第五章　练习题

一、判断题

1．相似矩阵有相同的特征多项式.　　（ ）

2．n 阶实矩阵一定有 n 个线性无关的特征向量.　　（ ）

3． A, B 均为 n 阶方阵，如果有可逆方阵 C，使得 $B = C^{-1}AC$，则 A 与 B 的关系是既相似又等价.　　（ ）

4．对称矩阵一定可以对角化.　　（ ）

5． A, B 均为 n 阶方阵，如果有可逆方阵 C，使得 $B = C^{\mathrm{T}}AC$，则 A 与 B 的关系是既合同又相似.　　（ ）

6． 两两正交的非零向量组线性无关.　　（ ）

7　n 阶矩阵 A 若有 n 个不同的特征值，则 A 与对角形矩阵相似.　　（）

8．对称阵 A 的特征值全为正，则 A 为正定的.　　（）

9．设 A 为 n 阶矩阵，则 A^T 与 A 的特征值相同.　　（ ）

二、选择题

10．若 *A,B* 是正交阵，下列说法中错误的是（ ）.

A. $A^{-1} = A^T$ 也是正交阵；　　B. $|A| = 1$或-1；

C. AB 不是正交阵；　　D. A 的列向量都是单位向量，且两两正交.

11．设 A 是 n 阶正交阵，① A^{-1} 也是正交阵；② $|A| = -1$；③ A 的列向量都是单位向量且两两正交；④ A 的行向量组是标准正交向量组. 则以上说法正确的有（　）.

A.　1 个；　B.　2 个；　C.　3 个；　D.　4 个.

12．二次型 $f = x^T Ax$ 的矩阵 A 的所有对角元为正是 f 为正定的（　）

A. 充分但非必要条件；　　B. 必要但非充分条件；

C. 充要条件；　　D. 既不充分也不必要条件.

13．设方阵 A 与 B 相似，则（　）

A. $|A - \lambda E| = |B - \lambda E|$；　　B． A 与 B 有相同的特征值与特征向量；

C. A 与 B 都相似于一个对角阵；　　D. 对任意常数 λ，$A - \lambda E$与$B - \lambda E$ 相似.

14. 在向量空间中，向量 $\alpha = (1,-2,0,2)$, 与 $\beta = (2,0,0,2)$ 的夹角是（　）

A　$\frac{\pi}{6}$；　B　$\frac{\pi}{4}$；　C　$\frac{\pi}{3}$；　D　$\frac{\pi}{2}$.

15. 以下多项式是二次型的为（ B ）.

A　$f = x_1$；　B　$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$；　C　$f = x_1 + x_2 - x_3$；　D　$f = x_1^2 + x_1x_2 + x_3 + x_1x_3$.

三、填空题

16.设 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAQ}$，其中 P、Q 是 n 阶矩阵，当 P、Q 是__________矩阵时，A 与 B 是等价的，

当____________时，A 与 B 是相似的，当____________时，A 与 B 是合同的。（写出 P、Q 所满足的条件）

17. 设向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 都是矩阵 A 对应特征值 $\lambda=2$ 的特征向量，且向量 $\beta=\alpha_1-2\alpha_2$，

则向量 $A\beta=$ ________.

18. 设 $A=\begin{pmatrix}k&1&0\\1&1&0\\0&0&k+2\end{pmatrix}$ ~~正定~~，则 k 应满足条件________.

19. 设 $A_{3\times3}$ 的特征值为 $1,2,-3$，方阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$，则 B 的特征值是__________.

20. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定二次型，则 a 的取值范围是________.

21. ~~向量~~ $\alpha=[1,0,1]^T$，$\beta=[1,\sqrt{2},1]^T$ 的夹角是________.

22. 若二次型的正惯性指数为 k，负惯性指数为 l，~~则该~~二次型的秩是________.

23. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1,2,-1，$\left|A^3-5A^2+7A\right|$ 是________.

24. 与任意向量都正交的向量是_____.

25. 向量 $\alpha=[1,1,0,0]^T$ 的长度为__________.

四、解答题

26. 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 为标准形，并写出所用变换的矩阵.

答案：$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2$，所用变换的矩阵为 $\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$.

27. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似.

（1）求 a 和 b；

（2）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

答案：（1）由题设知 B 的 3 个特征值为 $-1,2,b$，而 A 与 B 相似，所以 A 的特征值也为 $-1,2,b$，于是 $-2+a+1=-1+2+b$，即 $b=a-2$　（*）

但 $|\lambda E-A|=(\lambda+2)[\lambda^2-(a+1)\lambda+(a-2)]$，将 $\lambda=-1$ 代入有

$0=|-E-A|=(-1+2)\left[1+(a+1)+(a-2)\right]$，解得 $a=0$，代入（*）得 $b=-2$；

(2) 由上知

$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，且 A 的特征值为 $-1,2,-2$，可求出相应的特征向量

$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$， $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$， $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，于是 $P=\begin{bmatrix}0&0&1\\2&1&0\\-1&1&-1\end{bmatrix}$，使 $P^{-1}AP=B$.

28．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}$ 可相似对角化，求 x.

答案： $x=3$（注求对应 2 重特征根 $\lambda=1$ 的特征向量为 2 个的 x，即求使 $R(E-A)=1$ 的 x 值）

29. 设二次型 $f=x_1^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$，

（1）写出二次型的矩阵 A;

答案 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$

（2）求出 A 特征值;

答案： $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$.

（3）写出二次型 f 的标准形;

答案： $f=y_1^2-y_2^2+2y_3^2$.

（4）求出所用的正交变换的矩阵.

答案：$T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$