习题（A）

1.选择题

（1）n 阶方阵 A 与 B 相似的充分条件是（　）

（A）$|A|=|B|$；（B）$R(A)=R(B)$；（C）$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$；（D）A 与 B 有相同的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，且$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$两两不等。

（2）若 A 与 B 相似，则下列结论不正确的是（　　）

（A）A 和 B 有相同的特征多项式；（B）$|A|=|B|$；（C）A 与 B 有相同的特征值和特征向量；

（D）$tr(A)=tr(B)$

（3）设 A 为 n 阶实对称矩阵，P 为 n 阶可逆矩阵，已知 n 维列向量α是 A 的属于特征值λ的特征向量，则矩阵$(P^{-1}AP)^T$属于特征值λ的特征向量是（　　）

(A) $P^{-1}\alpha$;(B) $P^T\alpha$;（C）$P\alpha$;（D）$(P^{-1})^T\alpha$

2.判断下列结论的正误，并给出理由。

（1）若对某个向量x有$Ax=\lambda x$，则λ是 A 的特征值。

（2）矩阵 A 不可逆的充要条件是零是 A 的特征值。

（3）数 c 是 A 的特征值的充要条件是$(cE-A)x=0$有非零解。

（4）若存在数λ使$Ax=\lambda x$成立，那么x是 A 的特征向量。

（5）若p_1,p_2是线性无关的特征向量，则它们是对应于不同特征值的特征向量。

（6）A 的行列式值等于其对角线上元素的乘积。

3.填空题

（1）设A满足$A^2-4A+4E=0$，则A的特征值是____________，A^{-1}的特征值是____。

（2）已知 3 阶方阵A的特征值为 1，-1，2，则$3A^2-2A-2E$的特征值为____________.

（3）已知 3 阶方阵A的特征值为 1,2,3，求$|A^3-5A^2+7A|$=__________________.

（4）若$A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，则$A$的特征值为________，$|A|=$_____，$R(A)=$____，$tr(A)=$_____。

（5）设 A 是 3 阶实对称矩阵，若$A^2=A$，且$R(A)=2$，则 A 的特征值是________.

（6）若 A 是 3 阶方阵，且矩阵 A 的各行元素之和是 5，则矩阵 A 必有特征向量________，且对应的特征值为________.

4.求下列矩阵的特征值和特征向量

（1）$A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$；（2）$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$；（3）$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$；（4）$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix}$。

5.设数列$\{u_n\},\{v_n\}$满足：

$$\begin{cases}u_n=2u_{n-1}-3v_{n-1}\\ v_n=\dfrac{1}{2}u_{n-1}-\dfrac{1}{2}v_{n-1}\end{cases}$$

且$u_0=1,v_0=0$，求$\{u_n\}$的通项u_n及$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$。

6.设向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，满足$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=0,$且$a_1b_1\neq 0$，记$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，

求（1）A^2；（2）矩阵A的特征值和特征向量。

7.设A,B均为n阶方阵，证明AB与BA有相同的特征值。

8.不计算，求$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$的一个特征值，并验证其结果。

9.（2005 数四）设A为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的 3 维列向量，且满足

$A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$A\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$A\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，

（1）求矩阵B使得$A(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)B$；

（2）求矩阵A的特征值；

（3）求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵。

10.设 n 阶矩阵$A=\begin{pmatrix}1&b&\cdots&b\\b&1&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b&b&\cdots&1\end{pmatrix}$，

（1）求 A 的特征值和特征向量；

（2）求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角阵。

11.设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}$可相似对角化，求$x$。

12.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}5 & & \\ & -4 & \\ & & y\end{pmatrix}$ 相似，

（1）求 x,y；

（2）求一个正交阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。

13.已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$，求 A^n。

14. 设 $\begin{cases}x_n=x_{n-1}+2y_{n-1}\\ y_n=4x_{n-1}+3y_{n-1}\end{cases}$，且 $x_0=2,y_0=1$，求 x_{100}。

15.设 3 阶矩阵 A 满足 $A\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$，其中列向量

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-1,2)^T$，试求矩阵 A。

16.设 3 阶对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$，对应 λ_1,λ_2 的特征向量依次为

$p_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$，求 A

17.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^*P$，求 $B+2E$ 的特征值与特征向量。

18.设 A,B 是同阶方阵，（1）如果 A,B 相似，证明 A,B 的特征多项式相同；（2）举一个 2 阶方阵的例子说明（1）的逆命题不成立；（3）当 A,B 均为实对称矩阵时，试证（1）的逆命题成立。

习题（B）

1、选择题

（1）（2012 数一）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$，

$P=(p_1,p_2,p_3)$，$Q=(p_1+p_2,p_2,p_3)$，则 $Q^{-1}AQ=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$。

（2）（2010 数一）设 A 为 4 阶对称矩阵，且 $A^2+A=0$，若 A 的秩为 3，则 A 相似于（　）

（A）$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$；

（3）(2008 数一)设 A 为 3 阶实对称矩阵，如果二次曲面方程 $(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=1$ 在正交变换下得标准方程的图形如图则 A 的正特征值的个数为：

（A）0；（B）1；（C）2；（D）3

（4）（2007 数一）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 A 与 B（　）

(A) 合同且相似；（B）合同但不相似；（C）不合同但相似；（D）既不合同也不相似。

（5）设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1,α_2，则 $\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是（　）

（A）$\lambda_1\neq 0$；（B）$\lambda_2\neq 0$；（C）$\lambda_1=0$；（D）$\lambda_2=0$

2.填空题

（1）设 A 是 3 阶矩阵，且 $|A|=|2A+E|=|A-E|=0$，则 $|A-5E|=$ ______。

（2）设 A 是 3 阶矩阵，已知 A^{-1} 的特征值为 1,2,3，A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$ ______。

（3）已知 x 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $P^{-1}AP$ 对应特征值 λ 的特征向量为 ______.

（4）已知 $A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$，则 $R(A-E)+R(A-2E)=$ ______ 。

（5）已知 $A=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & x & 1 \end{pmatrix} \sim B=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$，则 $x=$ ______ 。

（6）设 A 是 n 阶矩阵，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 n 个线性无关的 n 维列向量，且满足 $Ap_i=p_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $A=$ _____ 。

（7）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ 只有一个线性无关的特征向量，则 $a=$ _____ 。

（8）设 A 是 n 阶矩阵，$|A|=2$，若矩阵 $A+E$ 不可逆，则矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 必有特征值________.

（9）设 A 是 3 阶方阵，且矩阵 A 的各列元素之和是 2，则 A 必有特征值_______.

（10）（2008，数一）设 A 为 2 阶方阵，α_1,α_2 为线性无关的 2 维列向量，$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 A 的非零特征值为______.

3.（2011 数一）设 A 为 3 阶实对称矩阵，A 的秩为 2，且 $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，求（1）$A$ 的特征值与特征向量；（2）矩阵 A 。

4.（2009 数一）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

（1）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

（2）若二次型 f 的规范型为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值。

5.（2007 数一）设三阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，$\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量，记 $B=A^5-4A^3+E$，其中 E 为 3 阶单位阵，

（I）验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值的特征向量。

（ii）求矩阵 B 。

6.已知 $p=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量

（1）求参数 a,b 的值及特征向量 p 所对应的特征值

（2）讨论 A 是否能相似对角化？并说明理由。

7.已知 A 是 3 阶实对称矩阵，特征值是 3，-6，0，$\lambda=3$ 的特征向量是 $\alpha_1=(1,a,1)^T$，$\lambda=-6$ 的特征向量是 $\alpha_2=(a,a+1,1)^T$，求矩阵 A。

8.设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$a_1\neq0$，$A=\alpha\alpha^T$

（1）证明 $\lambda=0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征值；

（2）求 A 得非零特征值及 n 个线性无关的特征向量。

9.设 3 阶对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=3$，与特征值 $\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $p_1=(1,1,1)^T$，求 A。

10.设 $A=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}$，求 A^{100}。

11.（2000）某实验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐，新，老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工，设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n，记成向量 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$。

（1）求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 的关系式，并写成矩阵形式 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$；

（2）验证 $\eta_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

（3）当 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 时，求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$。

12.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征项链，且 $\lambda=2$ 时 A 的二重特征值，试求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

13.(2006)设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解。

（1）求 A 的特征值和特征向量。

（2）正交阵 Q 和对角阵 Λ，使得 $Q^TAQ=\Lambda$。

14.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$ 可逆，向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\ b\\ 1\end{pmatrix}$ 是矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的一个特征向量，λ 是 α 对应的特征值，试求 a,b 和 λ 的值。

15.若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & a\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$ 相似于对角阵 Λ，试确定常数 a 的值，并求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$。

例 6　设某城市共有 30 万人从事农、工、商各行业的工作，假定这个总人数在若干年内保持不变，而社会调查表明：

（1）在这 30 万就业人员中，目前约有 15 万人从事农业，9 万人从事工业，而有 6 万人经商。

（2）在从农人员中，每年约有 20%改为从工，10%改为经商。

（3）在丛工人员中，每年约有 20%改为从农，10%改为经商。

（4）在经商人员中，每年约有 10%改为从农，10%改为从工。

现欲预测一、二年后从事各业人员的人数，以及经过多年之后，从事各业人员总数之发展趋势。