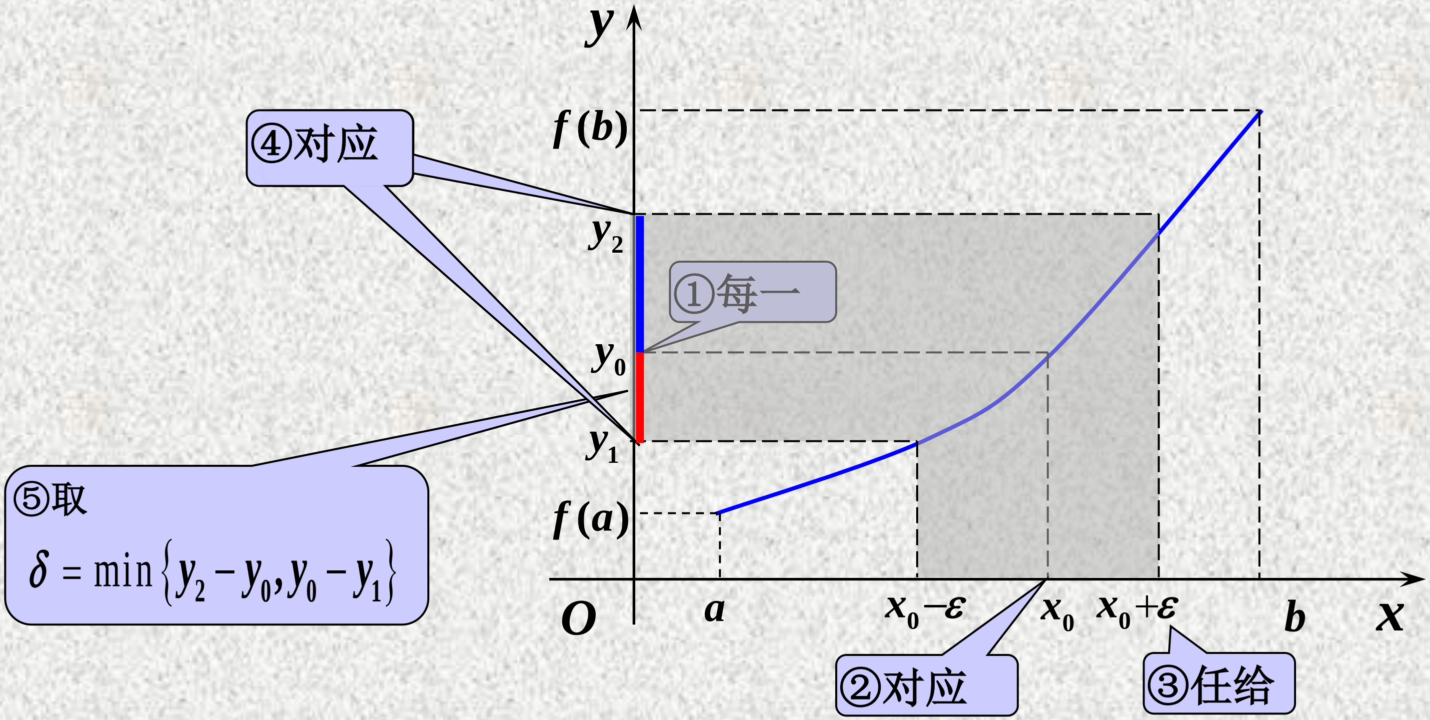
证 不妨设 $f(x)$ 严格增，那么 $[f(a),f(b)]$ 就是反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域.

1. $x=f^{-1}(y)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 上严格增 (证明见定理1.2).

2. $x = f^{-1}(y)$ 在 $[f(a), f(b)]$ 上连续.

对于任意 y_0, $f(a) < y_0 < f(b)$, 令 $x_0 = f^{-1}(y_0)$,

则 $a < x_0 < b$. (如图所示)



前页 后页 返回

对于任意的正数 ε , $a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b$, 设

$$y_1 = f(x_0 - \varepsilon), y_2 = f(x_0 + \varepsilon),$$

令 $\delta = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\} > 0,$

当 $(y_1 \leq) y_0 - \delta < y < y_0 + \varepsilon (\leq y_2)$ 时,

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2),$$

即 $f^{-1}(y_0) - \varepsilon < y < f^{-1}(y_0) + \varepsilon.$

这就说明了 $x = f^{-1}(y)$ 在 $\big(f(a), f(b)\big)$ 上连续.

请读者类似地证明该函数在端点的连续性.

例6 由于 $f(x)=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续且严格增，因此它的反函数 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上也是连续且严格增. 关于其它的反三角函数

$$y=\arccos x\,,\ y=\arctan x\,,\ y=\operatorname{arccot} x\,,$$

均可得到在定义域内连续的结论.

例7 由于 $y=x^n$(n为正整数) 在 $[0,+\infty)$ 上连续且严格增, 那么其反函数 $y=x^{\frac{1}{n}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上亦为连续且严格增.

四、一致连续性

在本节中，我们将介绍一致连续性这个及其重要的概念.

定义2. 设 $f(x)$为定义在区间I上的函数, 如果对于任意的正数$\varepsilon > 0$,存在$\delta > 0$, 使得对任意$x_1, x_2 \in I$, 只要$|x_1 - x_2| < \delta$，就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在区间I上一致连续.

首先来看两个例题.

例8 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续 .

证 因为对任意的 $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$, 有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\le |x_2-x_1|,$$

所以对任意的正数 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon$, 当

$|x_1-x_2|<\delta$ 时, $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\le|x_2-x_1|<\varepsilon$,

所以 $\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

例9 证明 $y=\dfrac{1}{x}$在 $(0,1)$ 内不一致连续.

证 首先我们根据一致连续的定义来叙述 $f(x)$ 在区间I上不一致连续的定义:

存在$\varepsilon_0>0$, 对任意正数δ (无论δ多么小), 总有

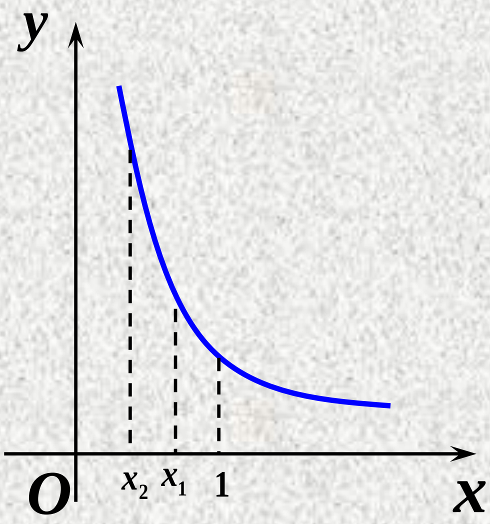
$x_1, x_2 \in I$, 虽然 $|x_1-x_2|<\delta$,但仍有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\geq \varepsilon_0.$$

现在来验证函数 $y=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1)$ 确实不是一致连续的.

取$\varepsilon = 1$，对任意正数$\delta\,(\delta < \dfrac{1}{2})$,

令 $x_1 = \delta$, $x_2 = \dfrac{\delta}{2}$, 虽$|x_1 - x_2| < \delta$,



但 $\left|\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}\right| = \dfrac{1}{\delta} > 1.$

这就说明$y = \dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内不一致连续.

试问, 函数 $f(x)$ 在区间I上一致连续与 $f(x)$在区间I上连续的区别究竟在哪里?

答:(1) 首先, 对于 $\varepsilon > 0$, 如果 $f(x)$在区间 I上连续, 那么, δ 不仅与ε有关, 而且还与所讨论的点 x_0有关, 即 $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$. 而 $f(x)$ 在区间I上一致连续. 那么 δ仅与ε 有关.

比如 $y = \dfrac{1}{x}$在 $x_0 \in (0,1)$连续, 对于任意正数ε, 所得

$\delta = \min\left\{\dfrac{2\varepsilon}{x_0^2}, \left|\dfrac{x_0}{2}\right|\right\}$, 显然 它与$\varepsilon, x_0$都有关.在例8中

已证得$y = \sqrt{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续. 这是由于

前页 后页 返回

$\varepsilon = \delta$, δ与x_0无关.

(2) 函数 $f(x)$ 在每一点 $x_0 \in I$ 连续, $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, 当$|x - x_0| < \delta$时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

若$\delta(\varepsilon, x_0)$在x_0的变化过程中有一个正下界(当然这个下界只与ε有关, 而与x_0无关), 则此时$f(x)$在区间I上就一致连续了.

下述定理是连续函数在闭区间上的又一整体性质.

定理4.9（一致连续性定理） 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

这个定理告诉我们: 定义在闭区间上的函数，连续和一致连续是等价的.

例10 设区间 I_1 的右端点为 $c \in I_1$，区间 I_2 的左端点也为 c，并且 $c \in I_2$. 证明：若 $f(x)$ 分别在 I_1, I_2 上一致连续，则 $f(x)$ 在区间 $I_1 \cup I_2$ 上也一致连续.

证 对任意的 $\varepsilon > 0$，因为 $f(x)$ 在 I_1, I_2 上一致连续，所以分别存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$，使得

当 $x_1, x_2 \in I_1, |x_1 - x_2| < \delta_1$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$,

当 $x_1, x_2 \in I_2, |x_1 - x_2| < \delta_2$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, 则对于任意的 $x_1, x_2 \in I_1 \cup I_2$,

当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有以下两种情形:

情形1. $x_1, x_2 \in I_1$ 或 $x, x_2 \in I_2$. 此时自然有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

情形2. $x_1 \in I_1,\ x_2 \in I_2$. 注意到

$$c \in I_1 \cap I_2, |x_1 - c| < \delta, |x_2 - c| < \delta,$$

可得

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f(c)| + |f(x_2) - f(c)|$$

$$\le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

综上，证得 $f(x)$ 在区间 $I_1 \cup I_2$ 上一致连续.

注 例10的条件“$c \in I_1 \cap I_2$”是重要的. 比如

$$f(x)=\begin{cases}1, & 1\le x\le 2\\ 0, & 2< x\le 3\end{cases}$$

在区间 $[1,2]$ 与区间 $(2,3]$ 上分别一致连续, 但在区间 $[1,3]$ 上不连续, 当然也不一致连续.

例11 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. 证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 所以对任意的正数 $\varepsilon>0$, 存在 $X>a$, 当 $x_1, x_2>X$ 时, 有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

又 $f(x)$ 在 $[a, X+1]$ 上连续，故由定理4.9可知 $f(x)$ 在 $[a, X+1]$ 上一致连续. 因此对上述 ε，存在正数 $\delta\,(\delta<1)$，使对任意 $x_1, x_2\in[a, X+1]$,

只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 必有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

现对任何 $x_1,x_2\in[a,+\infty), |x_1-x_2|<\delta$, 讨论如下.

情形 1. $x_1,x_2\in[a,X+1]$, 自然有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon;$$

情形2. 注意到 $\delta<1$, 所以若情形1 不成立, 必然有

$$x_1>X, x_2>X,$$

于是

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

综上, 证得 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

§3 初等函数的连续性

在学习了连续函数的定义及其一系列基本性质后，现在可以证明一个重要结论：初等函数在其有定义的区间上总是连续的.

一、指数函数的连续性

二、初等函数的连续性

一、指数函数的连续性

在第一章中, 我们已经定义了指数函数

$$y = a^x, \quad x \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1,$$

并指出它在 R 内是严格单调的. 所以, 若能证明指数函数是连续函数, 那么它的反函数对数函数在其定义域内也是连续函数.

首先证明指数函数的一个重要性质.

定理4.10 设 $a>0, a\neq 1, \alpha$、β 为任意实数，则有

$$a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}.$$

证 当 α, β 是有理数时，这是我们熟知的一个结果.

先设 $a>1$，由定义，

$$a^{x}=\sup_{r<x}\{a^{r}\mid r\text{ 为有理数}\}.$$

对于任意 $\varepsilon>0\ (\varepsilon<a^{\alpha}, \varepsilon<a^{\beta})$，存在有理数 $r_1<\alpha$，$r_2<\beta$，使

$$a^{r_1}>a^{\alpha}-\varepsilon,\ a^{r_2}>a^{\beta}-\varepsilon,$$

于是有

$$(a^{\alpha}-\varepsilon)(a^{\beta}-\varepsilon)<a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}\le a^{\alpha+\beta}.$$

因为 ε 是任意的, 所以

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}\le a^{\alpha+\beta}.$$

反之, 存在有理数 $r_0(r_0<\alpha+\beta)$, 使

$$a^{r_0}>a^{\alpha+\beta}-\varepsilon.$$

再取有理数 $r_1<\alpha,\ r_2<\beta$, 使 $r_0<r_1+r_2$, 则

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}>a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}>a^{r_0}>a^{\alpha+\beta}-\varepsilon,$$

仍因 ε 是任意的, 又得

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}\geq a^{\alpha+\beta}.$$

这就证明了

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}.$$

对于$0<a<1$的情形，只要令

$$b=\frac{1}{a},$$

就有

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=b^{(-\alpha)}\cdot b^{(-\beta)}=b^{-(\alpha+\beta)}=a^{\alpha+\beta}.$$

定理4.11 指数函数 $y = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$ 在 R上是连续的.

证 我们仍旧先假设 $a > 1$. 首先证明指数函数在 $x = 0$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 = f(0)$.

这是因为对于任意的正数 $\varepsilon\ (0 < \varepsilon < 1)$，取

$$\delta = \min\{\log_a(1+\varepsilon), |\log_a(1-\varepsilon)|\},$$

当 $|x| < \delta$ 时，就有 $|a^x - 1| < \varepsilon$.

所以 a^x 在 $x = 0$ 处连续.

对于一般的点 $x_0 \in \mathbf{R}$，由定理4.10得到

$$\lim_{x \to x_0} a^x = \lim_{x \to x_0} a^{x_0} \cdot a^{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = a^{x_0},$$

所以 $f(x) = a^x$ 在 R 上连续.

对于 $0 < a < 1$ 情形，只要设 $b = \dfrac{1}{a}$，由

$$a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x},$$

就可得到相应的结论.

注 当 $a = 1$时，$y = a^x = 1$ 显然是连续函数.

前页 后页 返回

推论1 对数函数 $y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是连续的.

推论2 幂函数 $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ 在定义域 $(0,+\infty)$上也是连续的.

例1 设 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$. 证明

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^{b}.$$

证 设$u(x_0)=a$, $v(x_0)=b$, 则 $u(x),v(x)$ 在点 x_0 连续, 从而 $v(x)\ln u(x)$ 在点 x_0 也连续, 于是证得

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)}$$

$$= \mathrm{e}^{b\ln a} = a^b.$$

注 例1的结论可改写为

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b = \left[\lim_{x\to x_0} u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 因为 $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = (1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}$，令

$$u(x) = (1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}},\ v(x) = \frac{\cos x-1}{x^2}.$$

前页 后页 返回

当 $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\cos x-1\neq 0$，故

$$\lim_{x\to 0} u(x)=\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

由此求得

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-a}{x^2}}$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

前页 后页 返回

二、初等函数的连续性

我们已经知道以下函数在定义域内是连续的

(i) 常值函数;

(ii) 三角函数;

(iii) 反三角函数;

(iv) 幂函数;

(v) 指数函数;

(vi) 对数函数.

以上六种函数称为基本初等函数. 因为连续函数的四则运算与复合运算是保连续的，所以由上面的基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合之后产生的新函数在其定义区间（如果存在）上是连续的.

定义3 由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所产生的函数称为初等函数.

由上面的分析，我们得到如下结论：

定理4.12 初等函数在其有定义的区间上是连续的.

注 上述结论中所指的"定义区间",今后(第十章)在一般意义下可以改为"定义域".

例3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$.

解 因为 $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$ 是初等函数, 所以在 $x=0$ 处连续,

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\cos x}=\frac{\ln(1+0)}{\cos 0}=0.$$

例4 据理说明

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

不是初等函数.

解 因为 $x=0$ 是 $f(x)$ 的定义区间上的点, 而

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\neq 0=f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 因此函数 $f(x)$ 不是初等函数.