线性代数

高景利
南阳师范学院数学与统计学院

目　录

目 录

学习基本要求

- 1．理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量.
- 2．理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.
- 3．掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.
- 4．掌握二次型及其矩阵表示，了解二次型秩的概念，了解合同变换与合同矩阵的概念，了解二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理.
- 5．掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法化二次型为标准形.
- 6．理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法.

学习考研要求　第五章　相似矩阵及二次型

- 1．理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量.
- 2．理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.
- 3．掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.
- 4．掌握二次型及其矩阵表示，了解二次型秩的概念，了解合同变换与合同矩阵的概念，了解二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理.
- 5．掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法化二次型为标准形.
- 6．理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法.

第一节 向量的内积及正交

1. 向量的内积

(1)**定义** 设有两个n维向量

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T \quad \beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$$

称

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

为 α 与 β 的**内积**．

(2)性质

(I) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

(II) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$

(III) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(IV) $(\alpha,\alpha)\geq 0$ ，当且仅当 $\alpha=\theta$ 时 $(\alpha,\alpha)=0$

(V) **柯西–施瓦兹不等式**

$$(\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$$

其中等号成立当且仅当 α 与 β 线性相关.

证明：若 $\beta=0$，显然 $(\alpha,\beta)^2 \le (\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$

若 $\beta\neq 0$，令 $\gamma=\alpha+\boldsymbol{x}\beta$，则

$$(\gamma,\gamma)=(\alpha+\boldsymbol{x}\beta,\alpha+\boldsymbol{x}\beta)$$

$$=(\beta,\beta)\boldsymbol{x}^2+2(\alpha,\beta)\boldsymbol{x}+(\alpha,\alpha)$$

则 $(\gamma,\gamma)\ge 0$ 当且仅当 $4(\alpha,\beta)^2 \le 4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$

且当且仅当 $\gamma=0$，即 α 与 β 线性相关时，等号成立.

2. 向量的长度及夹角

➢ **定义** 称非负实数 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 为 α 的**长度或模**，记作 $\|\alpha\|$，即 $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$.

➢ **性质**

（I） 非负性 $\|\alpha\|\geq 0$ 当且仅当 $\alpha=\theta$ 时 $\|\alpha\|=0$

（II）齐次性 $\|k\alpha\|=k\|\alpha\|$

（III）三角不等式性 $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$

（IV）**柯西—布涅柯夫斯基不等式：** $|(\alpha,\beta)|\leq\|\alpha\|\,\|\beta\|$

其中等号成立当且仅当 α 与 β 线性相关.

- 长度为 1 的向量称为**单位向量**.

  非零向量 α 的单位化：$\beta = \dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$

- **定义**　称 $\theta = \arccos \dfrac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \, \|\beta\|}$　$0 \le \theta \le \pi$

  为任意非零向量 α 与 β 的**夹角**.

3. 向量的正交

◆ **定义：** 若 $(\alpha,\beta)=0$，称 α 与 β 正交.

显然，零向量与任意一个向量都正交.

当 $\alpha,\beta \neq 0$ 时， α 与 β 正交

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 的夹角 } \theta = \frac{\pi}{2}$$

◆ 两两正交的非零向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 称为**正交向量组**.

性质： 正交向量组一定线性无关.

4. 标准正交向量组

✓ 1） 定义　设向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$ 两两正交，且均为单位向量

则称向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$ **是标准正交向量组**（或者**规范正交向量组**）

2）性质：

$$\left(\varepsilon_i,\varepsilon_j\right)=\begin{cases}0 & , \quad i=j \\ 1 & , \quad i\neq j\end{cases}$$

问题是：如何把一个向量组化为标准正交向量组？

施密特（Schmidt）正交化方法可以把一组线性无关的向量组化为与之等价的标准正交向量组.

其具体的做法：

（1）正交化

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，取

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

. . . . . .

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_s, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})}\beta_{s-1}$$

（2）单位化

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}\qquad \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}\qquad \cdots\cdots\qquad \gamma_s=\frac{\beta_s}{\|\beta_s\|}$$

这样，所得的向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 就是与原来的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价的正交单位向量组.

例1 将 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,3,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_3=(4,-1,0)^T$

化为标准正交向量组.

例2 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求一组非零向量 α_2,α_3，使

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交.

5. 正交矩阵

(1)**定义** 设 A是n 阶方阵，如果 $A^T A = AA^T = I$ 则称 A 为n 阶**正交矩阵**.

(2)**性质**

(i)正交矩阵的行列式等于 ± 1；

(ii)正交矩阵一定可逆，且 $A^{-1} = A^T$；

(iii)设 A为正交矩阵，则 A^{-1}, A^*, A^T 也是正交矩阵；

(iv)正交矩阵的乘积仍是正交矩阵, 但正交矩阵的和不一定是正交矩阵；

(v) 方阵 A 为正交矩阵的充分必要条件是它的列(行) 向量组为标准正交向量组；

第二节　方阵的特征值、特征向量

1. 定义

设 A为 n 阶方阵，如果存在一个数 λ 以及一个非零 n 维向量 α ，使得关系式

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

成立，则称 λ 为 A的一个特征值，非零向量 α 为 A 的对应于(或属于)特征值 λ 的特征向量.

注释：

（1） 特征值、特征向量是相互依存的.

（2） 一个特征向量只能对应于一个特征值.

这是因为，若 α 是属于 λ_1 与 λ_2 的特征向量，即

$$A\alpha = \lambda_1\alpha = \lambda_2\alpha$$

所以

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha = 0$$

由于 $\alpha \neq 0$ ，所以 $\lambda_1 = \lambda_2$

（3） 属于一个特征值的特征向量可以是无穷多个.

事实上，若 α 都是属于特征值 λ 的特征向量，则对 $\forall k \neq 0$，有

$$A(k\alpha) = k(A\alpha) = k(\lambda\alpha) = \lambda(k\alpha)$$

即，$k\alpha(k \neq 0)$ 都是属于特征值 λ 的特征向量.

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 都是属于特征值 λ 的特征向量

，则 $\forall k_1,k_2,\cdots,k_s \in R$ 有

$$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s$$
$$=\lambda(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)$$

也即是说，只要 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不同时为零，则

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$$

也是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量.

2. 特征值与特征向量的求法

特征矩阵　$A-\lambda E$

特征多项式　$|A-\lambda E|$

特征方程　$|A-\lambda E|=0$

(1) 特征值　求出 A 的特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 的全部根 λ_i，它们就是 A 的所有特征值.

(2) 特征向量　对于 A 的每一个特征值 λ_i ，求出齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的一个基础解系 $\xi_{i_1},\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_s}$ ，该方程的所有非零解 $k_{i_1}\xi_{i_1}+k_{i_2}\xi_{i_2}+\cdots k_{i_s}\xi_{i_s}$ ，其中 $k_{i_1},k_{i_2},\cdots,k_{i_s}$ 不同时为0即为所求的属于特征值 λ_i 特征向量.

例1 求矩阵 A 的特征值和特征向量.

(1) $$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

(2) $$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

(3) $$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

解（1） $$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(2-\lambda)=0$$

所以A的特征值为 $\lambda_1=4,\lambda_2=2$

当 $\lambda_2=2$ 时，因为属于特征值2的特征向量是齐次线性方程组 $(A-2E)x=0$ 的非零解，又因为

$$A-2E=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以，属于特征值2的线性无关的特征向量为

$$p_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

齐次线性方程组 $(A-2E)x=0$ 的基础解系

属于特征值4的所有的特征向量为 $k_2p_2,(k_2\neq 0)$

齐次线性方程组 $(A-2E)x=0$ 的所有非零解

（2）

$$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-\lambda & -1 & 0\\ 1 & -3-\lambda & 0\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1 & 0\\ 1 & -3-\lambda & 0\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)^3$$

所以A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-2$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-2$ 时，因为属于特征值−2的特征向量是齐次线性方程组 $(A+2E)x=0$的非零解，又因为

$$A+2E=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，属于特征值-2的线性无关的特征向量为

$$p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

齐次线性方程组 $(A+2E)x=0$的基础解系

属于特征值-2的所有的特征向量为 $k_1p_1,(k_1\neq 0)$

齐次线性方程组 $(A+2E)x=0$ 的所有非零解

（3）

$$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(-\lambda-1)^2$$

所以A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2$

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，因为属于特征值−1的特征向量是齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$ 的非零解，又因为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，属于特征值-1的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系

属于特征值4的所有的特征向量为

$$\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{p}_2,(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2\text{不同时为零})$$

齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$ 的所有非零解

3. 性质

(1) n 阶方阵 A 有n个特征值(重根按重数计算).

(2)设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 A的n个特征值,
则 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$，$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=tr(A)$
其中 $tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$称为方阵 A的**迹**.

(3)设λ 是方阵 A 的特征值，则
λ 是 A^T 的特征值; $k\lambda$ 是 kA 的特征值($k\neq 0$);
λ^k 是 A^k 的特征值; λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值;
$\lambda^{-1}|A|$ 是A^* 的特征值(A 可逆）.

(4)设 λ 是方阵 A的特征值，则 A的多项式 $g(A)=a_k A^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1 A^1+a_0 I$ 的特征值是 $g(\lambda)=a_k\lambda^k+a_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+a_1\lambda^1+a_0$.

(5)方阵 A可逆的充要条件是全部特征值 $\neq 0$.

(6)方阵 A的属于不同特征值 的特征向量线性无关.

例2　设3阶方阵 A 的特征值为1，-1, 2，求

$$\left|3\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right|$$

第三节　相似矩阵

1. 矩阵的相似

(1) 定义

设 A 和 B 都是n阶方阵，如果存在n阶可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$，则称矩阵 A 与 B **相似，**

(2) 性质

(i) **自反性**：　A与A相似

对称性：　若A与B相似，则B与A相似

传递性：　若A与B相似，B与C相似，则A与C相似.

（ⅱ）若A与B相似，则 $R(A)=R(B)$

(ii)设 n阶矩阵 A与 B 相似，则 A 与 B 有相同的特征多项式，从而有相同的特征值；有相同的迹；有相同的行列式.

推论：若 n 阶矩阵 A与对角阵 $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 相似，则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值.

推论：若 n 阶矩阵 A与一个对角阵相似，则该对角阵是以 A 的特征值为对角元 .

问题：（1）A是否可以相似于一个对角矩阵？

（2）若可以，求对角阵 Λ 及可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda$

2. 矩阵的相似对角化

(1) 充分必要条件： n 阶方阵 A 相似于对角矩阵 Λ 的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.
(即 A 的 k 重特征值有 k 个线性无关的特征向量)

(2) 充分条件： 若 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值，则 A 可相似对角化.

(3) 具体方法：

求出n阶矩阵 A的所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 及对应的n个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 则，令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ ，有 $P^{-1}AP=\Lambda$

其中，$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

相对应

看上一节的3个例子，判断 A 能否对角化，如果能写出可逆矩阵及对角阵.

例1　设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

问 x 取何值时，A能对角化？

解

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 1\\ 1 & 1-\lambda & x\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

所以，A的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$

当 $\lambda_3=-1$ 时，一定有A的一个线性无关的特征向量. 要使A可以相似对角化，即使A得属于特征值1的线性无关的特征向量有2个，也即是齐次线性方程组 $(A-E)x=0$ 的基础解系有2个解向量，即

$R(A-E)=1$ ，因为

$$A-E=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & x\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & x+1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以， $x=-1$ 时，$R(A-E)=1$ ，A的属于特征值-1 的线性无关的特征向量有2个，A可以相似对角化.

第四节　实对称矩阵的对角化

(1) 实对称矩阵的性质

(i)实对称矩阵的特征值都是实数；

(ii)实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交;

(iii)n阶实对称矩阵有n个线性无关的特征向量;

1^0　实对称矩阵一定可以对角化

2^0　使 A 对角化的矩阵 P 可以是正交阵.

(2) 实对称矩阵的对角化

定理7　设 A 为 n 阶实对称矩阵，则必有正交阵 P 使 $P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$，其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角阵.

推论 设 A 为 n 阶实对称矩阵，λ 是 A 的 $\boldsymbol{k}$ 重特征值，则 $R(A-\lambda E)=n-k$ ，从而对应于 λ 的线性无关的特征向量恰有 k 个.

实对称矩阵对角化的具体方法

（1）求出矩阵A的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 及重数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 且 $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$

（2）求出λ_i所对应的齐次线性方程组$(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{k_i}$ （即是A的属于特征值 λ_i 线性无关的特征向量），利用施密特正交化方法将 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{k_i}$ 正交化单位化，得 $p_1,p_2,\cdots,p_{k_i}$

（3）将所得的p_i作为矩阵P的列.

例 2　设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$$

求正交阵 P 和 Λ，使 $P^{-1}AP=P^{T}AP=\Lambda$

解

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\left(-1-\lambda\right)^2(5-\lambda)$$

所以，A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ ， $\lambda_3=5$

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，

$$\left(A+E\right)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以，A的属于特征值-1的线性无关的特征向量为：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

（利用Schmidt正交化方法将其正交单位化.）

令

$$\eta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\xi_2-\frac{[\xi_2,\eta_1]}{[\eta_1,\eta_1]}\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

从而

$$p_1=\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},p_2=\frac{\eta_2}{\|\eta_2\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

即为A的属于-1的标准正交特征向量即为

当 $\lambda_3 = 5$ 时，

$$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以，A的属于特征值5的线性无关的特征向量

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{\xi_3}{\|\xi_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，即为A的属于特征值5的单位正交向量组.

令

$$P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

有

$$P^{-1}AP=P^{T}AP=\Lambda$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

第五节 二次型及其标准形

1. 实二次型及其表示

n个变量 的二次齐次多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=$

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$

$$+\ a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n$$

$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\ a_{nn}x_n^2$$

称为关于变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个n元二次型

若 $a_{ij}\in R\,(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称其为实二次型.

令 $a_{ij}=a_{ji}$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2 \quad +a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n$$

$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2 \quad +\cdots+a_{2n}x_2x_n$$

$$+\cdots\cdots$$

$$+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

$$=x_1\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\right)$$

$$+x_2\left(a_{21}x_2+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\right)$$

$$+\cdots\cdots$$

$$+x_n\left(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\right)$$

$$
=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}
$$

$$
=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X}
$$

$$
= X^T A X \qquad A^T = A
$$

称 $f = X^T AX$ 为二次型 A 的矩阵表示，其中对称矩阵A叫做二次型的矩阵，对称矩阵 A 的秩也称为二次型的秩.

任给一个二次型，就唯一地确定一个对称阵；反之，任给一个对称阵，也可唯一的确定一个二次型，这样，二次型与对称阵之间存在一一对应的关系，因此我们也把 f 叫做对称阵 A 的二次型.

前面我们分析了下列二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots$$
$$+a_{nn}x_n^2$$

它的矩阵表示为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

二次型 f 的矩阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角线上的元素 a_{ii} 是二次型中平方项 x_i^2 的系数，而 $a_{ji}=a_{ij}$ 是二次型中 $x_i x_j$ 的系数的一半.

例如，二次型 $f = x_1^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + x_2x_3$ 用矩阵的记号写出来，就是

$$f = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2. 线性变换

称 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 n 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n \end{cases} \quad (1)$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的线性变换，其中 c_{ij} 为常数，称为线性变换的系数.

令

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y==\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

则可得线性变换（1）的矩阵形式 $Y=CX$

当C可逆时，称线性变换（1）为**可逆线性变换**或者**非退化的线性变换，**当C为正交矩阵时，称线性变换（1）为**正交变换**.

3. 合同矩阵

(1) 定义

设 A ，B 为n阶方阵. 如果存在可逆矩阵 C ，使 $C^T AC = B$ ，则称 A 与 B 合同.

(2) 性质

(i) 自反性：A 与 A 合同 ；
对称性：若 A 与 B 合同，则 B 与 A 合同；
传递性：若 A 与 B 合同，B 与 C 合同，则 B 与 C 合同.

(ii) 经过可逆(非退化)线性替换，原二次型矩阵与新二次型矩阵合同.

（iii） A,B 合同，则 $R(A)=R(B)$.

推论 经过可逆(非退化)线性替换不改变二次型的秩.

4 二次型的标准形

只含有平方项的二次型

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

称为**二次型的标准形**．对应的矩阵为

$$\Lambda = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

标准形的秩等于 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中非零元素的个数.

对于二次型，我们要讨论的主要问题是：**寻求可逆的线性变换使二次型化为标准型.**

定理 任意n元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 都存在正交线性替换 $X=QY$，使二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 化为标准形:

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2=Y^T\Lambda Y$$

方法: 求出正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ, 使得 A 与 Λ 合同，即

$$Q^TAQ=\Lambda$$

注：由于Q为正交矩阵，故 $Q^T AQ = Q^{-1}AQ = \Lambda$，所以只需对实二次型的矩阵 A 进行正交相似对角化，就可得到正交替换矩阵Q和标准形矩阵Λ

例8 用正交线性替换法将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

化为标准形，并求出线性变换的矩阵.

5. 二次型的规范形

形如 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$,$r\le n$ 的标准形称为二次型的规范形.

其中 p 称为正惯性指数； $r-p$ 称为负惯性指数；正惯性指数与负惯性指数之差 $2p-r$ 称为二次型的符号差； r 称为二次型的秩.

惯性定理　任何一个实二次型都可以经过实系数的可逆线性替换化为规范形，且规范形是唯一的.

注：标准形中正(负)系数的个数为正(负)惯性指数.

第六节　配方法化标准形

配方法是一种配完全平方的初等方法．即是配一次项系数一半的平方.

例如用配方法化下列二次型为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

第七节　正定二次型

(1) 定义

设A为实对称矩阵，对应的二次型为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$，如果对任意一组不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$ 则称二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型．二次型的矩阵 A 为正定矩阵．

对任意的非零向量 $\boldsymbol{X}\neq 0$，有 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$，称二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为正定二次型.**A**为正定矩阵.

对任意的非零向量 $\boldsymbol{X}\neq 0$，有 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<0$，称二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为负定二次型.**A**为负定矩阵.

学习内容

(2) 性质

(i) 非退化线性变换不改变二次型的正定性

(ii) 若A 为正定矩阵，则　, A^*, A^T为正定矩阵;

(iii) 若 A，B 为正定矩阵，则　　　为正定矩阵;

(iv) 若 A为正定矩阵，则 $|A|>0$，　A 可逆.

(3) 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$ (或矩阵 A) 正定的充分必要条件:

(i) A 的特征值全大于零；

(ii) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的正惯性指数为n；

(iii)A 与单位矩阵合同；即存在可逆矩阵C，使得 $A = C^T C$ ；

(iv) A 的各阶主子式均大于零.

设 $A=(a_{ij})$ 是n阶方阵，称子式

$$A_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad k=1,2,\cdots,n$$

为方阵A的 k阶主子式.

例11 t 取何值时，下列二次型为正定的.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$$

(4) 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ **(**或矩阵 A**)** 负定的充分必要条件**:**

(i) A 的特征值全小于零；

(ii) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的负惯性指数为n；

(iii) A 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正.