第二章、导数与微分

杨永举

南阳师范学院数学与统计学院高等数学教研室高等数学课件

一、导数的概念

（一） 导数的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0及其某个邻域内有定义, 当自变量x在 x_0处取得增 量 Δx 时,相应地函数 y取得增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在, 则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导, 或称$y=f(x)$在 x_0 处有导数。该极限值就是 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为

$$f'(x_0),\ y'\big|_{x=x_0},\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}\ 或\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

即 $$y'\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

其它形 式 $$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

❖ 导函数

(1)如果$f(x)$在I内每一点都可导，则称$f(x)$在开区间I内可导.

(2)对于任一$x \in I$，都对应$f(x)$的一个导数值，这个函数就叫做$f(x)$的导函数，简称导数，记做：

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$$

即 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$（或 $y' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$）

很明显，$f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0}$.

注意 导数概念是概括了各种各样的变化率而得出的一个更一般、更抽象的概念，它撇开了变量所代表的特殊意义，而纯粹从数量方面来刻画变化率的本质

注意 点导数是因变量在点x_0处的变化率,它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度.

注意 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$是$y$在以$x_0$和$x_0+\Delta x$为端点的区间上的平均变化率

注意 如果函数 $y = f(x)$在开区间I内的每点处都可导，就称函数 $f(x)$在开区间I内可导.

注意 对于任一 $x \in I$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值.这个函数叫做原来函数 $f(x)$ 的导函数.

记作 $y', f'(x), \dfrac{dy}{dx}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}$.

即 $$\boldsymbol{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

或 $$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}.$$

三 单侧导数

1.左导数:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

2.右导数:

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

注意 函数 $f(x)$在点 x_0处可导$\Leftrightarrow$左导数 $f'_-(x_0)$和右导数 $f'_+(x_0)$都存在且相等.

注意 $f'_-(x_0)$与$f'(x_0^+)$的 区 别

注意 如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在，就说 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

注意 $f'(x_0) \overset{?}{=} [f(x_0)]'$

注意 若 $f'(x_0) = A$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = -A.$

四、由定义求导数（三步法）

步骤: (1) 求因变量增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x);$

(2) 因变量与自变量比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$

(3) 求比值极限 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}.$

例1 求函数 $f(x) = C$ (C为常数)的导数.

解 $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = 0.$$

即 $(C)' = 0.$

例2 设函数 $f(x)=\sin x$，求 $(\sin x)'$ 及 $(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解 $$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

即 $$(\sin x)'=\cos x.$$

$$\therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例3　求函数 $y=x^n$ (n为正整数)的导数.

解　$$(x^n)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}]=nx^{n-1}$$

即　$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

更一般地　$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$.　$(\mu\in R)$

例如，$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}.$$

例4　求函数 $f(x)=a^x\,(a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解　$$(a^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=a^x\ln a.$$

即　$(a^x)'=a^x\ln a.$

特别地　$(e^x)'=e^x.$

例5　求函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解　$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

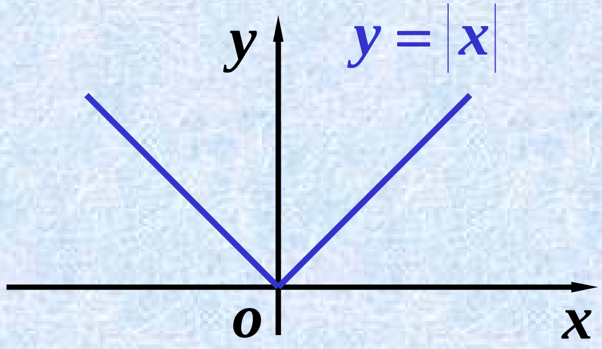
$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

即　$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e.$$

特别地　$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

例6　讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.

解　$\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$,



$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, $\therefore$ 函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

（二） 导数的几何意义

设$M(x_0, y_0)$, $N(x, y)$,

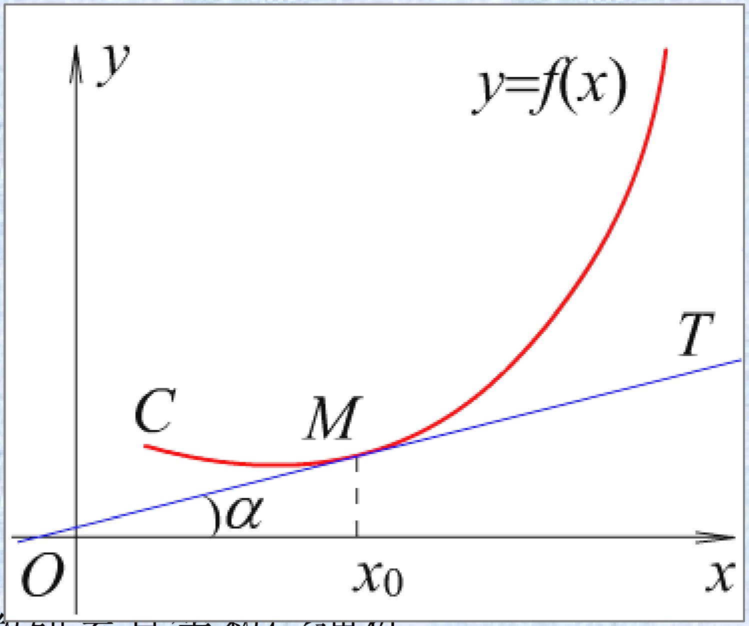
则割线MN的斜率：$\tan\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

当$N \xrightarrow{\text{沿着曲线}C} M$时，$\Delta x \to 0$,

则曲线在$M(x_0, y_0)$的切线的斜率为：

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= f'(x_0)$$



法线方程为 $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$

当$f'(x_0) = 0$时

切线方程为 $y = f(x_0)$

法线方程为 $x = x_0$

当$f'(x_0) = \infty$时

切线方程为 $x = x_0$

法线方程为 $y = f(x_0)$

例7 求等边双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(\dfrac{1}{2},2)$ 处的切线的斜率,并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义，得切线斜率为

$$k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=(\frac{1}{x})'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$$

所求切线方程为 $y-2=-4(x-\dfrac{1}{2})$，即 $4x+y-4=0.$

法线方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}(x-\dfrac{1}{2})$，即 $2x-8y+15=0.$

六、可导与连续的关系

定理　凡可导函数都是连续函数.

证　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

$$\alpha\to 0 \quad (\Delta x\to 0) \qquad \Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$$

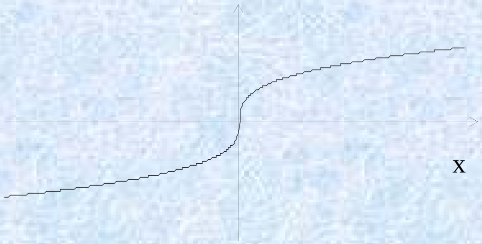
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x]=0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

注意　该定理的逆定理不成立.连续函数不存在导数举例

例9.　函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间(-∞, +∞)内连续, 但在点 $x=0$ 处不可导. 这是因为函数在点 $x=0$ 处导数为无穷大.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=+\infty$$



七、小结

1. 导数的实质：增量比的极限;

2. $f'(x_0)=a \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a$;

3. 导数的几何意义：切线的斜率;

4. 函数可导一定连续，但连续不一定可导;

5. 求导数最基本的方法：由定义求导数.

6. 判断可导性
   - 不连续,一定不可导.
   - 连续
     - 直接用定义;
     - 看左右导数是否存在且相等.

思考与练习

1. 函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系？

区别: $f'(x)$ 是函数， $f'(x_0)$ 是数值;

联系: $f'(x)\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)$

注意: $f'(x_0) \cancel{\overset{?}{=}} [f(x_0)]'$

2. 设 $f'(x_0)$ 存在，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=\underline{\ -f'(x_0)\ }.$$

3. 已知 $f(0)=0,\ f'(0)=k_0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\underline{\quad k_0\quad}.$

4. 若 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le x^2$，问 $f(x)$ 是否在 $x=0$ 可导？

解： 由题设 $f(0)=0$

$$0\le\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\le|x|$$

由夹逼准则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且

$$f'(0)=0$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ a\,x, & x\ge 0\end{cases}$，问 a 取何值时，$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都存在，并求出 $f'(x)$.

解: 显然该函数在 $x=0$ 连续.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x-0}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax-0}{x-0}=a$$

故 $a=1$ 时 $f'(0)=1$, 此时 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都存在,

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$$

5. 设 $f'(x)$ 存在, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 求 $f'(1)$.

解: 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+(-x))-f(1)}{(-x)}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=-1$$

所以 $f'(1)=-2.$

作业：P87

9：(4, 6, 7)；16；17；18.

2.2、函数的求导法则

一、和、差、积、商的求导法则

定理 如果函数 $u(x)$, $v(x)$在点 x处可导,则它们的和、差、积、商 (分母不为零)在点 x处也可导，并且

$$(1)\ [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$(2)\ [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$(3)\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$$

注意

公式（1）即是和、差的导数等于导数的和、差；
公式（2）即是乘积的导数等于第一个因子的导数 乘以 第二个因子再加上第一个因子乘第二个因子的导数；
公式（3）即是商的导数等于分子的导数乘以分母减去分子乘以分母的导数，再除以分母的平方；

公式（1）可推广到任意有限个可导函数的情形

$$[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x);$$

公式（2）也可推广到任意有限个函数的情形

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)]' = f_1'(x) f_2(x) \cdots f_n(x)$$

$$+ \cdots + f_1(x) f_2(x) \cdots f_n'(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} f_i'(x) f_k(x);$$

④ 作为（2）的特殊情况

若$v = c$，则$(cu)' = cu'$ 或 $[Cf(x)]' = Cf'(x);$

即常数因子可以提到导数符号的外面

$$[\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)]' = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i'(x)$$

例1 求 $y=2x^3-5x^2+3x-7$ 的导数.

解 $y'=\left(2x^3\right)'-\left(5x^2\right)'+(3x)'-(7)'$

$=6x^2-10x+3.$

例2 $f(x)=x^3+4\cos x-\sin\frac{\pi}{2}$, 求 $f'(x)$ 及 $f'(\frac{\pi}{2})$.

解

$$f'(x)=(x^3)'+(4\cos x)'-(\sin\frac{\pi}{2})'=3x^2-4\sin x$$

$$f'(\frac{\pi}{2})=\frac{3}{4}\pi^2-4.$$

例3 求 $y=e^{x}(\sin x+\cos x)$ 的导数.

解

$$y'=2\left(e^{x}\right)'(\sin x+\cos x)+e^{x}(\sin x+\cos x)'$$

$$=e^{x}(\sin x+\cos x)+e^{x}(\sin x-\cos x)$$

$$=2e^{x}\cos x.$$

例4 求 $y=\tan x$ 的导数.

解 $$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即 $(\tan x)'=\sec^2 x.$

同理可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x.$

例5 $y=\sec x$ 求y'

解$y'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\sec x\cdot\tan x$

同理可得

$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

三、反函数的导数

定理 如果函数 $x=\varphi(y)$在某区间I_y内单调、可导且$\varphi'(y)\neq 0$, 那末它的反函数 $y=f(x)$在对应区间I_x内也可导, 且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(x)}.$$

即 反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

例6　求函数 $y = \arcsin x$ 的导数.

解　$\because x = \sin y$ 在 $I_y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内单调、可导，

且 $(\sin y)' = \cos y > 0$,　　$\therefore$ 在 $I_x \in (-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得　$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2};\qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

例7 求函数 $y = \arctan x$ 的导数.

解 $\because x = \tan y$ 在 $I_y \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ 内单调、可导,

且 $(\tan y)' = \sec^2 y \neq 0$, 在 $I_x \in (-\infty, +\infty)$ 内有,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

类似地 $(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

例8　求函数 $y=\log_a x$ 的导数.

解　$\because\ x=a^y$在$I_y\in(-\infty,+\infty)$内单调、可导，

且 $(a^y)'=a^y\ln a\neq 0$,　　$\therefore$ 在$I_x\in(0,+\infty)$内有,

$$(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地　$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

四、复合函数的求导法则

前面我们已经会求简单函数——基本初等函数经有限次四则运算的结果——的导数，但是像

$$\ln\tan x, e^{x^2}, \sin\frac{2x}{x^2+1}$$

等函数（复合函数）是否可导，可导的话，如何求它们的导数

先看一个例子

例8 $y=(1-x^2)^2$，求y'

$$y=(1-x^2)^2 \quad =1-2x^2+x^4$$

$$\Rightarrow \quad y'=-4x+4x^3 \quad =-4x(1-x^2)$$

这里我们是先展开，再求导，若像 $y=(1-x^2)^{1000}$ 求导数，展开就不是办法，再像 $y=\sqrt[5]{1-x^2}$ 求导数，根本无法展开，又该怎么办？

仔细分析一下，这三个函数具有同样的复合结构我们从复合函数的角度来分析一下上例的结果。

$y=(1-x^2)^2$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成的

$$y'_u=2u \qquad u'_x=-2x$$

$$y'_u\cdot u'_x=2u\cdot(-2x)=-4x(1-x^2) \quad =y'_x$$

再如 $y=\sin 2x$

$$y'=(2\sin x\cos x)' = 2[(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)']$$

$$=2(\cos^2 x-\sin^2 x) = 2\cos 2x$$

注意到 $y=\sin 2x$ $\quad y=\sin u, u=2x$

$$y'_u=\cos u \quad u'_x=2$$

$$y'_u\cdot u'_x=2\cos u = 2\cos 2x = y'_x$$

由以上两例可见：由 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 复合而成的函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的导数 y'_x 恰好等于 y 对中间变量 u 的导数 y'_u 与中间变量 u 对自变量 x 的导数 u'_x 的乘积

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x$$ ——这就是**链式法则**

定理 如果函数$u=\varphi(x)$在点x_0可导，而$y=f(u)$在点$u_0=\varphi(x_0)$可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x_0可导，且其导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

即 因变量对自变量求导，等于因变量对中间变量求导，乘以中间变量对自变量求导.（链式法则）

若$u=\varphi(x)$在I上可导，$y=f(u)$在I_1上可导

$\forall x\in I, u=\varphi(x)\in I_1$,则复合函数$y=f[\varphi(x)]$

在I上可导，且有$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

证 由$y=f(u)$在点u_0可导，$\therefore \lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)$

故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha \quad (\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0)$

则 $\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}]$$

$$=f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

注意 1.链式法则——“由外向里，逐层求导”

2.注意中间变量

推广 设 $y = f(u),\ u = \varphi(v),\ v = \psi(x)$,

则复合函数 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

例9 求函数 $y = e^{x^2}$ 的导数.

解 函数 $y=e^{x^3}$可看做是由 $y=e^u, u=x^3$ 复合而成的, 因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$$

例10 求函数$y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$的导数.

解 函数$y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$可看做是由$y=\sin u$,

$u=\frac{2x}{1+x^2}$复合而成, 因

$$\frac{dy}{du}=\cos u,\frac{du}{dx}=\frac{2(1+x^2)-(2x)^2}{(1+x^2)^2}$$

因此

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos u\cdot\frac{2(1+x^2)-(2x)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\cdot\cos\frac{2x}{1+x^2}.$$

例11 求函数$y=\ln\sin x$的导数.

解 $\frac{dy}{dx}=(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\cot x.$

例12 求函数 $y=(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}$ 的导数.

解

$$\frac{dy}{dx}=[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}]'$$

$$=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)'$$

$$=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}.$$

例13求函数 $y=\ln\cos\left(e^x\right)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=[\ln\cos(e^x)]'=\frac{1}{\cos(e^x)}\cdot[\cos(e^x)]'$$

$$=\frac{1}{\cos(e^x)}\cdot[-\sin(e^x)]\cdot(e^x)'=-e^x\tan(e^x).$$

例14 求函数 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 的导数.

解 $$y'=e^{\sin\frac{1}{x}}(\sin\frac{1}{x})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(\frac{1}{x})'$$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$$

例13　求 $y=\sinh x$ 的导数.

解　$y'=(\sinh x)'=[\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})]'=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x.$

同理可得 $(\cosh x)'=\sinh x$　$(\tanh x)'=\frac{1}{\cosh^2 x}$

例15　求幂函数 $x^\mu(x>0)$ 的导数

$$y'=(x^\mu)'=\left(e^{\mu\ln x}\right)'$$

$$=e^{\mu\ln x}\cdot(\mu\ln x)'$$

$$=\mu x^\mu\cdot\frac{1}{x}=\mu x^{\mu-1}$$

注意　基本初等函数的导数公式和上述求导法则是初等函数求导运算的基础，必须熟练掌握

注意　复合函数求导的链式法则是一元函数微分学的理论基础和精神支柱，要深刻理解，熟练应用——注意不要漏层

注意　对于分段函数求导问题：在定义域的各个部分区间内部，仍按初等函数的求导法则处理，在分界点处须用导数的定义仔细分析，即分别求出在各分界点处的左、右导数，然后确定导数是否存在。

五、初等函数的求导问题

1.常数和基本初等函数的导数公式

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2.函数的和、差、积、商的求导法则

设$u=u(x),v=v(x)$可导，则

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$，（2）$(cu)'=cu'$（C 是常数）

（3）$(uv)'=u'v+uv'$，（4）$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$.

3.复合函数的求导法则

设$y = f(u)$, 而$u = \varphi(x)$则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$的导数为$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ 或 $y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

利用上述公式及法则初等函数求导问题可完全解决.

注意: 初等函数的导数仍为初等函数.

4.双曲函数与反双曲函数的导数

$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$

$$\because \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\therefore (\tanh x)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$

即 $$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\because \ \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$\therefore (\operatorname{arsinh} x)' = \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})'}{x + \sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \quad = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

同理 $$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

五、小结

注意： $[u(x)\cdot v(x)]' \neq u'(x)\cdot v'(x)$; $[\frac{u(x)}{v(x)}]' \neq \frac{u'(x)}{v'(x)}$.

分段函数求导时，分界点导数用左右导数求.

反函数的求导法则（注意成立条件）；

复合函数的求导法则
（注意函数的复合过程,合理分解正确使用链导法）；

已能求导的函数:可分解成基本初等函数,或常数与基本初等函数的和、差、积、商.

关键： 正确分解初等函数的复合结构.

思考与练习

1. 若 $f(u)$在u_0不可导，$u=g(x)$在x_0可导，且 $u_0=g(x_0)$，则 $f[g(x)]$在x_0处（　　　）.

（1）必可导；（2）必不可导；（3）不一定可导；

2.设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$,求$f'(x)$.

3. 求函数 $y=f^n[\varphi^n(\sin x^n)]$的导数.

作业：P98

7:（3, 7, 6, 8）; 8:（3, 4, 6, 10）;

11（3, 5, 9, 10）.

2.3高阶导数

一、高阶导数的定义

定义 如果函数 $f(x)$的导数 $f'(x)$在点 x处可导，即

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在，则称 $(f'(x))'$为函数 $f(x)$在点 x处的二阶导数．

记作 $f''(x),\ y'',\ \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x),\ y''',\ \dfrac{d^3y}{dx^3}.$

三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x),\ y^{(4)},\ \dfrac{d^4y}{dx^4}.$

一般地, 函数$f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为函数$f(x)$的n阶导数,记作

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n}\text{或}\frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

相应地, $f(x)$称为零阶导数; $f'(x)$称为一阶导数.

二、 高阶导数求法举例

1. 直接法: 由高阶导数的定义逐步求高阶导数.

例1 设 $y = ax + b$, 求 y''.

解 $y' = a, y'' = 0.$

例2 设 $s = \sin \omega t$, 求 s''.

解 $s' = \omega \cos \omega t, s'' = -\omega^2 \sin \omega t.$

例3. 证明: 函数 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 满足关系式 $y^3y''+1=0$.

证明: 因为

$$y'=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$y''=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-(1-x)\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}$$

$$=\frac{-2x+x^2-(1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{(2x-x^2)}}=-\frac{1}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{y^3}$$

所以 $y^3y''+1=0.$

例4. 设 $y = e^{ax}$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y' = ae^{ax}$, $y'' = a^2 e^{ax}$, $y''' = a^3 e^{ax}$, $\cdots$,

$$y^{(n)} = a^n e^{ax}$$

特别有: $\boxed{(e^x)^{(n)} = e^x}$

例5 设 $y=\sin x$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y'''=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

$\cdots\cdots$

$$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

同理可得 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

注意 求n阶导数时,求出1-3或4阶后,不要急于合并,分析结果的规律性,写出n阶导数.(数学归纳法证明)——逐阶求导,寻求规律,写出通式

例6 设 $y=\ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x}$ $\qquad y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$y'''=\dfrac{2!}{(1+x)^3}$ $\qquad y^{(4)}=-\dfrac{3!}{(1+x)^4}$

……

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\qquad (n\geq 1,\ 0!=1)$$

例7 设 $y = x^{\alpha}\ (\alpha \in R)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$y'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y''' = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

$\cdots\cdots$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \qquad (n \geq 1)$$

若α为自然数n,则

$$y^{(n)} = (x^{n})^{(n)} = n!, \qquad y^{(n+1)} = (n!)' = 0.$$

2. 高阶导数的运算法则:

设函数u和v具有n阶导数, 则

(1) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$

(2) $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$

$$\Longrightarrow \quad (\alpha u+\beta v)^{(n)}=\alpha u^{(n)}+\beta v^{(n)}$$

(3) $$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

莱布尼兹公式

例8 设 $y = x^2 e^{2x}$, 求$y^{(20)}$.

解 设$u = e^{2x}, v = x^2$,则由莱布尼兹公式知

$$y^{(20)} = (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)'$$

$$+ \frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x$$

$$+ \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95)$$

3. 间接法: 利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换等方法, 求出n阶导数.

常用高阶导数公式

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0)$ $\qquad (e^x)^{(n)} = e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$ $\qquad (\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$

例9　设 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$, 求$y^{(5)}$.

解 $\because y=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$$\therefore y^{(5)}=\frac{1}{2}\left[\frac{-5!}{(x-1)^6}-\frac{-5!}{(x+1)^6}\right]$$

$$=60\left[\frac{1}{(x+1)^6}-\frac{1}{(x-1)^6}\right]$$

例10设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$\therefore y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}).$$

例11 试从 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$ 导出

① $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$

② $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'\cdot y'''}{(y')^5}$

解 $y=y(x)\quad\Rightarrow\quad x=\varphi(y)\qquad y'\to x\to y$

① 由 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$ 得

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{dx}{dy} \quad = \frac{-1}{(y')^2}\cdot y''\cdot\frac{1}{y'} \quad = -\frac{y''}{(y')^3}$$

② $$\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right) \quad = -\frac{d}{dy}\left[\frac{y''}{(y')^3}\right]$$

$$= -\frac{d}{dx}\left[\frac{y''}{(y')^3}\right]\cdot\frac{dx}{dy}$$

$$= -\frac{y'''\cdot(y')^3 - y''\cdot 3(y')^2\cdot y''}{(y')^6}\cdot\frac{1}{y'}$$

$$= \frac{3(y'')^2 - y'\cdot y'''}{(y')^5}$$

注意 关于抽象函数求导数，必须注意并分清是对哪一个变量来求导数，尤其是求高阶导数。

注意 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, y', y''$ 都是对 x 求导

注意 $[f(x^2)]' \neq f'(x^2)$

三、小结

高阶导数的定义及物理意义;

高阶导数的运算法则(莱布尼兹公式);

n阶导数的求法;

1.直接法;　　　　2.间接法.

思考与练习

1. 设 $g'(x)$ 连续，且 $f(x)=(x-a)^2 g(x)$，

求 $f''(a)$.

2. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，求使 $f^{(n)}(0)$

存在的最高阶数 n .

作业：P103

1：(3, 4, 6, 9, 12)；3；10.

2.4、隐函数的导数

隐函数与参量函数微分法

一、 隐函数的导数

定义:由方程所确定的函数 $y = y(x)$称为隐函数.

$y = f(x)$ 形式称为显函数.

$F(x, y) = 0 \Longrightarrow y = f(x)$ 隐函数的显化

问题:隐函数不易显化或不能显化如何求导?

隐函数求导法则:

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

设$F(x,y)=0$确定了一元隐函数　$y=y(x)$

将 $y=y(x)$代入$F(x,y)=0$得　$u=F[x,y(x)]\equiv 0$

则 $\dfrac{du}{dx}=0$

两边对 x 求导，当遇到 y 的函数 $f(y)$时

要求的是 $\dfrac{d}{dx}[f(y)]$　记 $z=f(y)$

$$z\to y\to x$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\quad =f'(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

将求出的这些导数代入 $\dfrac{du}{dx}=0$

得到关于 $\dfrac{dy}{dx}$ 的代数方程，

解得 $\dfrac{dy}{dx}=g(x,y)$即为所求

至于隐函数求二阶导数，与上同理

在$\dfrac{dy}{dx}=g(x,y)$两边再对 x求导

$\Rightarrow\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=G(x,y,y')$ 再将$\dfrac{dy}{dx}=g(x,y)$代入

例1 求由方程$xy-e+e^y=0$所确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$.

解 方程两边对 x求导,

$$y+x\frac{dy}{dx}+e^y\frac{dy}{dx}=0$$

解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x+e^y}\left(x+e^y\neq 0\right).$$

例2. 求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解: 方程两边对 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^5+2y-x-3x^7)=0$$

得 $$5y^4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1-21x^6=0$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}$$

因 $x=0$ 时 $y=0$，故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$

例3. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 在点 $(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$ 处的切线方程.

解: 椭圆方程两边对 x 求导

$$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot y'=0$$

$$\therefore\ y'\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{9}{16}\frac{x}{y}\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

故切线方程为 $\quad y-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$

即 $\quad \sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0$

例4. 求由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的函数 y 的二阶导数.

解: 方程两边对 x 求导

$$1-\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2-\cos y}$$

上式两边再对x求导, 得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2\sin y\cdot\frac{dy}{dx}}{(2-\cos y)^2}=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}$$

补证反函数的求导法则

设$x=\varphi(y)$为直接函数，$y=f(x)$为其反函数

$y=f(x)$可视为由方程 $x-\varphi(y)=0$确定的一个隐函数

由隐函数的微分法则

方程$x=\varphi(y)$两边对 x求导得

$$1=\varphi'(y)\cdot\frac{dy}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

二、对数求导法

有时会遇到这样的情形，即虽然给出的是显函数但直接求导有困难或很麻烦

观察函数 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$， $y=x^{\sin x}$.

注意

先在方程两边取绝对值再求对数, 然后利用隐函数的求导方法求出导数. 目的是利用对数的性质简化求导运算

。

适用范围:

1. 多个相对复杂函数相乘、乘方、开方的情形;

2. 幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的情形.

例5. 求 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$ 的导数 .

解: 两边取对数 , 化为隐式

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

$$\Big\downarrow \text{两边对 } x \text{ 求导}$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore \quad y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

例6. 求 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数

$$(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}$$

两边取对数

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|]$$

对 x 求导

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\ [\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$$

一般地

$$f(x)=u(x)^{v(x)} \quad (u(x)>0)$$

$$\because \ \ln f(x)=v(x)\cdot\ln u(x)$$

又 $\because \ \dfrac{d}{dx}\ln f(x)=\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{d}{dx}f(x)$

$$\therefore \ f'(x)=f(x)\cdot\frac{d}{dx}\ln f(x)$$

$$\therefore \ f'(x)=u(x)^{v(x)}[v'(x)\cdot\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}]$$

三、由参数方程所确定的函数的导数

若参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定 y与x间的函数关系，

称此为由参数方程所确 定的函数.

例如 $\begin{cases} x=2t, \\ y=t^2, \end{cases} \Rightarrow t=\dfrac{x}{2}$ 消去参数

$$\therefore y=t^2=(\frac{x}{2})^2=\frac{x^2}{4} \qquad \therefore y'=\frac{1}{2}x$$

问题: 消参困难或无法消参如何求导?

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中,

设函数$x = \varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$,

$\therefore y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ ——**参量函数**

再设函数 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$都可导, 且$\varphi(t) \neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

若函数$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$二阶可导,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\boxed{\frac{dt}{dx}}$$

容易漏掉

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

即 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

例7. 求椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ 在相应于 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 点处的切线方程.

解: $$\frac{dy}{dx} = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t$$

所求切线的斜率为 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{b}{a}$

切点的坐标为 $x_0 = a\cos\dfrac{\pi}{4} = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$y_0 = b\sin\frac{\pi}{4} = b\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所求切线方程为

$$y - b\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{b}{a}\left(x - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

即 $$bx + ay - \sqrt{2}ab = 0.$$

五、小结

隐函数求导法则: 直接对方程两边求导;

对数求导法: 对方程两边取对数,按隐函数的求导法则求导;

参数方程求导: 实质上是利用复合函数求导法则;

相关变化率: 通过函数关系确定两个相互依赖的变化率; **解法:** 通过建立两者之间的关系, 用链式求导法求解.

思考与练习

1.设$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，由$y'_x=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (\varphi'(t)\neq 0)$

可知$y''_x=\dfrac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}$，对吗？

2.设$y=(\sin x)^{\tan x}+\dfrac{x}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{(2+x)^2}}$,求$y'$.

3.设$y=x+e^x$,求其反函数的导数.

作业：P112

3:（1, 2）; 4:（1, 3）; 6; 8.

一，微分的定义

定义 设函数 $y=f(x)$在某区间内有定义，
x_0及 $x_0+\Delta x$在这区间内，如果

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

成立(其中A是与Δx无关的常数)，则称函数
$y=f(x)$在点 x_0可微，并且称$A\cdot\Delta x$为函数
$y=f(x)$在点 x_0相应于自变量增量 Δx的微分，
记作$dy\big|_{x=x_0}$或$df(x_0)$，即$dy\big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x.$

微分 dy叫做函数增量 Δy的线性主部.(微分的实质)

注意：由定义可知：

(1) dy是自变量的改变量Δx的线性函数;

(2) $\Delta y - dy = o(\Delta x)$是比$\Delta x$高阶无穷小;

(3) 当$A \neq 0$时, dy与Δy是等价无穷小;

$$\because \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \to 1 \quad (x \to 0).$$

(4) A是与Δx无关的常数, 但与$f(x)$和x_0有关;

(5) 当$|\Delta x|$很小时, $\Delta y \approx dy$ (线性主部).

二、可微的条件

定理 函数 $f(x)$在点 x_0可微的充要条件是函数 $f(x)$在点 x_0处可导，且 $A = f'(x_0)$.

证 (1) 必要性 $\because f(x)$在点x_0可微，

$\therefore \Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$， $\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$，

则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$

即函数 $f(x)$在点 x_0可导，且$A = f'(x_0)$.

(2) 充分性　$\because$ 函数$f(x)$在点x_0可导,

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0), \qquad \text{即} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

从而 $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot (\Delta x), \quad \because \alpha \to 0 \quad (\Delta x \to 0),$

$$= f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

$\because$ 函数 $f(x)$在点 x_0可微,　且 $f'(x_0) = A.$

$\therefore$ 可导 $\Leftrightarrow$ 可微.　　$A = f'(x_0).$

函数 $y = f(x)$在任意点 x的微分，称为函数的微分，记作 dy或$df(x)$，即 $dy = f'(x)\Delta x.$

由微分的定义及上述定理可知 若$f(x)$在x_0处可导

则$f(x)$在x_0处可微，且$dy = f'(x_0)\Delta x$

当$f'(x_0) \neq 0$时 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x} = 1$

$$\Rightarrow \quad \Delta y \sim dy \quad (\Delta x \to 0) \quad \Rightarrow \Delta y = dy + o(\Delta y)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - f'(x_0)\Delta x}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[1 - \frac{f'(x_0)}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} \right] = 0$$

这表明 在$f'(x_0)\neq 0$的条件下 当$x\to 0$时 $\Delta y-dy$不仅是比 Δx 高阶的无穷小，而且也是比 Δy 高阶的无穷小，因此 dy是Δy的主要部分

通常把自变量 x的增量Δx称为自变量的微分，记作dx， 即$dx=\Delta x$.

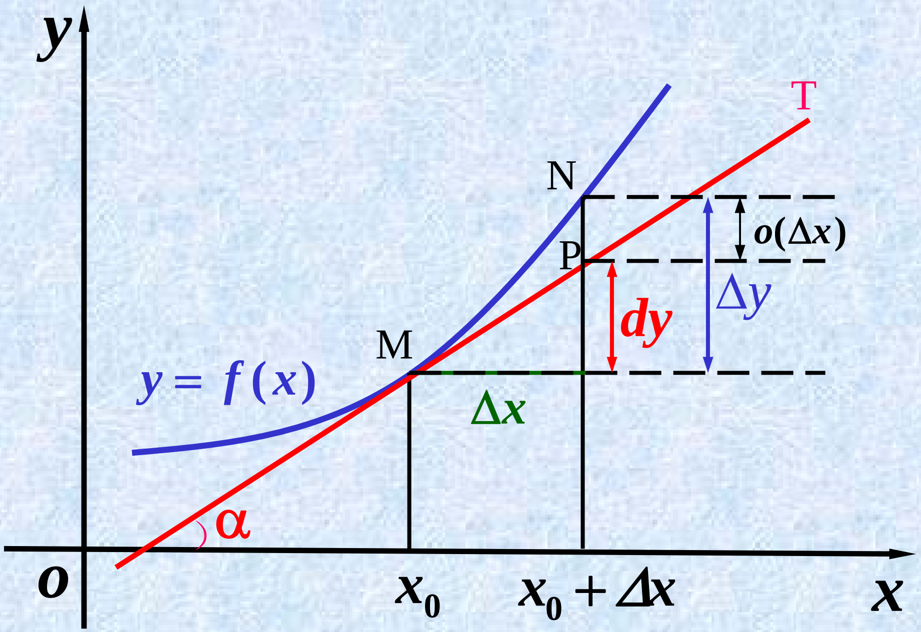
$$\therefore dy = f'(x)dx. \longrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

即函数的微分dy与自变量的微分dx之商等于该函数的导数．导数也叫"微商".

三，微分的几何意义

几何意义:(如图)

当Δy是曲线的纵坐标增量时，dy就是切线纵坐标对应的增量.



当$|\Delta x|$很小时，在点M的附近，切线段MP可近似代替曲线段MN.

四，微分的求法

$$dy = f'(x)dx$$

求法：计算函数的导数，乘以自变量的微分.

1.基本初等函数的微分公式

$$d(C) = 0 \qquad d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx \qquad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x dx \qquad d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx \qquad d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx \qquad d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx \qquad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx \qquad d(arc\cot x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

例1　设 $y=\ln(x+e^{x^2})$, 求dy.

解　$\because y'=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}$, 　$\therefore dy=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx$.

例2　设 $y=e^{1-3x}\cos x$, 求dy.

解　$dy=\cos x\cdot d(e^{1-3x})+e^{1-3x}\cdot d(\cos x)$

$$\because (e^{1-3x})'=-3e^{1-3x},\quad (\cos x)'=-\sin x.$$

$$\therefore dy=\cos x\cdot(-3e^{1-3x})dx+e^{1-3x}\cdot(-\sin x)dx$$

$$=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx.$$

五、微分形式的不变性

设函数 $y = f(x)$有导数 $f'(x)$,

(1) 若x是自变量时, $dy = f'(x)dx$;

(2) 若x是中间变量时，即另一变量 t 的可微函数 $x = \varphi(t)$, 则

$$\because \varphi'(t)dt = dx, \qquad \therefore dy = f'(x)dx.$$

结论： 无论 x是自变量还是中间变量，函数 $y = f(x)$的微分形式总是 $\boxed{dy = f'(x)dx}$

微分形式的不变性

例3 设 $y=\sin(2x+1)$, 求dy.

解 $\because y=\sin u, u=2x+1.$

$$\therefore dy=\cos u du=\cos(2x+1)d(2x+1)$$
$$=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx.$$

例4 设 $y=\ln(1+e^{x^2})$, 求dy.

解
$$dy=d\ln(1+e^{x^2})=\frac{1}{1+e^{x^2}}d(1+e^{x^2})$$
$$=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\cdot 2xdx$$
$$=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx$$

例6. 在下列括号中填入适当的函数使等式成立:

(1) $d(\frac{1}{2}x^2+C)=x\mathrm{d}x$

(2) $d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C)=\cos\omega t\,\mathrm{d}t$

解 (1)因为$xdx=\frac{1}{2}d(x^2)=d(\frac{1}{2}x^2)$,即$d(\frac{1}{2}x^2)=xdx$

(2)因为$\cos\omega\, tdt=\frac{1}{\omega}d(\sin\omega\, t)=d(\frac{1}{\omega}\sin\omega\, t)$

说明: 上述微分的反问题是不定积分要研究的内容.

注意: 数学中的反问题往往出现多值性.

六、微分在近似计算中的应用

1.计算函数的近似值

(1).求$f(x)$在点$x = x_0$附近的近似值;

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (|\Delta x|\text{很小时})$$

(2).求$f(x)$在点$x = 0$附近的近似值;

令 $x_0 = 0, \Delta x = x.$

$$\because f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

$$\therefore f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x.$$

2.常用近似公式 ($|x|$很小时)

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$; (2) $\sin x \approx x$ (x为弧度);

(3) $\tan x \approx x$ (x为弧度); (4) $e^x \approx 1+x$;

(5) $\ln(1+x) \approx x$.

证明 (1) 设 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$, $f'(x)=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}$,

$$f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{n}.$$

$$\therefore f(x) \approx f(0)+f'(0)x = 1+\frac{x}{n}.$$

七、小结

★ 微分学所要解决的两类问题:

$$\begin{cases} \text{函数的变化率问题} \longrightarrow \text{导数的概念} \\ \text{函数的增量问题} \longrightarrow \text{微分的概念} \end{cases}$$

求导数与微分的方法,叫做<u>微分法.</u>

研究微分法与导数理论及其应用的科学,叫做<u>微分学.</u>

★ 导数与微分的联系: 可导 $\Leftrightarrow$ 可微.

例7. 有一批半径为1cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为 0.01cm，估计一下，每只球需用铜多少克. (铜的密度 : $8.9\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$)

解： 已知球体体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

镀铜体积为 V 在 $R=1, \Delta R=0.01$ 时体积的增量 ΔV，

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V\bigg|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}} = 4\pi R^2 \Delta R\bigg|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}}$$

$$\approx 0.13\,(\mathrm{cm}^3)$$

因此每只球需用铜约为

$$8.9\times 0.13 = 1.16\ (\mathrm{g})$$

求函数值的近似公式： $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

例8 利用微分计算 $\sin 30°30'$ 的近似值.

解 已知 $30°30'=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{360}$， $x_0=\dfrac{\pi}{6}$， $\Delta x=\dfrac{\pi}{360}$.

$$\sin 30°30'=\sin(x_0+\Delta x)\approx \sin x_0+\cos x_0\,\Delta x$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}=0.5076.$$

例9. 计算$\sqrt{1.05}$的近似值.

解: 已知 $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$, 故

$$\sqrt{1.05}=\sqrt{1+0.05}\approx 1+\frac{1}{2}\times 0.05=1.025$$

直接开方的结果是

$$\sqrt{1.05}=1.02470.$$

★ 导数与微分的区别:

1. 函数 $f(x)$ 在点x_0处的导数是一个定数 $f'(x_0)$, 而微分 $dy = f'(x_0)(x - x_0)$ 是x的线性函数,它的定义域是R,实际上,它是无穷小.

$$\because \lim_{x\to x_0} dy = \lim_{x\to x_0} f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

2. 从几何意义上来看, $f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率,而微 $dy = f'(x_0)(x - x_0)$是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程在点 x_0 的纵坐标增量.

近似计算的基本公式

当$|\Delta x|$很小时,

$$\Delta y\big|_{x=x_0} \approx dy\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

当$x = 0$时,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot x.$$

思考与练习

1. 因为一元函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的可微性与可导性是等价的，所以有人说"微分就是导数，导数就是微分"，这说法对吗？

2 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^3+y^3-\sin 3x+6y=0$ 确定，求 $\mathrm{d}y|_{x=0}$.

作业：P123　3:（3, 7, 6, 8）;
P124　4; 10.