（1）离散型随机变量的分布律

设离散型随机变量 X 的可能取值为 X_k(k=1, 2, …) 且取各个值的概率，即事件 ($X=X_k$) 的概率为

$P(X=x_k)=p_k$，k=1, 2, …，

则称上式为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律。有时也用分布列的形式给出：

$$\frac{X}{P(X=x_k)} \Big| \frac{x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots}{p_1, p_2, \cdots, p_k, \cdots}。$$

显然分布律应满足下列条件：

（1） $p_k \geq 0$， $k=1,2,\cdots$，　　（2） $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$。

（2）连续型随机变量的密度

设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数，若存在非负函数 $f(x)$，对任意实数 x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

则称 X 为连续型随机变量。 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数或密度函数，简称概率密度。

密度函数具有下面 4 个性质：

1° $f(x) \geq 0$。

2° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$。

（2）离散与连续型随机变量的关系

$P(X = x) \approx P(x < X \leq x + dx) \approx f(x)dx$

积分元 $f(x)dx$ 在连续型随机变量理论中所起的作用与 $P(X = x_k) = p_k$ 在离散型随机变量理论中所起的作用相类似。

（3）分布函数

设 X 为随机变量，x 是任意实数，则函数

$F(x) = P(X \leq x)$

称为随机变量 X 的分布函数，本质上是一个累积函数。

$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ 可以得到 X 落入区间 $(a,b]$ 的概率。分布函数 $F(x)$ 表示随机变量落入区间（– ∞，x]内的概率。

分布函数具有如下性质：

1° $0 \leq F(x) \leq 1, \quad -\infty < x < +\infty$；

2° $F(x)$ 是单调不减的函数，即 $x_1 < x_2$ 时，有 $F(x_1) \leq F(x_2)$；

3° $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$， $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$；

4° $F(x+0)=F(x)$，即 $F(x)$ 是右连续的；

5° $P(X=x)=F(x)-F(x-0)$。

对于离散型随机变量，$F(x)=\sum_{x_k\le x} p_k$；

对于连续型随机变量，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ 。

（4）六大分布

0-1 分布

P(X=1)=p, P(X=0)=q

二项分布

在 n 重贝努里试验中，设事件 A 发生的概率为 p。事件 A 发生的次数是随机变量，设为 X，则 X 可能取值为 $0,1,2,\cdots,n$。

$P(X=k)=P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$， 其中 $q=1-p, 0<p<1, k=0,1,2,\cdots,n$，

则称随机变量 X 服从参数为 n， p 的二项分布。记为 $X\sim B(n,p)$。

当 $n=1$ 时，$P(X=k)=p^k q^{1-k}$，$k=0.1$，这就是（0-1）分布，所以（0-1）分布是二项分布的特例。

泊松分布

设随机变量 X 的分布律为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad \lambda>0,\quad k=0,1,2\cdots,$$

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X\sim\pi(\lambda)$ 或者 P（λ）。

泊松分布为二项分布的极限分布（np=λ，n→∞）。

均匀分布

设随机变量 X 的值只落在[a，b]内，其密度函数 $f(x)$ 在[a，b]上为常数 $\frac{1}{b-a}$，即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其他，}\end{cases}$$

则称随机变量 X 在[a，b]上服从均匀分布，记为X~U(a，b)。

分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 1, & x>b。\end{cases}$$

当 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 时，X落在区间（x_1,x_2）内的概率为

$$P(x_1<X<x_2)=\frac{x_2-x_1}{b-a}。$$

指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

其中$\lambda>0$，则称随机变量X服从参数为λ的指数分布。
X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0。\end{cases}$$

记住积分公式：

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx=n!$$

正态分布

设随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\qquad -\infty<x<+\infty,$$

其中μ、$\sigma>0$为常数，则称随机变量X服从参数为μ、σ的正态分布或高斯（Gauss）分布，记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

$f(x)$具有如下性质：

1° $f(x)$的图形是关于$x=\mu$对称的；

2° 当$x=\mu$时，$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$为最大值；

若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则X的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

参数$\mu=0$、$\sigma=1$时的正态分布称为标准正态分布，记为$X\sim N(0,1)$，其密度函数记为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}，\quad -\infty<x<+\infty，$$

分布函数为

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt。$$

$\Phi(x)$是不可求积函数，其函数值，已编制成表可供查用。

Φ(-x)＝1-Φ(x)且 Φ(0)＝$\frac{1}{2}$。

如果$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$。

$$P(x_1<X\le x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)。$$

（7）函数分布

离散型

已知X的分布列为

$$\frac{X}{P(X=x_i)}\left|\frac{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots}{p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots}\right.,$$

$Y=g(X)$的分布列（$y_i=g(x_i)$互不相等）如下：

$$\frac{Y}{P(Y=y_i)}\left|\frac{g(x_1),\ g(x_2),\ \cdots,\ g(x_n),\ \cdots}{p_1,\quad p_2,\quad \cdots,\quad p_n,\quad \cdots}\right.,$$

若有某些$g(x_i)$相等，则应将对应的p_i相加作为$g(x_i)$的概率。

连续型

先利用X的概率密度$f_X(x)$写出Y的分布函数$F_Y(y)=P(g(X)\leq y)$，再利用变上下限积分的求导公式求出$f_Y(y)$。