

样本与统计量



引言

随机变量及其所伴随的概率分布全面描述了随机现象的统计性规律。

概率论的许多问题中，随机变量的概率分布通常是已知的，或者假设是已知的，而一切计算与推理都是在这已知是基础上得出来的。

但实际中，情况往往并非如此，一个随机现象所服从的分布可能是完全不知道的，或者知道其分布概型，但是其中的某些参数是未知的。

引言

例如：

某公路上行驶车辆的速度服从什么分布是未知的；

电视机的使用寿命服从什么分布是未知的；

产品是否合格服从两点分布，但参数——合格率 p 是未知的；

数理统计的任务则是以概率论为基础，根据试验所得到的数据，对研究对象的客观统计规律性做出合理的推断。

学习的基本内容

从本章开始，我们学习数理统计的基础知识。数理统计的任务是**以概率论为基础，根据试验所得到的数据，对研究对象的客观统计规律性作出合理的推断。**数理统计所包含的内容十分丰富，本书介绍其中的**参数估计、假设检验**等内容。本章主要介绍数理统计的一些基本术语、基本概念、重要的统计量及其分布，它们是后面各章的基础。

样本与统计量

总体与样本

在数理统计中，把研究对象的全体称为**总体** (**population**)或**母体**，而把组成总体的每个单元称为**个体**。

抽样

要了解总体的分布规律，在统计分析工作中，往往是从**总体中抽取一部分个体进行观测**，这个过程称为**抽样**。

样本与统计量

子样

在抽取过程中，每抽取一个个体，就是对总体 X 进行一次随机试验，每次抽取的 n 个个体 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ，称为总体 X 的一个容量为 n 的样本（**sample**）或子样；其中样本中所包含的个体数量称为样本容量。

子样
的观测数据

是 n 个随机变量，
称为样本值或子样观



随机抽样方法的基本要求

代表性——即子样 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的每个分量 X_i 与总体 X 具有**相同的概率分布**。

独立性——即每次抽样的结果既不影响其余各次抽样的结果，也不受其它各次抽样结果的影响。

满足上述两点要求的子样称为**简单随机子样**。获得简单随机子样的抽样方法叫**简单随机抽样**。

从简单随机子样的含义可知，**样本** $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 、与总体 X 具有相同分布的随机变量。

简单随机抽样

例如：要通过随机抽样了解一批产品的次品率，如果每次抽取一件产品观测后放回原来的总量中，则这是一个简单随机抽样。

但实际抽样中，往往是不再放回产品，则这不是一个简单随机抽样。但当总量 N 很大时，**可近似看成**是简单随机抽样。

统计量

定义 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为总体 X 的一个样本, $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为**不含任何未知参数的连续函数**, 则称 $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为样本 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的一个统计量。

例如: 设 (X_1, X_2, X_3) 是从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取的一个样本, 其中 μ 为已知参数, σ 为未知参数,

则 $X_1 + X_2 + 3\mu X_3$ $X_1^2 + 3\mu X_2 X_3$ 是统计量

$X_1 + \sigma X_2 + X_3^2$ $X_1 X_2 X_3 + \sigma$ 不是统计量

几个常用的统计量

设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是总体 X 的一个样本,

样本均值 (sample mean)

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

样本方差 (sample variance)

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X} \right)^2$$



几个常用的统计量

设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是总体 X 的一个样本,

样本均方差或标准差

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

它们的观测值用相应的小写字母表示.反映总体 X 取值的平均, 或反映总体 X 取值的离散程度。

几个常用的统计量

设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是总体 X 的一个样本,

样本的**K**阶（原点）矩

$$A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

样本的**K**阶中心矩

$$B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X} \right)^k$$



统计量的分布

统计量 $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的
不含任何未知数的函数，它是一个随机变量

统计量的分布称为抽样分布。

由于正态总体是最常见的总体，因此这里主要讨论
正态总体下的抽样分布。

由于这些抽样分布的论证要用到较多的数学知识，
故在本节中，我们主要给出有关结论，以供应用。

U—分布

正态总体样本均值的分布

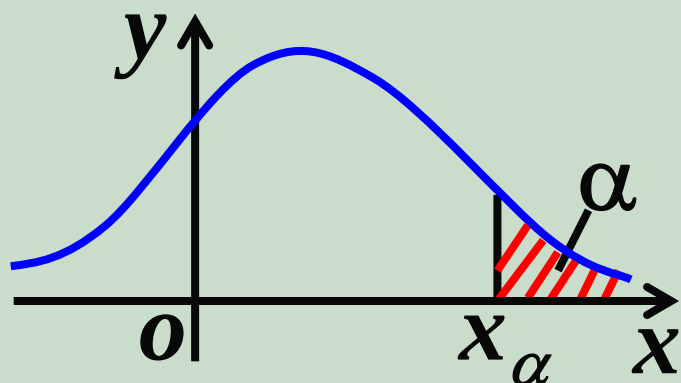
设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 X 的一个样本, 则**样本均值服从正态分布**

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

概率分布的分位数(分位点)

定义 对总体 X 和给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 若存在 x_α , 使 $P\{X \geq x_\alpha\} = \alpha$, 则称 x_α 为 X 分布的**上侧 α 分位数**或**上侧临界值**. 如图.

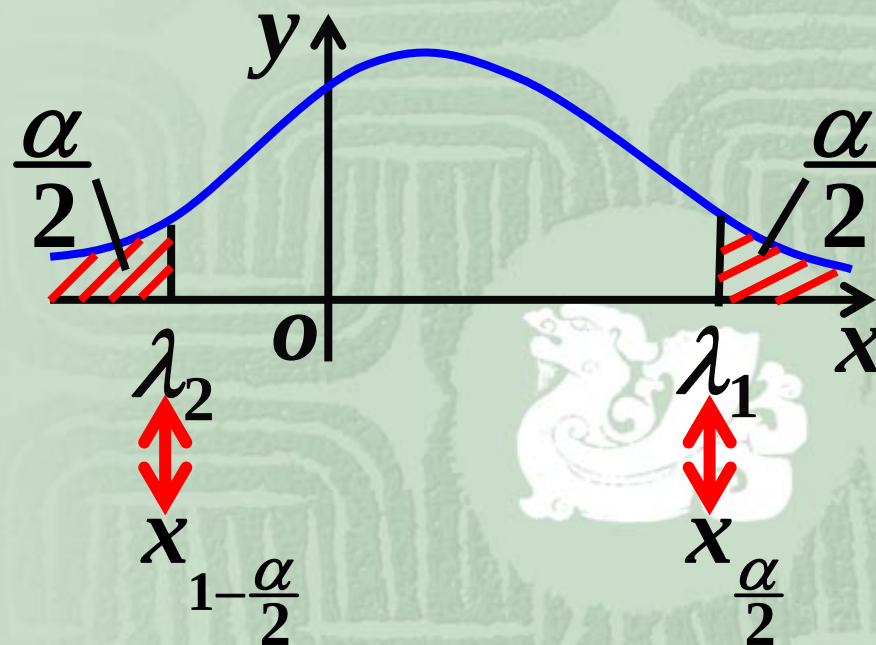


$$P\{X \geq x_\alpha\} = \alpha$$

$$\int_{x_\alpha}^{+\infty} f(x) dx = \alpha$$

若存在数 λ_1 、 λ_2 , 使
 $P\{X \geq \lambda_1\} = P\{X \leq \lambda_2\} = \frac{\alpha}{2}$

则称 λ_1 、 λ_2 为 X 分布的**双侧 α 分位数**或**双侧临界值**.



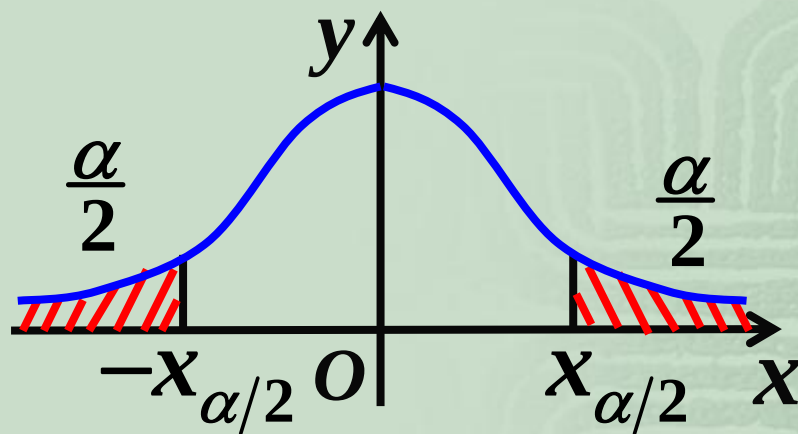
双侧 α 分位数或双侧临界值的特例

当 X 的分布关于 y 轴对称时, 若存在 $x_{\alpha/2}$, 使

$$P\{|X| \geq x_{\alpha/2}\} = \alpha,$$

则称 $x_{\alpha/2}$ 为 X 分布的**双侧 α 分位数**或**双侧临界值**.

如图.



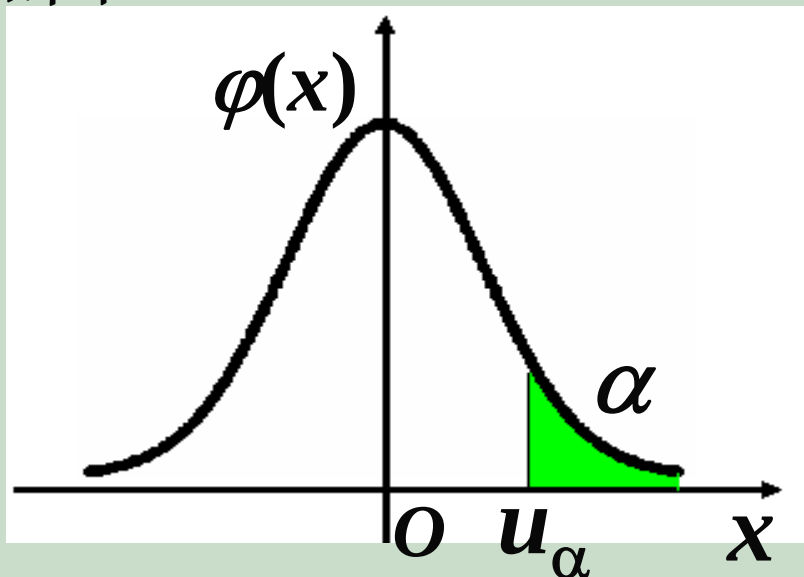
U—分布的上侧分位数

对标准正态分布变量 $U \sim N(0, 1)$ 和给定 α 的, 上侧

$$\alpha \text{ 分位数是由: } P\{U \geq u_\alpha\} = \int_{u_\alpha}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \alpha$$

即 $P\{U < u_\alpha\} = 1 - \alpha$ $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$ 确定的点 u_α .

如图.



例如, $\alpha=0.05$, 而

$$P\{U \geq 1.645\} = 0.05$$

所以, $u_{0.05} = 1.645$.

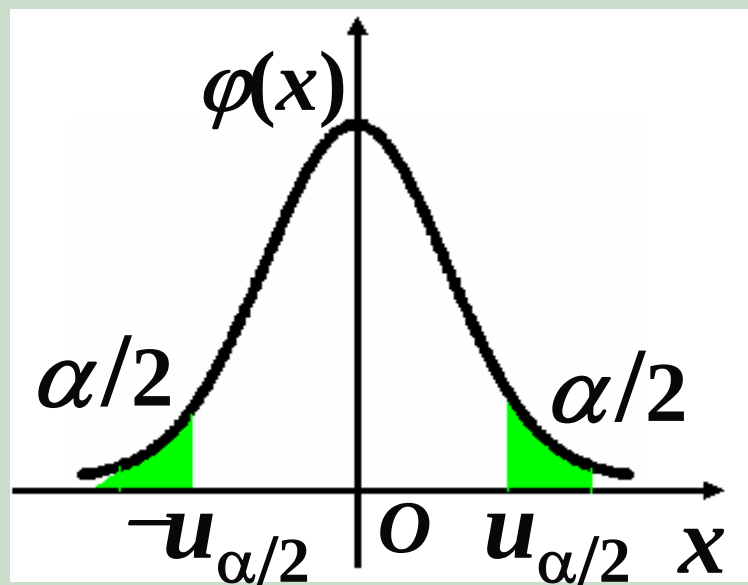
U—分布的双侧分位数

对标准正态分布变量 $U \sim N(0, 1)$ 和给定 α 的,

称满足条件 $P\{|U| \geq u_{\alpha/2}\} = \alpha$

的点 $u_{\alpha/2}$ 为标准正态分布的**双侧 α 分位数**或**双侧临界值**.

如图.



$u_{\alpha/2}$ 可由 $P\{U \geq u_{\alpha/2}\} = \alpha/2$

即 $\Phi(u_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

反查标准正态分布表得到,

例如, 求 $u_{0.05/2}$,

$P\{U \geq 1.96\} = 0.05/2$

得 $u_{0.05/2} = 1.96$

标准正态分布的分位数

在实际问题中， α 常取0.1、0.05、0.01.

常用到下面几个临界值：

$$u_{0.05} = 1.645,$$

$$u_{0.01} = 2.326$$

$$u_{0.05/2} = 1.96,$$

$$u_{0.01/2} = 2.575$$



数理统计中常用的分布除正态分布外，还有三个非常有用的连续型分布，即

χ^2 分布
 t 分布
 F 分布

数理统计的三大分布（都是连续型）。
它们都与正态分布有密切的联系。



在本章中特别要求掌握对正态分布、 χ^2 分布、 t 分布、 F 分布的一些结论的熟练运用。它们是后面各章的基础。



χ^2 ——分布

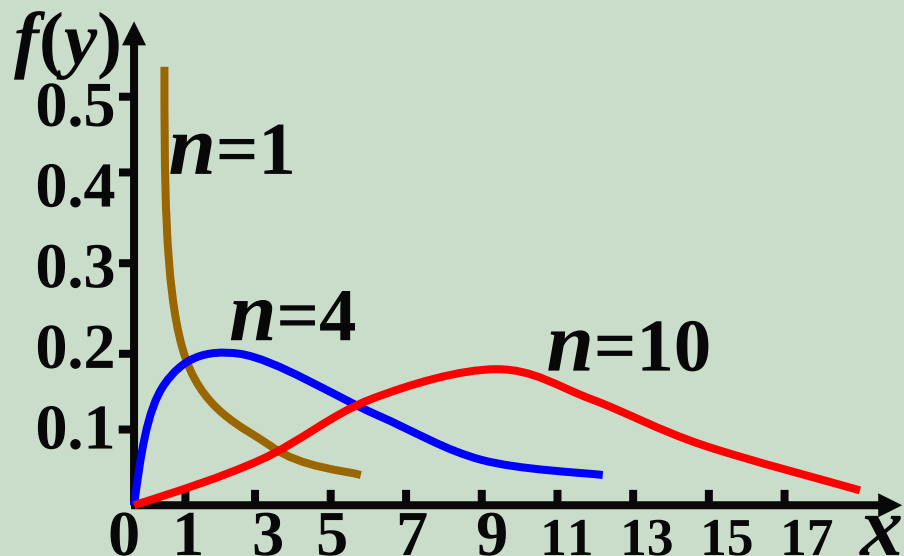
定义：设总体 $X \sim N(0,1)$ ， $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 X 的一个样本，则称统计量 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

自由度是指独立随机变量的个数， $df = n$

$\chi^2(n)$ 分布的密度函数为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \quad \Gamma(n+1) = n!$$

$\chi^2(n)$ 分布密度函数的图形



其图形随自由度的不同而有所改变.

$$P \{ \chi^2(n) \geq \chi^2_{\alpha}(n) \} = \alpha$$

χ^2 分布表(附表3(P_{254})).



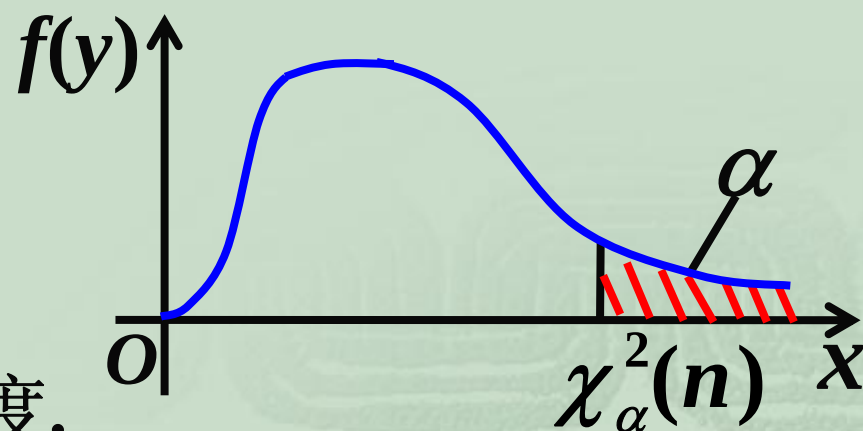
χ^2 分布的上 α 分位数

满足 $P\{\chi^2(n) \geq \chi_{\alpha}^2(n)\} = \int_{\chi_{\alpha}^2(n)}^{+\infty} f(y)dy = \alpha$

的数 $\chi_{\alpha}^2(n)$ 为 χ^2 分布的
上 α 分位数或上侧临界值,

其几何意义见右图所示.

其中 $f(y)$ 是 χ^2 -分布的概率密度.



显然, 在自由度 n 取定以后, $\chi_{\alpha}^2(n)$ 的值只与 α 有关.

例如, 当 $n=21$, $\alpha=0.05$ 时, 由附表可查得,

$$\chi_{0.05}^2(21) = 32.67 \quad \text{即} \quad P\{\chi^2(21) \geq 32.67\} = 0.05.$$

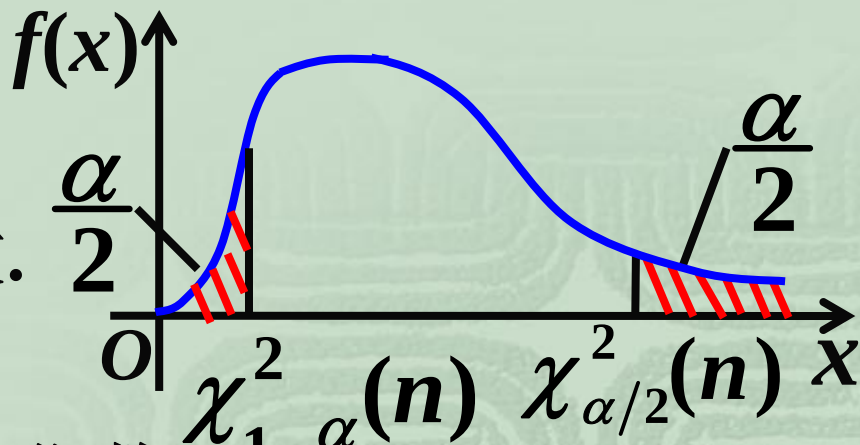
χ^2 分布的双侧 α 分位数

把满足 $P\left\{\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right\} = P\left\{\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right\} = \frac{\alpha}{2}$ 的数 $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$, $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 称为 χ^2 分布的 **双侧 α 分位数**

或 **双侧临界值**. 见图. 显然,

$\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 为 χ^2 分布的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数.

$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 为 χ^2 分布的上 $1-\frac{\alpha}{2}$ 分位数.



如当 $n=8$, $\alpha=0.05$ 时,

$$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n) = \chi_{0.975}^2(8) = 2.18 \quad \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n) = \chi_{0.025}^2(8) = 17.53$$

χ^2 分布的数学期望与方差（补充）

设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 则 $E(\chi^2) = n$, $D(\chi^2) = 2n$.

χ^2 分布的可加性

设 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1)$, $\chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 且 χ_1^2, χ_2^2 相互独立,

则 $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$



性质 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为取自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

的样本, 则 $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

证明 由已知, 有

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ 且 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立,

则 $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 且各 $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$ 相互独立,

由定义5.3得

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n).$$

定理5.1 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为来自正态总体
 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则

(1) 样本均值 $\bar{X}$ 与样本方差 S^2 相互独立;

$$(2) \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(5.8)式的自由度为什么是 $n-1$?

从表面上看, $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 n 个正态随机变量 $X_i - \bar{X}$ 的平方和, 但实际上它们不是独立的, 它们之间有一种线性约束关系:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = \sum_{i=1}^n X_i - n\bar{X} = 0$$



这表明，当这个 n 个正态随机变量中有 $n-1$ 个取值给定时，剩下的一个的取值就跟着唯一确定了，故在这 n 项平方和中只有 $n-1$ 项是独立的.所以所求式子的自由度是 $n-1$.



定理 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为来自正态总体
 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则

(1) 样本均值 $\bar{X}$ 与样本方差 S^2 相互独立;

$$(2) \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

与以下补充性质的结论比较:

性质 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为取自正态总体

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

三、t分布

定义

设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$,

且 X 与 Y 相互独立, 则称统计量 $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$

服从自由度为 n 的 **t分布**, 记作 $T \sim t(n)$.

t分布的概率密度函数为

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad (-\infty < t < +\infty)$$

其**形状类似标准正态分布**的概率密度的图形.

当 n 较大时, **t分布近似于标准正态分布**.



当 n 较大时, t 分布近似于标准正态分布.

一般说来, 当 $n > 30$ 时, t 分布与标准正态分布 $N(0, 1)$ 就非常接近.

但对较小的 n 值, t 分布与标准正态分布之间有较大差异. 且 $P\{|T| \geq t_0\} \geq P\{|X| \geq t_0\}$, 其中 $X \sim N(0, 1)$, 即在 t 分布的尾部比在标准正态分布的尾部有着更大的概率.

t 分布的数学期望与方差

设 $T \sim t(n)$, 则 $E(T) = 0$, $D(T) = \frac{n}{n-2} \cdot (n > 2)$

定理

设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为来自正态总体
 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

证 由于 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立, 且

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

由定义得

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / (n-1)}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = T \sim t(n-1)$$

定理 设 $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$ 和 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本, 且它们相互独立, 则统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_n \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

其中 $S_n = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}},$

S_1^2 、 S_2^2 分别为两总体的样本方差.

(证略).

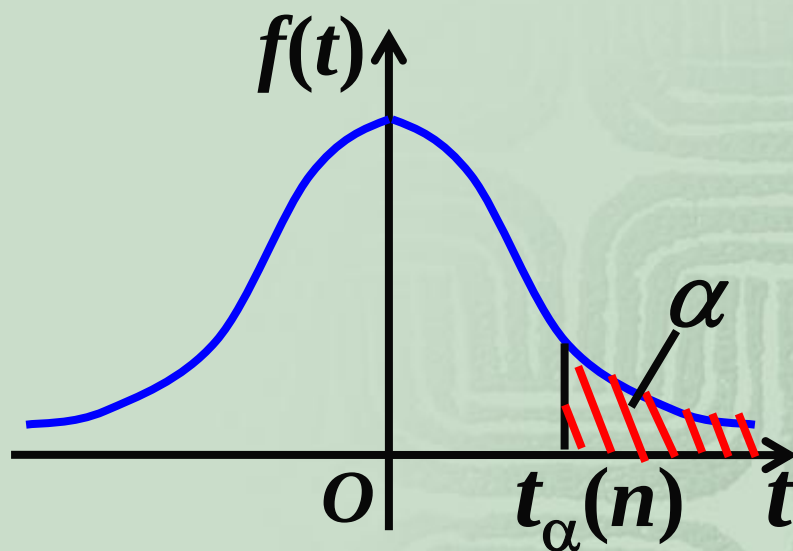


t 分布的上 α 分位数

对于给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 称满足条件

$$P\{T \geq t_{\alpha}(n)\} = \int_{t_{\alpha}(n)}^{+\infty} f(t)dt = \alpha$$

的数 $t_{\alpha}(n)$ 为 t 分布的上 α 分位数或上侧临界值,
其几何意义见图.

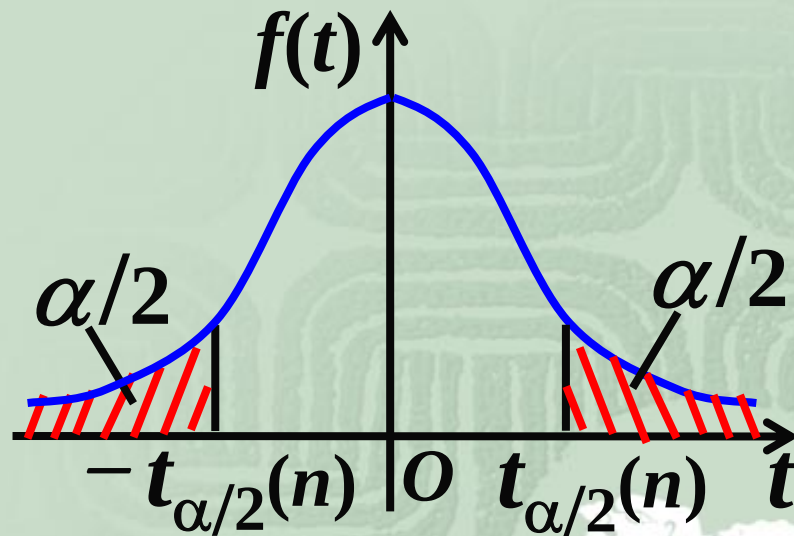


t 分布的双侧 α 分位数

由于 t 分布的对称性，称满足条件

$$P\{|T| \geq t_{\alpha/2}(n)\} = \alpha$$

的数 $t_{\alpha/2}(n)$ 为 t 分布的**双侧 α 分位数或双侧临界值**，
其几何意义如图所示。



在附表中给出了 t 分布的临界值表.

例如, 当 $n=15$, $\alpha=0.05$ 时, 查 t 分布表得,

$$t_{0.05}(15)=1.753$$

$$t_{0.05/2}(15)=2.131$$

其中 $t_{0.05/2}(15)$ 由 $P\{t(15) \geq t_{0.025}(15)\}=0.025$ 查得.

但当 $n>45$ 时, 如无详细表格可查, 可以用标准正态分布代替 t 分布查 $t_{\alpha}(n)$ 的值.

$$\text{即 } t_{\alpha}(n) \approx u_{\alpha}, \quad n>45.$$

一般的 t 分布临界值表中, 详列至 $n=30$, 当 $n>30$ 就用标准正态分布 $N(0, 1)$ 来近似.



四、F分布

定义5.5 设随机变量 $X \sim \chi^2(n_1)$ 、 $Y \sim \chi^2(n_2)$ ，且与相互独立，则称随机变量 $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从第一自由度为 n_1 ，第二自由度为 n_2 的 F 分布，记作 $F \sim F(n_1, n_2)$.

$$f(y) = \begin{cases} Ay^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} y\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

$$\text{其中 } A = \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}},$$



性质：若 $X \sim F(n_1, n_2)$ ，则 $\frac{1}{X} \sim F(n_2, n_1)$.

F 分布的上 α 分位数

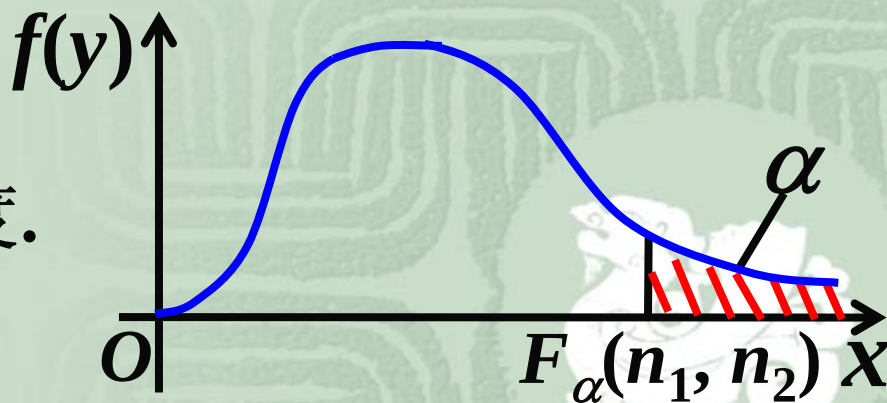
对于给定的 α ($0 < \alpha < 1$)，称满足条件

$$P\{F(n_1, n_2) \geq F_\alpha(n_1, n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1, n_2)}^{+\infty} f(y) dy = \alpha$$

的数 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 为 F 分布的 **上 α 分位数或上侧临界值**，

其几何意义如图所示。

其中 $f(y)$ 是 F 分布的概率密度。



F 分布的上 α 分位数

$F_{\alpha}(n_1, n_2)$ 的值可由F分布表查得.

附表5、6、7($P_{258} \sim P_{266}$)分 $\alpha=0.1$ 、 $\alpha=0.05$ 、 $\alpha=0.01$ 给出了F分布的上 α 分位数.

查表时应先找到相应的 α 值的表.

当时 $n_1=2, n_2=18$ 时, 有 $F_{0.01}(2, 18)=6.01$

在附表中所列的 α 值都比较小, 当 α 较大时, 可用下面公式

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2, n_1)}$$

$$\text{例如, } F_{0.99}(18, 2) = \frac{1}{F_{0.01}(2, 18)} = \frac{1}{6.01} \approx 0.166$$

F 分布的双侧 α 分位数

称满足条件

$$P\left\{F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)\right\} = P\left\{F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)\right\} = \frac{\alpha}{2}$$

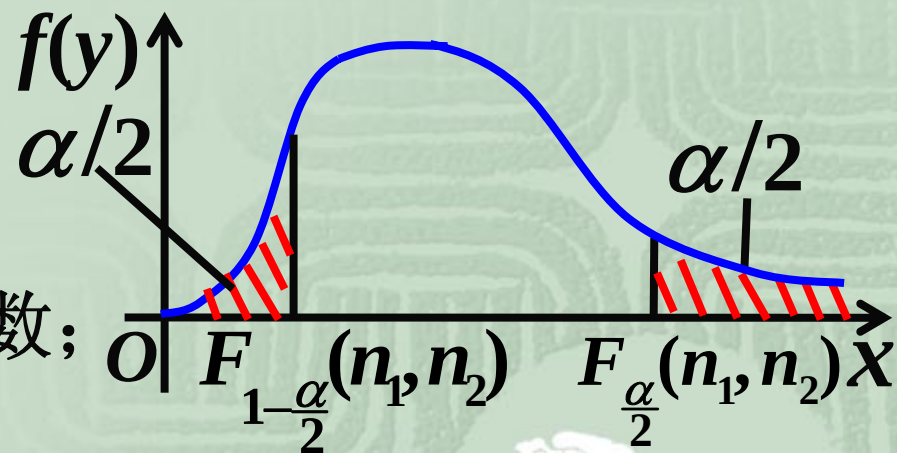
的 $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$, $F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$ 为 F 分布的**双侧 α 分位数**

或**双侧临界值**. 见图.

显然,

$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$ 为 F 分布的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数;

$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$ 为 F 分布的上 $1-\frac{\alpha}{2}$ 分位数;



例1 设总体 $X \sim N(0,1)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为简单随机样本, 试问下列统计量各服从什么分布?

$$(1) \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}}; \quad (2) \frac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^n X_i^2}}; \quad (3) \frac{(\frac{n}{3}-1)\sum_{i=1}^3 X_i^2}{\sum_{i=4}^n X_i^2}.$$

解 (1) 因为 $X_i \sim N(0,1)$, $i=1, 2, \dots, n$. 所以

$$X_1 - X_2 \sim N(0, 2), \quad \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1),$$

$$X_3^2 + X_4^2 \sim \chi^2(2),$$

故

$$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}} = \frac{(X_1 - X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{X_3^2 + X_4^2}{2}}} \sim t(2).$$



例1 设总体 $X \sim N(0,1)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为简单随机样本, 试问下列统计量各服从什么分布?

$$(1) \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}}; \quad (2) \frac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^n X_i^2}}; \quad (3) \frac{(\frac{n}{3}-1)\sum_{i=1}^3 X_i^2}{\sum_{i=4}^n X_i^2}.$$

续解 (2) 因为 $X_1 \sim N(0,1)$, $\sum_{i=2}^n X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$

故

$$\frac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^n X_i^2}} = \frac{X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^n X_i^2 / (n-1)}} \sim t(n-1).$$



例1 设总体 $X \sim N(0,1)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为简单随机样本, 试问下列统计量各服从什么分布?

$$(1) \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}}; \quad (2) \frac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^n X_i^2}}; \quad (3) \frac{(\frac{n}{3}-1)\sum_{i=1}^3 X_i^2}{\sum_{i=4}^n X_i^2}.$$

续解 (3) 因为 $\sum_{i=1}^3 X_i^2 \sim \chi^2(3)$, $\sum_{i=4}^n X_i^2 \sim \chi^2(n-3)$,

所以

$$\frac{(\frac{n}{3}-1)\sum_{i=1}^3 X_i^2}{\sum_{i=4}^n X_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^3 X_i^2 / 3}{\sum_{i=4}^n X_i^2 / (n-3)} \sim F(3, n-3).$$



例2 若 $T \sim t(n)$, 问 T^2 服从什么分布?

解 因为 $T \sim t(n)$, 可以认为

$$T = \frac{U}{\sqrt{V/n}},$$

其中 $U \sim N(0,1)$, $V \sim \chi^2(n)$,

$$T^2 = \frac{U^2}{V/n}, \quad U^2 \sim \chi^2(1),$$

$$T^2 = \frac{U^2/1}{V/n} \sim F(1, n).$$



例3 设总体 $X \sim N(\mu, 4^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ 是 $n=10$ 简单随机样本, S^2 为样本方差, 已知 $P\{S^2 > \alpha\} = 0.1$, 求 α .

解 因为 $n=10$, $n-1=9$, $\sigma^2=4^2$, 所以

$$\frac{9S^2}{4^2} \sim \chi^2(9).$$

$$\text{又 } P\{S^2 > \alpha\} = P\left\{\frac{9S^2}{4^2} > \frac{9\alpha}{4^2}\right\} = 0.1,$$

$$\text{所以 } \frac{9\alpha}{4^2} = \chi_{0.1}^2(9) \approx 14.684. \quad \text{故}$$

查表

$$\alpha \approx 14.684 \times \frac{16}{9} \approx 26.105$$



参数估计



数理统计问题：如何选取样本来对总体的种种统计特征作出判断。

参数估计问题：知道随机变量（总体）的分布类型，但确切的形式不知道，根据样本来估计总体的参数，这类问题称为参数估计（parametric estimation）。

参数估计的类型——点估计、区间估计



参数 θ 的估计量

设总体的分布函数为 $F(x, \theta)$ (θ 未知), $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为样本, 构造一个统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 来估计参数 θ , 则称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为参数 θ 的估计量。

将样本观测值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 代入 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 得到的值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为参数 θ 的估计值。



点估计 (point estimation) : 如果构造一个统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 来作为参数 θ 的估计量, 则称为参数 θ 的点估计。

区间估计 (interval estimation) : 如果构造两个统计量 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n), \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 而用 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 来作为参数 θ 可能取值范围的估计, 称为参数 θ 的区间估计。



参数的点估计

点估计的方法：数字特征法、矩法、极大似然法。

样本的数字特征法：以样本的数字特征作为相应总体数字特征的估计量。

以样本均值 $\bar{X}$ 作为总体均值 μ 的点估计量，即

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{点估计值} \quad \hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

以样本方差 S^2 作为总体方差 σ^2 的点估计量，即

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$\text{点估计值} \quad \hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$



k 阶矩的概念

定义 设 X 为随机变量, 若 $E(|X|^k)$ 存在, 则称 $E(X^k)$ 为 X 的 k 阶**原点矩**, 记作 $V_k = E(X^k)$; 若 $E(|X - EX|^k)$ 存在, 则称 $E(X - EX)^k$ 为 X 的 k 阶**中心矩**, 记作 $U_k = E(X - EX)^k$

样本的 k 阶原点矩, 记作 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$

样本的 k 阶中心矩, 记作 $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$

参数的矩法估计

矩法估计：用样本的矩作为总体矩的估计量，即

$$\hat{V} = A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad \hat{U}_k = B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$$

若总体 X 的分布函数中含有 m 个参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ ，总体的 k 阶矩 V_k 或 U_k 存在，则

$$V_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

$$\text{或 } U_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

参数的矩法估计

矩法估计：用样本的矩作为总体矩的估计量，即

$$\hat{V}_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

$$\text{或 } \hat{U}_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

得 m 个方程构成方程组，解得的 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m$ 即为参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ 的矩估计量，代入样本观测值，即得参数的矩估计值。



例2 设某总体 X 的数学期望为 $EX=\mu$ ，方差 $DX=\sigma^2$ ， $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为样本，试求 μ 和 σ^2 的矩估计量。

解 总体的 k 阶原点矩为 $V_1 = \mu$

$$V_2 = E(X^2) = DX + (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

样本的 k 阶原点矩为 $A_1 = \bar{X}$ $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

由矩法估计，应有 $\bar{X} = \mu$ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sigma^2 + \mu^2$

所以 $\hat{\mu} = \bar{X}$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

结论： 不管总体X服从何种分布，总体期望和方差的矩估计量分别为样本均值、样本方差，即

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = S_n^2$$

估计值为

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$



例3 设 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ 为总体 $\mathbf{X}$ 的样本, 试求下列总体分布参数的矩估计量。

(1) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (2) $X \sim B(N, p)$ (N 已知) (3) $X \sim P(\lambda)$

解 (1) 由于 $EX = \mu$ $DX = \sigma^2$

所以参数 μ 和 σ^2 的矩估计量为

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

(2) 由于 $EX = Np$

所以 $Np = \bar{X}$

得参数 p 的矩估计量为 $\hat{p} = \frac{1}{N} \bar{X} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

例3 设 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ 为总体 $\mathbf{X}$ 的样本, 试求下列总体分布参数的矩估计量。

(1) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (2) $X \sim B(N, p)$ (N 已知) (3) $X \sim P(\lambda)$

解 (3) 由于 $EX = DX = \lambda$

所以参数 λ 的矩估计量为

$$\hat{\lambda} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{或} \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

一阶矩

二阶矩

可见: 同一个参数的矩估计量可以不同。所以统计量存在“优、劣”之分。

例4 设总体 X 服从 $[\theta_1, \theta_2]$ 上的均匀分布, $\theta_1 < \theta_2$, 求 θ_1, θ_2 的矩估计量, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为 X 的一个样本。

解 由于 $EX = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, DX = \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12}$

所以由矩法估计, 得

$$\bar{X} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad S_n^2 = \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12}$$

解得 $\hat{\theta}_1 = \bar{X} - \sqrt{3}S_n \quad \hat{\theta}_2 = \bar{X} + \sqrt{3}S_n$

区间长度的矩估计量为 $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1 = 2\sqrt{3}S_n$



例5 对容量为 n 的子样，求下列密度函数中参数 a 的矩估计量。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a^2}(a-x), & (0 < x < a) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

解 由于 $EX = \int_0^a x \cdot \frac{2}{a^2}(a-x)dx = \frac{a}{3}$

所以由矩法估计，得 $\bar{X} = \frac{a}{3}$

$$\text{解得 } \hat{a} = 3\bar{X} = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

所以，参数 a 的矩估计量为 $\hat{a} = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i$



参数的极大似然估计法

思想：设总体 $\mathbf{X}$ 的密度函数为 $\mathbf{f}(\mathbf{x},\theta)$ ， θ 为未知参数，则样本 $(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\dots,\mathbf{X}_n)$ 的联合密度函数为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

$$\text{令 } L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}$ ，使得样本 $(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\dots,\mathbf{X}_n)$ 落在观测值 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的邻域内的概率 $L(\theta)$ 达到最大，即

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \hat{\theta}) = \max L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$$

则称 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的极大似然估计值。



参数的极大似然估计法

求解方法:

(1) 构造似然函数 $L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$

(2) 取自然对数 $\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta)$

(3) 令 $\frac{d \ln L}{d\theta} = 0$

其解 $\hat{\theta}$ 即为参数 θ 的极大似然估计值。

若总体的密度函数中有多个参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, 则将

第 (3) 步改为 $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0, (i = 1, 2, \dots, n)$

解方程组即可。



例6 假设 $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$ 是取自正态总体 $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 求 μ 和 σ^2 的极大似然估计量。

解 构造似然函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

取对数

$$\begin{aligned} \ln L(\theta) &= \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} - \ln \sqrt{2\pi} - \ln \sigma \right) \end{aligned}$$



续解

求偏导数，并令其为0

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2(x_i - \mu)(-1)}{2\sigma^2} \right) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{\sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - \mu)^2}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \right) = 0$$

解得 $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

所以 μ , σ^2 的极大似然估计量为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

与矩估计量
相同

估计量的评选标准

——无偏性、有效性、相合性*、充分性与完备性*

无偏估计量：设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量，如果 $E(\hat{\theta}) = \theta$ ，
则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**无偏估计量**（**unbiased estimation**）

例题 设总体的数学期望**EX**和方差**DX**都存在，
证明：样本均值 $\bar{X}$ 、样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
分别是**EX**、**DX**的无偏估计。



例题 设总体的数学期望 EX 和方差 DX 都存在,

证明: 样本均值 $\bar{X}$ 、样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 分别是 EX 、 DX 的无偏估计。

证明

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \frac{1}{n-1} E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] \\ &= \frac{n}{n-1} E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] = \frac{n}{n-1} E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X})^2 \right] \\ &= \frac{n}{n-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) - E(\bar{X})^2 \right] \\ &= \frac{n}{n-1} \left[\frac{n[DX + (EX)^2]}{n} - D(\bar{X})^2 - (E\bar{X})^2 \right] \end{aligned}$$



证明 $E(S^2) = \frac{1}{n-1} E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right]$

$$= \frac{n}{n-1} \left[\frac{n[DX + (EX)^2]}{n} - D(\bar{X})^2 - (E\bar{X})^2 \right]$$

$$= \frac{n}{n-1} \left[\frac{n[DX + (EX)^2]}{n} - \frac{DX}{n} - (EX)^2 \right]$$

$$= DX$$

$$E \left\{ \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] \right\} = \frac{n-1}{n} DX$$



有 效 性

设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量，当样本容量 n 固定时，使 $E(\hat{\theta} - \theta)^2$ 达到最小的 $\hat{\theta}$ 称为 θ 的有效估计

比较：若 $E(\theta_1 - \theta)^2 < E(\theta_2 - \theta)^2$ ，则 θ_1 比 θ_2 有效。

例如 $\bar{X}$ 及 $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ （其中 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ ）都是 EX 的无偏估计，但 $\bar{X}$ 比 $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ 有效。



例如 $\bar{X}$ 及 $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ (其中 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$) 都是 EX 的无偏估计, 但 $\bar{X}$ 比 $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ 有效。

因为 $E(\bar{X} - EX)^2 = E(\bar{X} - E\bar{X})^2 = D\bar{X} = \frac{DX}{n}$

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i - EX\right]^2 &= E\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i - E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right)\right]^2 \\ &= D\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 D(X_i) = D(X) \sum_{i=1}^n a_i^2 \\ &= \frac{1}{n} D(X) \cdot n \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{1}{n} D(X) \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \frac{1}{n} D(X) \end{aligned}$$

算术平均 $\leq$ 几何平均

区间估计



区间估计的思想

点估计总是有误差的，但没有衡量偏差程度的量，区间估计则是按一定的可靠性程度对待估参数给出一个区间范围。

引例 设某厂生产的灯泡使用寿命 $X \sim N(\mu, 100^2)$ ，现随机抽取**5**只，测量其寿命如下：**1455, 1502, 1370, 1610, 1430**，则该厂灯泡的平均使用寿命的点估计值为

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(1455 + 1502 + 1370 + 1610 + 1430) = 1473.4$$

可以认为该种灯泡的使用寿命在**1473.4**个单位时间左右，但范围有多大呢？又有多大的可能性在这“左右”呢？

如果要求有**95%**的把握判断 μ 在**1473.4**左右，则由**U**统计

量可知
$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

由
$$P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < \varepsilon\right\} = 0.95 \longrightarrow \Phi(\varepsilon) = 0.95$$

查表得 $\varepsilon = 1.96$

$$\longrightarrow \bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



置信水平、置信区间

设总体的分布中含有一个参数 θ ，对给定的 α ，如果由样本 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 确定两个统计量 $\theta_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ， $\theta_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，使得 $P\{\theta_1 < \theta < \theta_2\} = 1 - \alpha$ ，则称随机区间 (θ_1, θ_2) 为参数 θ 的置信度（或置信水平）为 $1 - \alpha$ 的置信区间。

θ_1 ——置信下限

θ_2 ——置信上限



几点说明

- 1、参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间（ θ_1, θ_2 ）表示该区间有**100**（ $1-\alpha$ ）%的可能性包含总体参数 θ 的真值。
- 2、不同的置信水平，参数 θ 的置信区间不同。
- 3、置信区间越小，估计越精确，但置信水平会降低；相反，置信水平越大，估计越可靠，但精确度会降低，置信区间会较长。一般：对于固定的样本容量，不能同时做到精确度高（置信区间小），可靠程度也高（ $1-\alpha$ 大）。如果不降低可靠性，而要缩小估计范围，则必须增大样本容量，增加抽样成本。

正态总体方差已知，对均值的区间估计

如果总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 σ^2 已知， μ 未知，
则取 **U**-统计量 $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ，对 μ 做区间估计。

对给定的置信水平 $1-\alpha$ ，由 $P\left\{|U| < u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$
确定临界值（ X 的双侧 α 分位数）得 μ 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

将观测值 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 代入，则可得具体的区间。

例1 某车间生产滚珠，从长期实践中知道，滚珠直径 X 可以认为服从正态分布，从某天的产品中随机抽取6个，测得直径为（单位：cm）

14.6, 15.1, 14.9, 14.8, 15.2, 15.1

- (1)** 试求该天产品的平均直径 EX 的点估计；
- (2)** 若已知方差为**0.06**，试求该天平均直径 EX 的置信区间： $\alpha=0.05$ ； $\alpha=0.01$ 。

解 **(1)** 由矩法估计得 EX 的点估计值为

$$EX = \bar{x} = \frac{1}{6}(14.6 + 15.1 + 14.9 + 14.8 + 15.2 + 15.1) = 14.95$$

续解 (2) 由题设知 $X \sim N(\mu, 0.06)$

构造 **U**-统计量, 得 **EX** 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\text{而 } \bar{x} = 14.95, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{6}} = 0.1$$

$$\text{当 } \alpha = 0.05 \text{ 时, } u_{0.025} = 1.96$$

所以, **EX** 的置信区间为 **(14.754, 15.146)**

$$\text{当 } \alpha = 0.01 \text{ 时, } u_{0.005} = 2.58$$

所以, **EX** 的置信区间为 **(14.692, 15.208)**

置信水平提高, 置信区间扩大, 估计精确度降低。

例2 假定某地一旅游者的消费额 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，且标准差 $\sigma=12$ 元，今要对该地旅游者的平均消费额 EX 加以估计，为了能以**95%**的置信度相信这种估计误差小于**2**元，问至少要调查多少人？

解 由题意知：消费额 $X \sim N(\mu, 12^2)$ ，设要调查 **n** 人。

由 $1 - \alpha = 0.95$ 得 $\alpha = 0.05$ 查表得 $u_{\alpha/2} = 1.96$

$$\text{即 } P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < 1.96\right\} = 0.95$$

$$\text{而 } |\bar{X} - \mu| < 2 \quad \longrightarrow \quad 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2$$

$$\text{解得 } n = \left(\frac{1.96 \times 12}{2}\right)^2 = 138.29 \quad \text{至少要调查}\mathbf{139}\text{人}$$

正态总体方差未知，对均值的区间估计

如果总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ, σ 均未知

由 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 构造 **T**-统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$

当置信水平为 $1-\alpha$ 时，由 $P\{|T| < t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$

查 **t**-分布表确定 $t_{\alpha/2}(n-1)$

从而得 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha/2}(n-1), \quad \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha/2}(n-1) \right)$$

例3 某厂生产的一种塑料口杯的重量 X 被认为服从正态分布，今随机抽取**9**个，测得其重量为（单位：克）：
21.1, 21.3, 21.4, 21.5, 21.3, 21.7, 21.4, 21.3, 21.6。试用**95%**的置信度估计全部口杯的平均重量。

解 由题设可知：口杯的重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

由抽取的**9**个样本，可得 $S = 0.18$ $\bar{x} = 21.4$ $n = 9$

由 $1 - \alpha = 0.95$ 得 $\alpha = 0.05$ 查表得 $t_{0.025}(8) = 2.306$

$$t_{\alpha/2}(8) \times \frac{S}{\sqrt{n}} = 2.306 \cdot \frac{0.18}{\sqrt{9}} = 0.13836$$

全部口杯的平均重量的置信区间为 (**21.26, 21.54**)



P127例5与P126例3的比较:

解 由题设可知: 平均消费额 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$S = 12 \quad \bar{x} = 80 \quad n = 25$$

由 $1 - \alpha = 0.95$ 得 $\alpha = 0.05$ 查表得 $t_{0.025}(24) = 2.064$

$$t_{\alpha/2}(24) \times \frac{S}{\sqrt{n}} = 2.064 \times \frac{12}{\sqrt{25}} = 4.9536$$

平均消费额的置信区间为 **(75.0464, 84.9536)**

估计误差为 $2 \times 4.9536 = 9.9072 > 2$

精确度降低 —— 原因: 样本容量减少

在实际应用中, 方差未知的均值的区间估计
较有应用价值。



练习 假设某片居民每月对某种商品的需求量 X 服从正态分布，经调查**100**家住户，得出每户每月平均需求量为**10**公斤，方差为**9**，如果某商店供应**10000**户，试就居民对该种商品的平均需求量进行区间估计（ $\alpha=0.01$ ），并依此考虑最少要准备多少这种商品才能以**99%**的概率满足需求？

解 由题设可知：平均需求量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$S^2 = 9 \quad \bar{x} = 10 \quad n = 100$$

由 $\alpha = 0.01$ 查表得 $t_{0.005}(99) \approx u_{0.005} = 2.57$

$$t_{\alpha/2}(99) \times \frac{S}{\sqrt{n}} = 2.57 \times \frac{3}{\sqrt{100}} = 0.771$$

平均消费额的置信区间为 (**9.229**, **10.771**)



续解

要以**99%**的概率满足**10000**户居民对该种商品的需求，则最少要准备的量为

$$9.229 \times 10000 = 92290 \quad (\text{公斤})$$

最多准备

$$10.771 \times 10000 = 107710 \quad (\text{公斤})$$



正态总体均值已知，对方差的区间估计

如果总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ 已知， σ^2 未知

由 $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ 构造 χ^2 -统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

查 χ^2 -分布表，确定双侧分位数 $\chi_{1-\alpha/2}^2(n), \chi_{\alpha/2}^2(n)$

从而得 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)} \right)$$



例题 已知某种果树产量服从 $N(218, \sigma^2)$ ，随机抽取**6**棵计算其产量为（单位：公斤）

221, 191, 202, 205, 256, 236

试以**95%**的置信水平估计产量的方差。

解 计算 $\sum_{i=1}^6 (x_i - \mu)^2 = 2931$

查表 $\chi^2_{1-0.05/2}(6) = 1.24, \chi^2_{0.05/2}(6) = 14.45$

果树方差的置信区间为

$$\left(\frac{2931}{14.45}, \frac{2931}{1.24} \right) = (202.84, 2363.71)$$



正态总体均值未知，对方差的区间估计

如果总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 σ^2 未知

由 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 构造 χ^2 -统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

当置信水平为 $1-\alpha$ 时，由

$$P\left\{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

查 χ^2 -分布表，确定双侧分位数 $\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1), \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$

从而得 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right)$$



例4 设某灯泡的寿命 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， μ, σ^2 未知，现从中任取**5**个灯泡进行寿命试验，得数据**10.5, 11.0, 11.2, 12.5, 12.8**（单位：千小时），求置信水平为**90%**的 σ^2 的区间估计。

解 样本方差及均值分别为 $S^2 = 0.995$ $\bar{x} = 11.6$

由 $1 - \alpha = 0.9$ 得 $\alpha = 0.1$ 查表得

$$\chi^2_{0.05}(4) = 0.711 \quad \chi^2_{1-0.05}(4) = 9.488$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.05}(4)} = \frac{4 \times 0.995}{0.711} = 5.5977 \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.95}(4)} = 0.4195$$

σ^2 的置信区间为 (**0.4195, 5.5977**)



假设检验



引言

统计假设——通过实际观察或理论分析对总体分布形式或对总体分布形式中的某些参数作出某种假设。

假设检验——根据问题的要求提出假设，构造适当的统计量，按照样本提供的信息，以及一定的规则，对假设的正确性进行判断。

基本原则——小概率事件在一次试验中是不可能发生的。



基本概念

引例：已知某班《应用数学》的期末考试成绩服从正态分布。根据平时的学习情况及试卷的难易程度，估计平均成绩为**75**分，考试后随机抽样**5**位同学的试卷，得平均成绩为**72**分，试问所估计的**75**分是否正确？

“全班平均成绩是**75**分”，这就是一个假设

根据样本均值为**72**分，和已有的定理结论，对 **$EX=75$** 是否正确作出判断，这就是检验，对总体均值的检验。

表达：原假设： **$H_0: EX=75$** ；备择假设： **$H_1: EX \neq 75$**

判断结果：接受原假设，或拒绝原假设。

基本思想

参数的假设检验：已知总体的分布类型，对分布函数或密度函数中的某些参数提出假设，并检验。

基本原则——小概率事件在一次试验中是不可能发生的。

思想：如果原假设成立，那么某个**分布已知**的统计量在某个区域内取值的概率 α 应该较小，如果样本的观测数值落在这个小概率区域内，则原假设不正确，所以，拒绝原假设；否则，接受原假设。

拒绝域

检验水平



引例问题

原假设 $H_0: EX=75$; $H_1: EX \neq 75$

假定原假设正确，则 $X \sim N(75, \sigma^2)$ ，于是T统计量

$$T = \frac{\bar{X} - 75}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

拒绝域

可得 $P \left\{ \left| \frac{\bar{X} - 75}{S/\sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2} \right\} = \alpha$

检验水平

临界值

如果样本的观测值 $\left| \frac{\bar{x} - 75}{S/\sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}$ 则拒绝 H_0

基本步骤

- 1、提出原假设，确定备择假设；
- 2、构造分布已知的合适的统计量；
- 3、由给定的检验水平 α ，求出在 H_0 成立的条件下的临界值（上侧 α 分位数，或双侧 α 分位数）；
- 4、计算统计量的样本观测值，如果落在拒绝域内，则拒绝原假设，否则，接受原假设。



两种错误

第一类错误（弃真错误）——原假设 H_0 为真，而检验结果为拒绝 H_0 ；记其概率为 α ，即

$$P\{\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\} = \alpha \longrightarrow \text{检验水平}$$

第二类错误（受伪错误）——原假设 H_0 不符合实际，而检验结果为接受 H_0 ；记其概率为 β ，即

$$P\{\text{接受}H_0|H_0\text{为假}\} = \beta$$

希望：犯两类错误的概率越小越好，但样本容量一定的前提下，不可能同时降低 α 和 β 。

原则：保护原假设，即限制 α 的前提下，使 β 尽可能的小。

注意：“接受 H_0 ”，并不意味着 H_0 一定为真；“拒绝 H_0 ”也不意味着 H_0 一定不真。

单个正态总体方差已知的均值检验

U检验

问题：总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， σ^2 已知

假设 $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu \neq \mu_0$

双边检验

构造U统计量 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ H_0 为真的前提下

由 $P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq u_{\alpha/2}\right\} = \alpha$ 确定拒绝域 $|U| \geq u_{\alpha/2}$

如果统计量的观测值 $|U| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq u_{\alpha/2}$

则拒绝原假设；否则接受原假设



例1 由经验知某零件的重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， $\mu=15$ ， $\sigma=0.05$ ；技术革新后，抽出6个零件，测得重量为（单位：克）**14.7 15.1 14.8 15.0 15.2 14.6**，已知方差不变，试统计推断，平均重量是否仍为**15克**？
($\alpha=0.05$)

解 由题意可知：零件重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，且技术革新前后的方差不变 $\sigma^2=0.05^2$ ，要求对均值进行检验，采用**U**检验法。

假设 $H_0: \mu=15$; **$H_1: \mu \neq 15$**

构造**U**统计量，得**U**的**0.05**双侧分位数为

$$u_{0.025} = 1.96$$



例1 由经验知某零件的重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， $\mu=15$ ， $\sigma=0.05$ ；技术革新后，抽出6个零件，测得重量为（单位：克）**14.7 15.1 14.8 15.0 15.2 14.6**，已知方差不变，试统计推断，平均重量是否仍为**15克**？
($\alpha=0.05$)

解 而样本均值为 $\bar{x} = 14.9$

故**U**统计量的观测值为 $|U| = \left| \frac{\bar{x} - 15}{0.05/\sqrt{6}} \right| = 4.9$

因为**4.9 > 1.96**，即观测值落在拒绝域内
所以拒绝原假设。



单边检验

$$H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu > \mu_0$$

$$P \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq u_\alpha \right\} = \alpha \quad \text{拒绝域为} \quad U > u_\alpha$$

$$\text{或 } H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu < \mu_0$$

$$P \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq -u_\alpha \right\} = \alpha \quad \text{拒绝域为} \quad U < -u_\alpha$$

单个正态总体方差未知的均值检验

T检验

问题：总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， σ^2 未知

假设 $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu \neq \mu_0$

双边检验

构造T统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

由
$$P \left\{ \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1) \right\} = \alpha$$

确定拒绝域 $|T| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$

如果统计量的观测值 $|T| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$

则拒绝原假设；否则接受原假设

单边检验

$$H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu > \mu_0$$

拒绝域为

$$P \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha}(n-1) \right\} = \alpha \quad T > t_{\alpha}(n-1)$$

或 $H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu < \mu_0$

拒绝域为

$$P \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq -t_{\alpha}(n-1) \right\} = \alpha \quad T < -t_{\alpha}(n-1)$$

单个正态总体方差已知的均值检验

U检验

问题：总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， σ^2 已知

假设 $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu \neq \mu_0$

双边检验

构造U统计量 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ H_0 为真的前提下

由 $P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq u_{\alpha/2}\right\} = \alpha$ 确定拒绝域 $|U| \geq u_{\alpha/2}$

如果统计量的观测值 $|U| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq u_{\alpha/2}$

则拒绝原假设；否则接受原假设



单边检验

$$H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu > \mu_0$$

$$P \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq u_{\alpha} \right\} = \alpha \quad \text{拒绝域为} \quad U > u_{\alpha}$$

$$\text{或 } H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu < \mu_0$$

$$P \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq -u_{\alpha} \right\} = \alpha \quad \text{拒绝域为} \quad U < -u_{\alpha}$$

单个正态总体方差未知的均值检验

T检验

问题：总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， σ^2 未知

假设 $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu \neq \mu_0$

双边检验

构造T统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$$\text{由 } P \left\{ \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1) \right\} = \alpha$$

确定拒绝域 $|T| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$

如果统计量的观测值 $|T| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$

则拒绝原假设；否则接受原假设

单边检验

$$H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu > \mu_0$$

拒绝域为

$$P \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha}(n-1) \right\} = \alpha \quad T > t_{\alpha}(n-1)$$

或 $H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu < \mu_0$

拒绝域为

$$P \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq -t_{\alpha}(n-1) \right\} = \alpha \quad T < -t_{\alpha}(n-1)$$

单个正态总体均值已知的方差检验

χ^2 检验

问题：总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， μ 已知

假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2;$

构造 χ^2 统计量 $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$ 由

$$P\left\{\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right\} = \frac{\alpha}{2}, P\left\{\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right\} = \frac{\alpha}{2}$$

确定临界值 $\chi_{1-\alpha/2}^2(n), \chi_{\alpha/2}^2(n)$ 拒绝域

如果统计量的观测值 $\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n)$ 或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n)$

则拒绝原假设；否则接受原假设

一个正态总体均值未知的方差检验

χ^2 检验

问题：设总体 $\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， μ 未知

假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ； 双边检验

构造 χ^2 统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$ 由

$$P\left\{\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\right\} = \frac{\alpha}{2}, P\left\{\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\right\} = \frac{\alpha}{2}$$

确定临界值 $\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1), \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$

如果统计量的观测值

$$\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1) \quad \text{或} \quad \chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$$

则拒绝原假设；否则接受原假设

例4 某炼铁厂的铁水含碳量 X 在正常情况下服从正态分布，现对工艺进行了某些改进，从中抽取**5**炉铁水测得含碳量如下：**4.421, 4.052, 4.357, 4.287, 4.683**，据此是否可判断新工艺炼出的铁水含碳量的方差仍为 **0.108^2** （ $\alpha=0.05$ ）？

解 这是一个均值未知，正态总体的方差检验，
用 χ^2 检验法

假设 $H_0 : \sigma^2 = 0.108^2; H_1 : \sigma^2 \neq 0.108^2;$

由 $\alpha=0.05$ ，得临界值

$$\chi_{0.975}^2(4) = 0.048, \chi_{0.025}^2(4) = 11.14$$



例4 某炼铁厂的铁水含碳量 X 在正常情况下服从正态分布，现对工艺进行了某些改进，从中抽取**5**炉铁水测得含碳量如下：**4.421, 4.052, 4.357, 4.287, 4.683**，据此是否可判断新工艺炼出的铁水含碳量的方差仍为 **0.108^2** （ $\alpha=0.05$ ）？

解 χ^2 统计量的观测值为**17.8543**

因为 $17.8543 > 11.14$

所以拒绝原假设

即可判断新工艺炼出的铁水含碳量的方差不是 **0.108^2**



两个正态总体 的假设检验



单个正态总体方差已知的均值检验

U检验

问题：总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， σ^2 已知

假设 $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu \neq \mu_0$

双边检验

构造U统计量 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ H_0 为真的前提下

由 $P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq u_{\alpha/2}\right\} = \alpha$ 确定拒绝域 $|U| \geq u_{\alpha/2}$

如果统计量的观测值 $|U| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq u_{\alpha/2}$

则拒绝原假设；否则接受原假设



单边检验

$$H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu > \mu_0$$

$$P \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq u_\alpha \right\} = \alpha \quad \text{拒绝域为} \quad U > u_\alpha$$

$$\text{或 } H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu < \mu_0$$

$$P \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq -u_\alpha \right\} = \alpha \quad \text{拒绝域为} \quad U < -u_\alpha$$

单个正态总体方差未知的均值检验

T检验

问题：总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， σ^2 未知

假设 $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu \neq \mu_0$

双边检验

构造T统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

由
$$P \left\{ \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1) \right\} = \alpha$$

确定拒绝域 $|T| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$

如果统计量的观测值 $|T| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$

则拒绝原假设；否则接受原假设

单边检验

$$H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu > \mu_0$$

拒绝域为

$$P \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha}(n-1) \right\} = \alpha \quad T > t_{\alpha}(n-1)$$

或 $H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu < \mu_0$

拒绝域为

$$P \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq -t_{\alpha}(n-1) \right\} = \alpha \quad T < -t_{\alpha}(n-1)$$

单个正态总体均值已知的方差检验

χ^2 检验

问题：总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， μ 已知

假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2;$

构造 χ^2 统计量 $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$ 由

$$P\left\{\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right\} = \frac{\alpha}{2}, P\left\{\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right\} = \frac{\alpha}{2}$$

确定临界值 $\chi_{1-\alpha/2}^2(n), \chi_{\alpha/2}^2(n)$ 拒绝域

如果统计量的观测值 $\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n)$ 或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n)$

则拒绝原假设；否则接受原假设

一个正态总体均值未知的方差检验

χ^2 检验

问题：设总体 $\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， μ 未知

假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ； 双边检验

构造 χ^2 统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$ 由

$$P\left\{\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\right\} = \frac{\alpha}{2}, P\left\{\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\right\} = \frac{\alpha}{2}$$

确定临界值 $\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1), \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$

如果统计量的观测值

$$\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1) \quad \text{或} \quad \chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$$

则拒绝原假设；否则接受原假设

引言

有时，我们需要比较两总体的参数是否存在显著差异。比如，两个农作物品种的产量，两种电子元件的使用寿命，两种加工工艺对产品质量的影响，两地区的气候差异等等。



两个正态总体的均值检验

1、方差已知，检验均值相等

问题： $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

已知 σ_X^2, σ_Y^2 ，检验 $H_0: \mu_X = \mu_Y$

设 $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 是 X 的一个样本， $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 是 Y 的一个样本，

则 $\bar{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n_1}\right)$, $\bar{Y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n_2}\right)$

所以， $\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n_1} + \frac{\sigma_Y^2}{n_2}\right)$



两个正态总体的均值检验

U检验法

1、方差已知，检验均值相等

问题： $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

已知 σ_X^2, σ_Y^2 ，检验 $H_0: \mu_X = \mu_Y$

从而，当 H_0 成立时， $U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\sigma_X^2/n_1 + \sigma_Y^2/n_2}} \sim N(0,1)$

对给定的检验水平 α ，得 H_0 的拒绝域：

$$\left| \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\sigma_X^2/n_1 + \sigma_Y^2/n_2}} \right| > u_{\alpha/2}$$

U 双侧检验

例1 据以往资料，已知某品种小麦每4平方米产量（千克）的方差为 $\sigma^2 = 0.2$ 。今在一块地上用A、B两法试验，A法设12个样本点，得平均产量 $\bar{x} = 1.5$ ；B法设8个样本点，得平均产量 $\bar{y} = 1.6$ ，试比较A、B两法的平均产量是否有统计意义。（ $\alpha = 0.05$ ）

解 假设： $H_0 : \mu_X = \mu_Y$, $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$

因为：

$$\left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma^2/n_1 + \sigma^2/n_2}} \right| = \left| \frac{1.5 - 1.6}{\sqrt{0.2/12 + 0.2/8}} \right| \approx 0.49 < 1.96 = u_{0.025}$$

所以接受 H_0 假设，即认为 A、B两法的平均产量无统计意义。

两个正态总体的均值检验

2、方差未知，但两个总体的方差相等，检验均值相等

问题： $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

未知 σ_X^2, σ_Y^2 ，但知 $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ ，检验 $H_0: \mu_X = \mu_Y$

设 $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 是 X 的一个样本， $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 是 Y 的一个样本，

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2(n_1 - 1) + S_Y^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$



两个正态总体的均值检验

T检验法

2、方差未知，但两个总体的方差相等，检验均值相等

若 H_0 成立，则

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2 (n_1 - 1) + S_Y^2 (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

对给定的检验水平 α ，得 H_0 的拒绝域：

$$|T| = \left| \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2 (n_1 - 1) + S_Y^2 (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$$

T 双侧检验

例2 有两种灯泡，一种用 A 型灯丝，另一种用 B 型灯丝。随机抽取两种灯泡各10 只做试验，测得它们的寿命（小时）为：

A 型：1293 1380 1614 1497 1340 1643 1466 1677 1387 1711

B 型：1061 1065 1092 1017 1021 1138 1143 1094 1028 1119

设两种灯泡的寿命均服从正态分布且方差相等，试检验两种灯泡的平均寿命之间是否存在显著差异？（ $\alpha = 0.05$ ）

解 假设： $H_0 : \mu_X = \mu_Y$, $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$

$$\bar{x} = 1500.8, \quad \bar{y} = 1077.8 \quad s_X^2 = 151.3^2, \quad s_Y^2 = 47.0^2$$

因
$$\left| \frac{1500.8 - 1077.8}{\sqrt{\frac{151.3^2 \times 9 + 47.0^2 \times 9}{18}} \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} \right| \approx 8.45 > 2.101 = t_{0.025}(18)$$

所以**拒绝 H_0 假设**，即认为 A、B两种灯泡的**平均寿命**
有统计意义。

两个正态总体的方差检验

F检验

问题: $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

未知 μ_X, μ_Y , 检验假设 $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

$$F = \frac{S_X^2 / \sigma_X^2}{S_Y^2 / \sigma_Y^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

若假设 H_0 成立, 则 $F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

对给定的检验水平 α , 得 H_0 的拒绝域:

$$F < F_{1-(\alpha/2)}(n_1 - 1, n_2 - 1) \quad \text{及} \quad F > F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

F 双侧检验

例3 P_{161} 14 对甲、乙两种玉米进行评比试验，得如下产量资料：

甲： 951 966 1008 1082 983

乙： 730 864 742 774 990

问这两种玉米的产量差异有没有统计意义？（ $\alpha = 0.05$ ）

解 先对方差作检验： $H_{10} : \sigma_1 = \sigma_2$, $H_{11} : \sigma_1 \neq \sigma_2$

$$\bar{x} = 998.0, \quad s_1^2 = 51.5^2; \quad \bar{y} = 820.0, \quad s_2^2 = 108.6^2$$

$$F_{0.975}(4, 4) = 0.104 \quad F_{0.025}(4, 4) = 9.604$$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{51.5^2}{108.6^2} \approx 0.689$$

因为 $0.104 < 0.689 < 9.604$

所以可认为甲、乙两种玉米的方差没有显著差异

即可认为 $\sigma_1 = \sigma_2$



例4 对甲、乙两种玉米进行评比试验，得如下产量资料

甲：951 966 1008 1082 983

乙：730 864 742 774 990

问这两种玉米的产量差异有没有统计意义？（ $\alpha = 0.05$ ）

解： 再对均值作检验： $H_{20} : \mu_1 = \mu_2$, $H_{21} : \mu_1 \neq \mu_2$

$$\bar{x} = 998.0, \quad s_1^2 = 51.5^2; \quad \bar{y} = 820.0, \quad s_2^2 = 108.6^2$$

因为已假设方差相等，故用 **T** 检验。

$$\text{由 } |T| = \left| \frac{998 - 820}{\sqrt{\frac{51.5^2 \times 4 + 108.6^2 \times 4}{8}} \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}} \right| \approx 3.31 > 2.306 = t_{0.025}(8)$$

所以拒绝原假设 H_{20} ，即认为两种玉米的产量差异有统计意义。