第八章 导数与微分

- 8.1 不定积分概念与基本积分公式
- 8.2 换元积分法和分部积分法
- 8.3 有理函数和可化为有理函数的不定积分

8.1 导数的概念

- 一、原函数
- 二、不定积分
- 三、基本积分表

一、原函数

微分运算的逆运算是由已知函数 $f(x)$, 求函数$F(x)$, 使

$$F'(x) = f(x).$$

例如　已知速度函数 $v(t)$, 求路程函数 $s(t)$. 即求 $s(t)$, 使 $s'(t) = v(t)$.

又如, 已知曲线在每一点处的切线斜率 $k(x)$, 求 $f(x)$, 使 $y = f(x)$ 的图象正是该曲线, 即使得

$$f'(x) = k(x).$$

定义1 设函数 f 与 F 在区间 I 上都有定义, 若

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I,$$

则称 f 为 F 在区间 I 上的一个原函数.

例1 (i) 路程函数 $s(t)$ 是速度函数 $v(t)$ 的一个原函数:

$$s'(t) = v(t).$$

(ii) $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数:

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

(iii) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 的一个原函数:

$$\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(iv) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)$ 是 $\sqrt{1-x^2}$ 的一个原函数:

$$\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)\right]' = \sqrt{1-x^2}.$$

从(iii) (iv)可以看出, 尽管象

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ 和 } \sqrt{1-x^2}$$

定理8.1 (原函数存在性定理)

若函数 f 在区间 I 上连续, 则 f 在 I 上存在原函数 F, 即 $F'(x) = f(x)$.

定理8.2 (原函数族的结构性定理)

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 则

(i) $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 在 I 上的原函数, 其中 C 为任意常数.

(ii) $f(x)$ 在 I 上的任意两个原函数之间, 只可能相差一个常数.

二、不定积分

定义2 函数 f 在区间 I 上的全体原函数称为 f 在 I 上的不定积分, 记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x \ ,$$

其中称 x 为积分变量, $f(x)$ 为被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 为积分表达式, $\int$ 为积分号.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则由定理 8.2,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = \{\, F(x)+C \mid C \in \mathbf{R} \,\}.$$

为方便起见, 我们记 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$. 其中 C 为任意常数.

由此, 从例 1(ii) (iii) (iv)可得:

$$\int x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

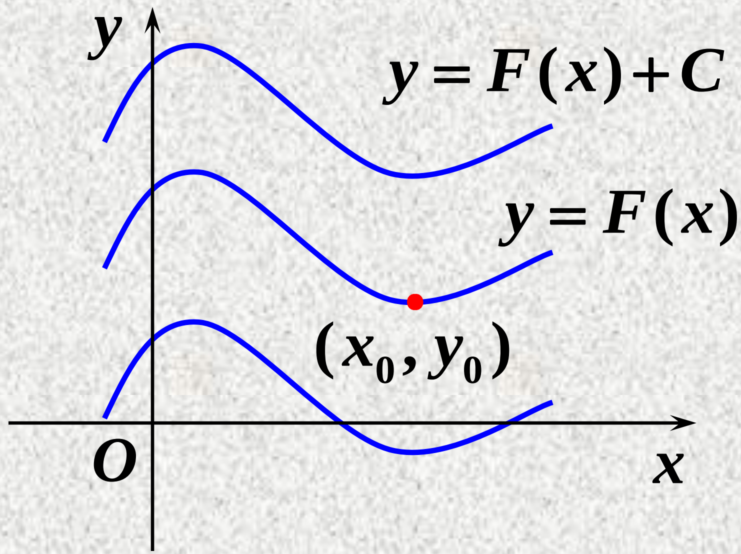
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C,$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C.$$

三、不定积分的几何意义

若$F(x)$是$f(x)$ 的一个原函数, 则称 $y=F(x)$ 的图像是$f(x)$ 的一条积分曲线.

所有的积分曲线都是由其中一条积分曲线沿纵轴方向平移而得到的.



满足条件 $F(x_0)=y_0$ 的原函数正是在积分曲线中通过点(x_0, y_0)的那一条积分曲线.

例如, 质点以匀速 v_0 运动时, 其路程函数

$$s(t)=\int v_0\,\mathrm{d}t = v_0 t + C.$$

若 t_0 时刻质点在 s_0 处, 且速度为 v_0, 则有

$$s(t)=v_0(t-t_0)+s_0 .$$

四、基本积分表

由基本求导公式可得以下基本积分公式:

1. $\int 0\mathrm{d}x = C.$

2. $\int 1\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C.$

3. $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1, x > 0).$

4. $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$

5. $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C.$

6. $\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C.$

$$7.\ \int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

$$8.\ \int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

$$9.\ \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C.$$

$$10.\ \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C.$$

$$11.\ \int \sec x \cdot \tan x\,dx = \sec x + C.$$

$$12.\ \int \csc x \cdot \cot x\,dx = -\csc x + C.$$

$$13.\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$$

$$14.\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C.$$

由导数线性运算法则可得到不定积分的线性运算法则.

定理 8.3 (不定积分的线性运算法则)

若函数 f 与 g 在区间 I 上都存在原函数, k_1, k_2为任意常数, 则 $k_1 f + k_2 g$ 在 I上也存在原函数, 且

$$\int (k_1 f(x) + k_2 g(x))\,\mathrm{d}x = k_1 \int f(x)\,\mathrm{d}x + k_2 \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

例1 $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$, 则

$$\int p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 + a_n x + C.$$

例2 $$\int\frac{x^4+1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int(x^2-1+\frac{2}{x^2+1})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}x^3-x+2\arctan x+C.$$

例3 $$\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\tan x-x+C.$$

例4 $$\int(10^x-10^{-x})^2\mathrm{d}x=\int(10^{2x}+10^{-2x}-2)\mathrm{d}x$$

$$=\int[(10^2)^x+(10^{-2})^x-2]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\ln 10}(10^{2x}-10^{-2x})-2x+C.$$

8.2 导数的概念

- 一、换元积分法
- 二、分部积分法

一、第一换元积分法

定理8.4 (第一换元积分法)

设 $g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有定义，且 $\int g(u)\mathrm{d}u = G(u)+C$.

又 $u=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\alpha\le\varphi(x)\le\beta,\ x\in[a,b]$.

则 $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int g(u)\mathrm{d}u$

$$= G(u)+C = G(\varphi(x))+C. \quad (1)$$

证 因为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(\varphi(x)) = G'(\varphi(x))\varphi'(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)$.

所以(1)式成立.

第一换元积分法亦称为凑微分法, 即

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int g(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = G(\varphi(x)) + C,$$

其中 $G'(u) = g(u)$. 常见的凑微分形式有

(1) $a\mathrm{d}x = \mathrm{d}(ax)$; (2) $\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x+a)$;

(3) $x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha+1}\mathrm{d}(x^{\alpha+1})$; (4) $\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$;

(5) $\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(-\cos x)$; (6) $\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\ln|x|)$;

(7) $\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$; (8) $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}(\arctan x)$.

例1 求$\int \frac{dx}{a^2+x^2} \quad (a>0)$.

解

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\arctan u + C$$

$$= \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C.$$

例2 求$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}\quad(a\neq 0).$

解

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2a}\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{\mathrm{d}(x+a)}{x+a}$$

$$=\frac{1}{2a}\ln|x-a|-\frac{1}{2a}\ln|x+a|$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

例3 求 $\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(x^2)$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(1-x^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

例4 求$\int \sec x \mathrm{d}x$.

解（解法一）$\int \sec x \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x}$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C.$$

(解法二) $\int \sec x \mathrm{d}x = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

二、第二换元积分法

定理8.5 (第二换元积分法)

若 $g(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有定义, $u=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $\varphi'(x)\neq 0$, 且 $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$,

则
$$\int g(u)\mathrm{d}u = F(\varphi^{-1}(u))+C. \tag{2}$$

证 在 $\varphi'(x)\neq 0$ 的条件下, 必有 $\varphi'(x)>0$, $x\in[a,b]$ 或 $\varphi'(x)<0$, $x\in[a,b]$. 因此 $u=\varphi(x)$ 是严格单调函数, 从而 $u=\varphi(x)$ 存在反函数 $x=\varphi^{-1}(u)$, 且

$$\frac{dx}{du}=\frac{1}{\varphi'(x)}\bigg|_{x=\varphi^{-1}(u)}.$$

于是 $\frac{d}{dx}F(\varphi^{-1}(u))=F'(x)\cdot\frac{1}{\varphi'(x)}$

$$=g(\varphi(x))\varphi'(x)\cdot\frac{1}{\varphi'(x)}=g(u),$$

所以(2)式成立.

第二类换元积分法常用在 $f(a^2-x^2)$, $f(a^2+x^2)$, $f(x^2-a^2)$ 等类型的不定积分上, 对此可分别设

$$x=a\sin t,\ x=a\tan t,\ x=a\sec t.$$

例5 求$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解 设 $x=a\sin t, |t|<\dfrac{\pi}{2}$,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int a\cos t\,\mathrm{d}(a\sin t)$$

$$=a^2\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C.$$

例6 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}\ (a>0)$.

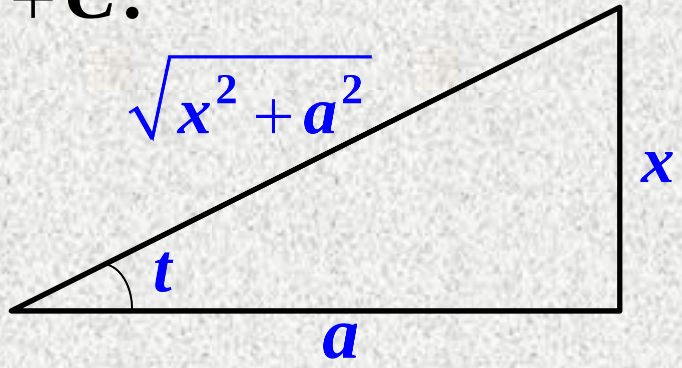
解 设 $x = a\tan t, |t| < \frac{\pi}{2}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a\sec^2 t\mathrm{d}t}{a\sec t}$$

$$= \int \sec t\mathrm{d}t = \ln|\sec t + \tan t| + C$$

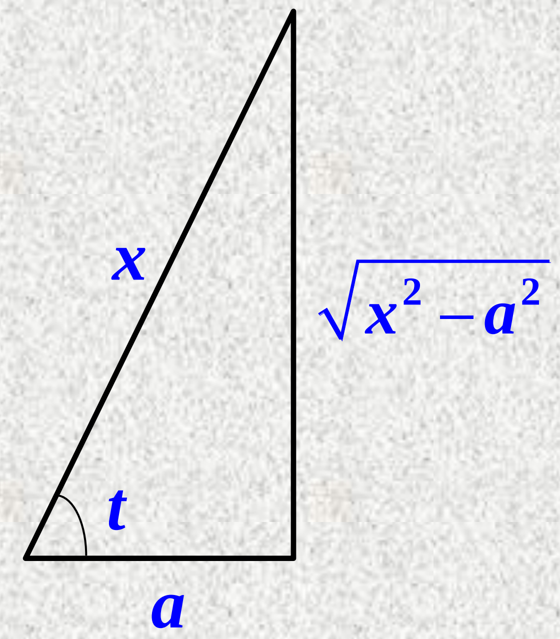
$$= \ln(\sqrt{a^2+x^2} + x) + C.$$

这里可借助辅助直角三角形, 求出 $\sec t$, $\tan t$.



例7 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a>0).$

解 设 $x = a\sec t,\ 0 < t < \frac{\pi}{2},$



$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec t \cdot \tan t}{a\tan t}\,dt$$

$$= \int \sec t\,dt \quad = \ln|\sec t + \tan t| + C$$

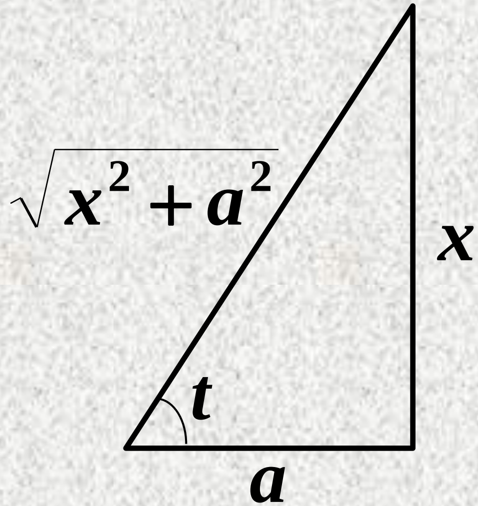
$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C_1,$$

其中 $\sec t$ 和 $\tan t$ 可借助辅助直角三角形求出.

例8 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} \quad (a>0)$.

解 $x = a\tan t, \quad |t| < \frac{\pi}{2}$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \int \frac{a\sec^2 t}{a^4\sec^4 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\mathrm{d}t$$



$$= \frac{1}{2a^3}\int (1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cos t) + C$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left(\arctan\frac{x}{a} + \frac{ax}{x^2+a^2}\right) + C.$$

三、分部积分法

定理8.6（分部积分法）

若$u(x)$与$v(x)$可导, 不定积分$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$存在,

则$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 也存在, 且

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

证　由$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$　或

$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$, 两边积分, 得

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

1. 降幂法

在求 $x^n\sin x$, $x^n\cos x$, $x^n e^x$ 等类型函数的不定积分时, 可用分部积分法使 x^n 逐次降幂.

例9 求 $\int x^2\cos x\mathrm{d}x$.

解 $$\int x^2\cos x\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}\sin x = x^2\sin x - 2\int x\sin x\mathrm{d}x$$

$$= x^2\sin x + 2\int x\mathrm{d}\cos x$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\mathrm{d}x$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

2. 升幂法

求 $x^n\arctan x$, $x^n\ln x$, $x^n\arcsin x$等类型函数的不定积分时, 需要使用升幂法.

例10 $\int x^3\ln x\mathrm{d}x$.

解 $\int x^3\ln x\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right)=\frac{1}{4}(x^4\ln x-\int x^3\mathrm{d}x)$

$$=\frac{x^4}{16}(4\ln x-1)+C.$$

注 通过对 x^n 的升幂和 $\ln x$ 的求导, 化解了难点.

3. 循环法

求 $e^x \sin x$, $e^x \cos x$ 类型的函数的不定积分时, 用分部积分法两次, 循环得到含未知不定积分的方程, 解出方程加上常数 C 即可得不定积分.

例11 求 $I_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx$ 和 $I_2 = \int e^{ax} \sin bx \, dx$.

解 $I_1 = \dfrac{1}{a} \int \cos bx \, d(e^{ax})$

$$= \frac{1}{a}\left(e^{ax} \cos bx + b \int e^{ax} \sin bx \, dx\right)$$

$$= \frac{1}{a}\left(e^{ax} \cos bx + b I_2\right), \tag{3}$$

$$I_2 = \frac{1}{a}\int \sin bx \ \mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax}) = \frac{1}{a}(\mathrm{e}^{ax}\sin bx - b\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x)$$

$$= \frac{1}{a}(\mathrm{e}^{ax}\sin bx - bI_1). \tag{4}$$

(4)式代入(3)式, 得

$$I_1 = \frac{1}{a}[\ \mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}(\mathrm{e}^{ax}\sin bx - bI_1)\ ].$$

整理后得到

$$I_1 = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2 + b^2}\mathrm{e}^{ax} + C.$$

同理

$$I_2 = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2}\mathrm{e}^{ax} + C.$$

I_1 的另一种求法是:

$$I_1 = \frac{1}{a}(e^{ax}\cos bx + b\int e^{ax}\sin bx \ dx)$$

$$= \frac{1}{a}(e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int \sin bx \ de^{ax})$$

$$= \frac{1}{a}(e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a}\int e^{ax}\cos bx dx)$$

$$= \frac{1}{a}(e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a}I_1)$$

所以 $I_1 = \dfrac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$ I_2 的求法类似.

4. 递推法

例12 求不定积分$I_n = \int \cos^n x\mathrm{d}x.$

解 $I_1 = \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C.$

$$I_n = \int \cos^n x\mathrm{d}x = \int \cos^{n-1} x\mathrm{d}\sin x$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} \sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2}(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\mathrm{d}x$$

$$-(n-1)\int \cos^n x\mathrm{d}x,$$

由此解出

$$I_n = \begin{cases} \sin x + C, & n = 1, \\ \dfrac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \dfrac{n-1}{n} I_{n-1}, & n = 2, 3, \cdots . \end{cases}$$

8.3 导数的概念

- 一、有理函数的不定积分
- 二、三角函数有理式的不定积分
- 三、某些无理根式的不定积分

一、有理函数的部分分式分解

有理函数是由两个多项式函数的商所表示的函数，

其一般形式为:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\alpha_0 x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\cdots+\alpha_n}{\beta_0 x^m+\beta_1 x^{m-1}+\cdots+\beta_m}$$

$$(\alpha_0\neq 0,\beta_0\neq 0),$$

$m>n$ 时称为真分式，$m\leq n$ 时称为假分式.

假分式可化为一个多项式和一个真分式之和.

真分式又可化为 $\dfrac{A_i}{(x-a)^i}$ 与 $\dfrac{B_i x + C_i}{(x^2+px+q)^2}$ 之和, 其分解步骤称为部分分式分解. 具体步骤简述如下:

1. 对分母 $Q(x)$ 在实数系内作标准分解:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\lambda_1}\cdots(x-a_s)^{\lambda_s}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t},$$

其中 $\lambda_i,\mu_j\in\mathrm{N}_+$, 且 $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i+2\sum_{j=1}^{t}\mu_j=m$,

$$p_j^2-4q_j<0,\ j=1,2,\cdots,t.$$

2. 根据分母各个因式分别写出与之相应的部分分式. 对应于 $(x-a)^k$ 的部分分式是

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

对应于 $(x^2+px+q)^k$的部分分式是

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k},$$

把所有部分分式加起来,使之等于 $Q(x)$, 由此确定

上述部分分式中的待定系数 A_i , B_i, C_i .

3. 确定待定系数的方法

把所有分式通分相加, 所得分式的分子与原分子 $P(x)$ 应该相等. 根据两个多项式相等时同次项系数必定相等的原则，得到待定系数所满足的线性方程组, 由此解出待定系数.

例1 对 $R(x)=\dfrac{2x^4-x^3+4x^2+9x-10}{x^5+x^4-5x^3-2x^2+4x-8}$ 作部分分式分解.

二、有理真分式的递推公式

任何有理真分式的不定积分都可化为如下两种形式的不定积分之和：

$$\text{(i)}\ \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k};\qquad \text{(ii)}\ \int \frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x\quad (p^2-4q<0).$$

下面解这两类积分.

$$\text{(i)}\ \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k}=\begin{cases}\ln|x-a|+C, & k=1,\\[2ex] \dfrac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C, & k>1.\end{cases}$$

(ii) 令 $t = x + \dfrac{p}{2}$, $r^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$, $N = M - \dfrac{pL}{2}$, 则

$$\int \frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x = \int \frac{Lt+N}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t$$

$$= L\int \frac{t}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t + N\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^k}.$$

$k=1$ 时,

$$\int \frac{t}{t^2+r^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(t^2+r^2)+C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+r^2} = \frac{1}{r}\arctan\frac{t}{r}+C.$$

$k \geq 2$时,

$$\int \frac{t}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2+r^2)}{(t^2+r^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)(t^2+r^2)^{k-1}} + C.$$

记 $I_k = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^k}$,则

$$I_k = \frac{1}{r^2}\int \frac{(t^2+r^2)-t^2}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{r^2} I_{k-1} - \frac{1}{r^2}\int \frac{t^2}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{r^2} I_{k-1} + \frac{1}{2r^2(k-1)} \int t \mathrm{d}\left(\frac{1}{(t^2 + r^2)^{k-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{r^2} I_{k-1} + \frac{1}{2r^2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2 + r^2)^{k-1}} - I_{k-1} \right].$$

解得

$$I_k = \frac{t}{2r^2(k-1)(t^2 + r^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2r^2(k-1)} I_{k-1},$$

$$k = 2, 3, \cdots.$$

例2 求 $I=\int \frac{2x^4-x^3+4x^2+9x-10}{x^5+x^4-5x^3-2x^2+4x-8}\mathrm{d}x.$

解 由例1,

$$\int \frac{2x^4-x^3+4x^2+9x-10}{x^5+x^4-5x^3-2x^2+4x-8}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2}+\int \frac{2\mathrm{d}x}{x+2}-\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2}-\int \frac{(x-1)\mathrm{d}x}{x^2-x+1}.$$

其中

$$\int \frac{(x-1)\mathrm{d}x}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2-x+1)}{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

于是

$$I=\ln|x-2|+\ln|x+2|+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

三、三角函数有理式的不定积分

$\sin x$, $\cos x$ 及常数经过有限次四则运算得到的函数 $R(\sin x, \cos x)$ 称为三角函数有理式.

通过变换 $t=\tan\frac{x}{2}$, 可把 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 化为有理函数的不定积分. 把

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}(2\arctan t) = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

代入原积分式，得到

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

例3 求 $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

解 令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$=\int \frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|+C=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

例4 求 $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2\cos x}\mathrm{d}x.$

解 由于 $\displaystyle\frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2\cos x} = \frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x + 2\cos x}$ 满足情形 (i),

因此可设 $t = \cos x$, 则

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2\cos x}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x + 2\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int \frac{-\cos x}{1 + 2\cos x - \cos^2 x}\mathrm{d}\cos x = -2\int \frac{t\mathrm{d}t}{1 + 2t - t^2}$$

$$= \int \frac{-2t+2-2}{1+2t-t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(1+2t-t^2)}{1+2t-t^2} - \int \frac{2\mathrm{d}t}{2-(t-1)^2}$$

$$= \ln\left|1+2t-t^2\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1-t}{\sqrt{2}-1+t}\right| + C$$

$$= \ln\left|1+2\cos x-\cos^2 x\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1-\cos x}{\sqrt{2}-1+\cos x}\right| + C.$$

四、某些无理函数的不定积分

1. $\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 型不定积分 $(ad-bc\neq 0)$

令 $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$，可化为有理函数的积分.

例5 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$.

解 由于

$$\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}=(x+2)\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2},$$

因此令 $t=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}}$,则 $x=\dfrac{1+2t^3}{1-t^3}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{9t^2}{(1-t^3)^2}\mathrm{d}t.$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}=\int\frac{3}{1-t^3}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{t+2}{1+t+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\ln|1-t|+\frac{1}{2}\int\frac{1+2t}{1+t+t^2}\mathrm{d}t+\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=-\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln(1+t+t^2)+\sqrt{3}\arctan\frac{1+2t}{\sqrt{3}}+C$$

$$=-\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-1}\right|$$

$$+\sqrt{3}\arctan^2\left(\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{3}\ \sqrt[3]{x+2}}\right)+C.$$

2. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 型不定积分

可用多种方法化为三角函数有理式的不定积分，有时也可直接化为有理函数的不定积分.

方法1 由于$ax^2+bx+c=a\left[(x+\dfrac{b}{2a})^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$,

若记 $u=x+\dfrac{b}{2a}$, $k^2=\left|\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right|$, 则 ax^2+bx+c 化为

(i) $|a|(u^2+k^2)$, 或 (ii) $|a|(u^2-k^2)$, 或 (iii) $|a|(k^2-u^2)$.

因此可分别设

(i′) $u = k\tan t$;　(ii′) $u = k\sec t$;　(iii′) $u = k\sin t$.

把它们转化为三角函数有理式的不定积分.

方法2 (欧拉变换)

(a) 若$a > 0$,令$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x$;

(b) 若$c > 0$,令$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$;

(c) 若 $ax^2 + bx + c$ 有两个不同实根 λ, μ, 令

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda).$$

例6 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-2x-3}}$.

解 用方法 1:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-1)^2-4}} \xlongequal{x=u+1} \int \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)\sqrt{u^2-4}}$$

$$\xlongequal{u=2\sec\theta} \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{(2\sec\theta+1)2\tan\theta}\mathrm{d}\theta = \int \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}$$

$$\xlongequal{t=\tan\theta/2}\int\frac{\dfrac{2}{1+t^2}}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\mathrm{d}t=\int\frac{2}{t^2+3}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{\theta}{2}\right)+C.$$

由于

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\tan\theta}{\sec\theta+1}$$

$$=\frac{\sqrt{(u/2)^2-1}}{u/2+1}=\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x+1},$$

得 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{\sqrt{3}(x+1)}+C.$

用方法 2：令 $\sqrt{x^2-2x-3}=x-t$, 则

$$x=\frac{t^2+3}{2(t-1)},\ \mathrm{d}x=\frac{t^2-2t-3}{2(t-1)^2}\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{x^2-2x-3}=\frac{t^2+3}{2(t-1)}-t=\frac{-(t^2-2t-3)}{2(t-1)}.$$

因此

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$=\int \frac{2(t-1)}{t^2+3}\cdot\frac{2(t-1)}{-(t^2-2t-3)}\cdot\frac{t^2-2t-3}{2(t-1)^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int \frac{2}{t^2+3}\mathrm{d}t=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{x^2-2x-3}-x}{\sqrt{3}}+C.$$

注1 对于本题来说, 方法 2 显然比方法 1 简捷.

注2 由以上两种方法所得的结果, 形式虽不相同但实质上只相差某一常数而已.

例7 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

解 令 $\sqrt{x^2-x+1}=t-x$, 则

$$x^2-x+1=t^2-2tx+x^2,$$

$$x=\frac{t^2-1}{2t-1}, \quad \mathrm{d}x=\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\mathrm{d}t,$$

从而有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int [\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}]\mathrm{d}t$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| - \frac{3}{2(2t-1)} + C$$

$$= 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right|$$

$$-\frac{3}{2(2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1)} + C.$$

注　虽然初等函数都是连续函数，从而它们都存在原函数，但并非初等函数的原函数都是初等函数.

例如

$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad \int \sin x^2\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$$

都不是初等函数，因此都不可能用我们介绍的方法把它们的原函数求出来.