

一元函数极限、连续（数三）考研真题

一、选择题（将最佳答案的序号填写在括号内）

1. (94, 3分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax+bx^2)}{x^2} = 2$ 则 ()

- (A) $a=1, b=-\frac{5}{2}$ (B) $a=0, b=-2$
 (C) $a=0, b=-\frac{5}{2}$ (D) $a=1, b=-2$

2. (96, 2, 3分) 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶无穷小, 则 ()

- (A) $a=\frac{1}{2}, b=1$ (B) $a=1, b=1$
 (C) $a=-\frac{1}{2}, b=-1$ (D) $a=-1, b=1$

3. (97, 3分) 设 $f(x), \varphi(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 $\int_0^x f(t) \sin t dt$ 是 $\int_0^x t \varphi(t) dt$ 的 ()

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小 (C) 同阶但非等价无穷小 (D) 等价无穷小

4. (98, 3分) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数 $f(x)$ 的间断点, 其结论为 ()

- (A) 不存在间断点 (B) 存在间断点 $x=1$ (C) 存在间断点 $x=0$ (D) 存在间断点 $x=-1$

5. (00, 2, 3分) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2}$ 为 ()

- (A) 1 (B) 6 (C) 36 (D) ∞

6. (00, 3分) 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

()

- (A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定等于零.
 (C) 一定不存在. (D) 不一定存在.

7. (00, 2, 3分) 设函数 $f(x) = \frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b

满足 ()

- (A) $a < 0, b < 0$. (B) $a > 0, b > 0$.

- (C) $a \leq 0, b > 0$ (D) $a \geq 0, b < 0$

8. (01, 2, 3分) 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 的高阶无穷小, 而

$x \sin x^n$ 是比 $e^{x^2} - 1$ 的高阶无穷小, 则正整数 n 等于 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

9. (03, 4分) 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数, 且 $f'(0)$ 存在, 则函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ()

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在 (B) 有跳跃间断点 $x=0$

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在 (D) 有可去间断点 $x=0$

10. (04, 2, 4分) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是 ()

- (A) α, β, γ (B) α, γ, β (C) β, α, γ (D) β, γ, α

11. (04, 4分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内有定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, g(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

则 ()

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点 (B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点 (D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

12. (04, 4分) 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界 ()

- (A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$

13. (05, 2, 4分) 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$, 则 ()

- (A) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点
 (B) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点
 (C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点
 (D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

14. (07, 4分) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 ()

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln(1 + \sqrt{x})$
 (C) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

15. (08, 4分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上连续, 则 $x=0$ 是函数 $g(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ 的 ()

- (A) 跳跃间断点 (B) 可去间断点
 (C) 无穷间断点 (D) 振荡间断点

16. (08, 4, 4分) 设 $0 < a < b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} = ()$

- (A) a (B) a^{-1} (C) b (D) b^{-1}

17. (09, 4分) 函数 $f(x) = \frac{x - x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 无穷多个

18. (09, 4分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则 ()

- (A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$ (B) $a=1, b=\frac{1}{6}$
 (C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$ (D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$

19. (10, 4分) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$, 则 a 等于 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

20. (09, 4分) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3 \sin x - \sin 3x$ 与 $g(x) = cx^k$ 是等价无穷小, 则 ()

- (A) $k=1, c=4$ (B) $k=1, c=-4$ (C) $k=3, c=4$ (D) $k=3, c=-4$

二、填空题

1. (02, 3分) 设 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$

2. (04, 4分) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$

3. (05, 4分) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$

4. (06, 4分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. (07, 4分) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}$

6. (08, 4分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leq c \\ \frac{2}{|x|}, & |x| > c \end{cases}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内连续, 则 $c = \underline{\hspace{2cm}}$

7. (09, 4分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算

1. (97, 4, 6分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1 + ax) \right] (a \neq 0)$

2. (98, 4, 6分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2}$ (n 为自然数)

3、(03, 8分) 设 $f(x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, 试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在

$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上连续

4、(04, 8分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$.

5、(05, 8分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right)$

6、(06, 7分) 设 $f(x, y) = \frac{y}{1+xy} - \frac{1-y \sin \frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$, $x > 0, y > 0$, 求

(1) $g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$

7、(08, 9分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$

8、(06, 4, 10分) 试确定常数 A, B, C 的值, 使得 $e^x (1+Bx+Cx^2) = 1+Ax+o(x^3)$, 其

中 $o(x^3)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小

9、(10, 10分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^x - 1 \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

10、(11, ?) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2 \sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}$