

### 第三部分 向量

#### 一、选择题

1. 现有四个向量组

①  $(1, 2, 3)^T, (3, -1, 5)^T, (0, 4, -2)^T, (1, 3, 0)^T$ ,

②  $(a, 1, b, 0, 0)^T, (c, 0, d, 2, 0)^T, (e, 0, f, 0, 3)^T$ ,

③  $(a, 1, 2, 3)^T, (b, 1, 2, 3)^T, (c, 3, 4, 5)^T, (d, 0, 0, 0)^T$ ,

④  $(1, 0, 3, 1)^T, (-1, 3, 0, 2)^T, (2, 1, 7, 2)^T, (4, 2, 14, 5)^T$

则下列结论正确的是

- (A) 线性相关的向量组为 ① ④，线性无关的向量组为 ② ③；
- (B) 线性相关的向量组为 ③ ④，线性无关的向量组为 ① ②；
- (C) 线性相关的向量组为 ① ②，线性无关的向量组为 ③ ④；
- (D) 线性相关的向量组为 ① ③ ④，线性无关的向量组为 ②。

2. 设  $\alpha_1 = (1, 4, 3, -1)^T, \alpha_2 = (2, t, -1, -1)^T, \alpha_3 = (-2, 3, 1, t+1)^T$ ，则

- (A) 对任意的  $t$ ， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  必线性无关；
- (B) 仅当  $t = -3$  时， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关；
- (C) 若  $t = 0$ ，则  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关；
- (D) 仅  $t \neq 0$  且  $t \neq -3$  时， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关。

3. 设  $\alpha_1 = (1, 2, 3, 1)^T, \alpha_2 = (3, 4, 7, -1)^T, \alpha_3 = (2, 6, a, 6)^T, \alpha_4 = (0, 1, 3, a)^T$ ，那么  $a = 8$

是  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关的

- (A) 充分必要条件；
- (B) 充分而非必要条件；
- (C) 必要而非充分条件；
- (D) 既不充分也非必要条件。

4. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关的充分必要条件是

- (A) 存在全为零的一组数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ ，使  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$ ；
- (B) 存在不全为零的一组数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ ，使  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq \mathbf{0}$ ；
- (C) 对于任何一组不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ ，都有  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq \mathbf{0}$ ；

(D)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意两个向量线性无关。

5. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关的充分必要条件是

(A)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意  $s-1$  个向量都线性无关;

(B)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中每一个向量都不能由其余  $s-1$  个向量线性表示;

(C) 向量  $\alpha_s$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$  线性表出;

(D) 向量  $\alpha$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出。

6. 设向量组 (I):  $\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}), \alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}), \alpha_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ , 向量组

(II):  $\beta_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}), \alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}), \alpha_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34})$ , 则正确的命题是

(A) (I) 相关  $\Rightarrow$  (II) 相关; (B) (I) 无关  $\Rightarrow$  (II) 无关;

(C) (II) 无关  $\Rightarrow$  (I) 无关; (D) (II) 相关  $\Rightarrow$  (I) 无关;

7. 设向量组 (I):  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ; 向量组 (II):  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_{s+t}$ , 则

正确的命题是

(A) (I) 无关  $\Rightarrow$  (II) 无关; (B) (I) 无关  $\Rightarrow$  (II) 相关;

(C) (II) 相关  $\Rightarrow$  (I) 无关; (D) (II) 无关  $\Rightarrow$  (I) 无关;

8. 设  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n], B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n], AB = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$  都是  $n$  阶矩阵, 记向

量组 (I)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , (II)  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , (III)  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , 若向量组 (III)

线性相关, 则

(A) (I)、(II) 均线性相关;

(B) (I) 或 (II) 中至少有一个线性相关;

(C) (I) 一定线性相关;

(D) (II) 一定线性相关。

9. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times m$  矩阵, 且满足  $AB = E$ , 则

(A)  $A$  的列向量组线性无关,  $B$  的行向量组线性相关;

(B)  $A$  的列向量组线性无关,  $B$  的列向量组线性无关;

(C)  $A$  的行向量组线性无关,  $B$  的列向量组线性无关;

(D)  $A$  的行向量组线性无关,  $B$  的列向量组线性无关。

10. 已知  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 那么可能线性相关的  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  是

(A) 把  $\alpha_i (i=1, 2, \dots, s)$  中第一个分量与第  $n$  个分量互换为  $\beta_i$ ;

(B) 把  $\alpha_i (i=1, 2, \dots, s)$  中第一个分量改为相反数是  $\beta_i$ ;

- (C) 把  $\alpha_i (i=1,2,\dots,s)$  中第一个分量改为 0 得到  $\beta_i$ ;
- (D) 把  $\alpha_i (i=1,2,\dots,s)$  的第一个分量与第二个分量之间添加 0 为  $\beta_i$ 。

11. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是三维非零向量, 则正确命题是

- (A) 如果  $\alpha_1, \alpha_2$  线性相关, 则  $\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_4$  线性相关;
- (B) 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则  $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4$  线性无关;
- (C) 如果  $\alpha_4$  不能用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  一定线性相关;
- (D) 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  中任意三个向量均线性无关, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关。

12. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 向量  $\beta_1$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 向量  $\beta_2$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 则必有

- (A)  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  线性无关; (B)  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$  线性无关;
- (C)  $\alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$  线性相关; (D)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2$  线性相关。

13. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  均为三维向量, 现有四个命题

- ① 若  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关,
- ② 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 则  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示,
- ③ 若  $\beta$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,
- ④ 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则  $\beta$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示,

以上命题正确的是

- (A) ① ②, (B) ③ ④, (C) ① ④, (D) ② ③

14. 设向量  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示, 但不能由向量组 (I):

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  线性表示, 记向量组 (II):  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$ , 则

- (A)  $\alpha_m$  不能由 (I) 线性表示, 也不能由 (II) 线性表示;
- (B)  $\alpha_m$  不能由 (I) 线性表示, 但能由 (II) 线性表示;
- (C)  $\alpha_m$  能由 (I) 线性表示, 也能由 (II) 线性表示;

(D)  $\alpha_m$  能由 (I) 线性表示, 但不能由 (II) 线性表示。

15. 设矩阵  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$  经行的初等变换变为矩阵  $B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]$ , 且  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关, 则

- (A)  $\beta_4$  不能由  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性表示;
- (B)  $\beta_4$  能由  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性表示, 但表示法不唯一;
- (C)  $\beta_4$  能由  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性表示, 且表示法唯一;
- (D)  $\beta_4$  能否由  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性表示不能确定;

16. 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵,  $P, Q$  为  $n$  阶可逆矩阵, 下列命题不正确的是

- (A) 若  $B = AQ$ , 则  $A$  的列向量组与  $B$  的列向量组等价;
- (B) 若  $B = PA$ , 则  $A$  的行向量组与  $B$  的行向量组等价;
- (C) 若  $B = PAQ$ , 则  $A$  的行(列)向量组与  $B$  行(列)向量组等价;
- (D) 若  $A$  的行(列)向量组与矩阵  $B$  的行(列)向量组等价, 则矩阵  $A$  与  $B$  等价。

17. 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的秩为  $r$ , 则下列命题中正确的是

- (A) 向量组中任意  $r-1$  个向量都线性无关;
- (B) 向量组中任意  $r$  个向量都线性无关;
- (C) 向量组中任意  $r-1$  个向量都线性相关;
- (D) 向量组中任意  $r+1$  个向量都线性相关。

18. 向量组  $\alpha_1 = (1, 3, 5, -1)^T, \alpha_2 = (2, -1, -3, 4)^T, \alpha_3 = (6, 4, 4, 6)^T, \alpha_4 = (7, 7, 9, 1)^T,$

$\alpha_5 = (3, 2, 2, 3)^T$  的极大线性无关组是

- (A)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ ; (B)  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ ; (C)  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ; (D)  $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$

19. 已知两个  $n$  维向量组

- (I)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  与 (II)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_{s+t}$

若向量组 (I) 的秩为  $p$ , 向量组 (II) 的秩为  $q$ , 则下列条件中不能判定 (I) 是 (II) 的极大线性无关组的是

- (A)  $p = q$ , (II) 可由 (I) 线性表示;
- (B)  $s = q$ , (I) 与 (II) 是等价向量组;

(C)  $p=q$ , (I) 线性无关;

(D)  $p=q=s$ 。

20. 已知思维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 且向量  $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4$ ,  $\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_4$ ,

$\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4$ ,  $\beta_4 = \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $\beta_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , 则  $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5) =$

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

21. 设向量组 (I)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 则与向量组 (I) 等价的向量组是

(A)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ ;

(B)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4$ ;

(C)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ ;

(D)  $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 。

## 二、填空题

1. 已知向量组  $\alpha_1 = (1, 2, -1, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (2, 0, t, 0)^T$ ,  $\alpha_3 = (0, -4, 5, t)^T$  线性无关, 则  $t$  的取值为\_\_\_\_\_。

2. 设  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  满足  $2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = \mathbf{0}$ ,  $\beta$  是任意  $n$  维向量, 若  $\beta + \alpha_1$ ,  $\beta + \alpha_2, a\beta + \alpha_3$  线性相关, 则  $a =$ \_\_\_\_\_。

3. 向量组  $\alpha_1 = (1, -2, 0, 3)^T$ ,  $\alpha_2 = (2, -5, -3, 6)^T$ ,  $\alpha_3 = (0, 1, 3, 0)^T$ ,  $\alpha_4 = (2, -1, 4, 7)^T$  的一个极大无关组是\_\_\_\_\_。

4. 已知向量  $\beta = (1, a, -1)^T$  可以由  $\alpha_1 = (a+2, 7, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, -1, 2)^T$  线性表示, 则  $a =$ \_\_\_\_\_。

5. 已知  $\alpha_1 = (2, 3, 3)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, 0, 3)^T$ ,  $\alpha_3 = (3, 5, a+2)^T$ , 若  $\beta_1 = (4, -3, 15)^T$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示,  $\beta_2 = (-2, -5, a)^T$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 则  $a =$ \_\_\_\_\_。

6. 已知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 若  $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + a\alpha_2, 3\alpha_2 - a\alpha_3$  线性相关, 则  $a =$ \_\_\_\_\_。

7. 已知  $\alpha_1 = (1, 4, 2)^T$ ,  $\alpha_2 = (2, 7, 3)^T$ ,  $\alpha_3 = (0, 1, a)^T$ , 可以表示任意一个三维向量, 则  $a$

的取值为\_\_\_\_\_，

8. 与  $\alpha_1 = (1, 2, 3, -1)^T$ ,  $\alpha_2 = (0, 1, 1, 2)^T$ ,  $\alpha_3 = (2, 1, 3, 0)^T$  都正交的单位向量是\_\_\_\_\_。

9. 向量  $\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T$ ,  $\alpha_2 = (-1, 1, 4, -1)^T$  的 Schmidt 正交规范化向量组是

\_\_\_\_\_。